ABR1577
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B50293
035/2: : |a (CaOTULAS)160122904
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Euler, Leonhard, |d 1707-1783.
245:00: |a Leonhard Euler's Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläuterungen. |c Herausgegeben von Dr. J. Ph. Wohlfers. |n Erster - [dritter] Theil.
260: : |a Greifswald, |b C. A. Koch's Verlagshandlung, |c 1848-[1853]
300/1: : |a 3 v. |b 19 fold. diagr. |c 22 cm.
500/1: : |a Vol. 3 has added t.-p. Leonhard Euler's Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper.
590/2: : |a math: Vol. 2-3 bound together
650/1: 0: |a Mechanics |x Early works to 1800.
700/1:1 : |a Wolfers, Jakob Philipp, |d 1803-1878, |e ed.
998: : |c WFA |s 9124

Leonhard Euler's

MECHANIK

oder

analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung

mit Anmerkungen und Erläuterungen

herausgegeben

von

J. Ph. Wolfers,
Dr. und Professor.

Dritter Theil.
Mit 9 Figuren-Tafeln.

GREIFSWALD 1853.
C. A. Koch's Verlagshandlung,
Th. Kunike.

Alexander Ziwet

Leonhard Euler's

THEORIE DER BEWEGUNG

fester oder starrer Körper

mit Anmerkungen und Erläuterungen

herausgegeben

von

J. Ph. Wolfers,
Dr. und Professor.

Mit 9 Figuren-Tafeln.

GREIFSWALD 1853.
C. A. Koch's Verlagshandlung,
Th. Kunike.

Vorwort.

Als ich vor 5 Jahren den ersten Theil von Euler's Mechanik herausgab, führte ich in dem dortigen Vorworte so wohl die Art und Weise an, wie das Werk entstanden war, als auch die Veranlassung zur Herausgabe. In Bezug auf das vorliegende Werk kann ich nur meine damalige Bemerkung wiederholen, dass ich das Originalwerk mit der Feder in der Hand studirt, dasselbe zugleich in deutscher Sprache niedergeschrieben, dabei aber die Anmerkungen und Erläuterungen, welche für mich zum Verständniss nothwendig waren, sogleich gesondert aufgezeichnet habe. Als ich nämlich das frühere Werk studirte, lag der Gedanke an die Herausgabe meiner Uebersetzung mir fern, bei diesem hingegen hegte ich fortwährend den Wunsch, meine Bearbeitung veröffentlichen zu können. Dass dieser Wunsch erfüllt wird, verdanke ich demselben mathematischen Freunde, welcher die Veröffentlichung des frühern Werkes veranlasst hat, indem derselbe in einer sehr wohlwollenden Beurtheilung des zweiten Theiles der Mechanik den Wunsch aussprach, dass ich auch dieses Werk in ähnlicher Weise wie jenes bearbeiten und herausgeben möchte. Auf diese Weise wurde der Herr Verleger bewogen, seine Bereitwilligkeit zum Verlage gegen mich auszusprechen.

Unter den mündlichen Urtheilen, welche ich über das frühere Werk vernommen habe, befand sich auch dasjenige, dass dort die Zerlegung der Kräfte und Bewegung unterblieben sei. Ueber diesen Punkt hat sich gerade der Verfasser selbst sehr treffend im §. 60. dieses Werkes ausgesprochen. Seine Worte sind unter andern die folgenden: „Diese drei Geschwindigkeiten, welche wir dem „sich bewegenden Punkte beigelegt denken, werden die „ganze Rechnung erleichtern, und da ich mich dieses „Hülfsmittels in den frühern Theilen der Mechanik nicht „bedient habe, bin ich dort auf sehr verwickelte Rech„nungen verfallen.“ Abgesehen davon, dass zwischen dem Erscheinen des ersten Werkes und der ersten Ausgabe des vorliegenden ein Zeitraum von 29 Jahren liegt, bin ich der Meinung, dass das erstere Werk ohne die vom Verfasser an obiger Stelle erwähnten sehr verwickelten Rechnungen weniger interessant und nützlich sein würde, indem derjenige, welcher jenes Werk eifrig studirt, gerade durch die Ausführung dieser Rechnungen mannichfache Belehrung zu erhalten in den Stand gesetzt wird. Ist nun aber nicht zu leugnen, dass das gegenwärtige Werk hinsichtlich der Methode bedeutende Vorzüge vor jenem ältern besitzt, so lag natürlich für mich der Wunsch sehr nahe, auch dieses allgemeiner zugänglich zu machen, wie mir dieses mit dem frühern Werke gelungen ist. In dieser Beziehung ist nämlich meine Erwartung bei weitem übertroffen worden, indem selbst Lehrer der Mechanik erklärt haben, dass ihnen Euler's Werk erst durch meine Bearbeitung vollständig bekannt geworden sei.

Während nun, wie erwähnt, in dem vorliegenden Werke die Zerlegung der Bewegung eingeführt worden ist, unterlässt der Verfasser nicht, wiederholt daran zu

erinnern, dass diese Zerlegung eine rein geometrische Operation und keine mechanische sei, dass also der Punkt nur eine einzige Bewegung und eine einzige Geschwindigkeit haben kann. Diese wiederholte Unterscheidung zwischen dem mechanischen Begriff und den im Geiste angegenommenen, wie auch geometrisch angedeuteten Hülfsmitteln scheint mir gerade in einem Lehrbuche wohl angebracht zu sein, weil so der Lernende vor manchen falschen Vorstellungen bewahrt werden wird. Mit Recht hebt dagegen der Verfasser den Umstand als bemerkenswerth hervor, dass, wenn die Bewegung eines Körpers einmal eine gleichförmige ist, auch die aus einer beliebigen Zerlegung hervorgehenden, nur idealen Seitenbewegungen es ebenfalls sein werden.

Die Bereicherungen, welche dieses Werk im Vergleich mit dem frühern besitzt, lassen sich von zwei wesentlich verschiedenen Seiten betrachten; einmal sind es die Fortschritte, welche der Verfasser in der erwähnten Zwischenzeit selbst gemacht und diesem spätern Werke einverleibt hat, dann aber alle diejenigen Abschnitte, welche diesem Werke eigenthümlich angehören, indem hier die Bewegung starrer Körper, dort nur die von Punkten betrachtet wird. Das vorliegende Werk zerfällt daher auch zunächst in zwei durchaus gesonderte Abschnitte, in welchen nur die §§. ohne Unterbrechung fortlaufen. Die Einleitung, welche nothwendige Erläuterungen und Zugaben zur Bewegung von Punkten enthält, erstreckt sich von §. 1. bis §. 259. und zerfällt in sechs Kapitel. Dieselbe dient als Verbindungsglied zwischen den frühern zwei Theilen, und der mit §. 260. beginnenden Abhandlung über die Bewegung starrer Körper, welche den grössten Theil des ganzen Raumes einnimmt, indem nur am Schlusse

einige besondere Abhandlungen, wie im Originale, hinzugefügt sind. Ueber diese eben erwähnte Einleitung erlaube ich mir, hier einige Bemerkungen zu machen.

Indem wir nun die Bereicherungen dieses Werkes, im Vergleich mit dem frühern betrachten, stossen wir zunächst auf die Eigenschaften, welche die Körper im Allgemeinen besitzen und es dürfte ins besondere die im §. 123. u. f. betrachtete Undurchdringlichkeit des Hervorhebens werth sein, über welche im §. 136. bemerkt wird, dass diese Eigenschaft eine sehr reiche Quelle von Kräften sei. Als neu hinzugekommen finden wir ferner in diesem Werke den Begriff der Trägheit und den daraus hervorgehenden Begriff der Masse. Es mussten dann die Momente der Trägheit und der Mittelpunkt der Trägheit aller Körper entwickelt werden, ehe man auf die letztern diejenigen Lehren anwenden konnte, welche in den frühern Theilen für blosse Punkte aufgestellt worden sind.

In den §§. 177. und 178. spricht sich der Verfasser sehr bestimmt über das Verhältniss aus, in welchem dieses Werk zu dem frühern steht. Nach §. 177. gründet sich die ganze Mechanik auf das Princip, dass die Zunahme der Geschwindigkeit einer Bewegung direct dem Produkte aus der antreibenden Kraft in das Zeittheilchen und indirect der Masse des kleinen Körpers proportional ist. Dieses Princip konnte in dem frühern Werke noch nicht stattfinden, weil dort eben von keinen Körpern die Rede war, der Begriff der Masse also nicht vorkam. Während in diesem Werke, wie in dem frühern, die Schwere als Einheit der Kraft eingeführt ist, geschieht dies hier doch auf die vortheilhaftere Weise, wie man sie auch in den neuern Werken über Mechanik anzuwenden pflegt. Die in §§. 232.—237.

behandelte Aufgabe scheint besonders des Hervorhebens werth zu sein, weil nach der Bemerkung des Verfassers Tobias Mayer seine zur damaligen Zeit Epoche machenden Mondtafeln gerade nach der hier auseinander gesetzten Methode construirt hat.

Im §. 243. wird, nach vorangegangenen allgemeinen Betrachtungen über die respective Bewegung kleiner durch Kräfte angetriebener Körper, die Uebereinstimmung der respectiven Bewegung mit der scheinbaren gezeigt, welche letztere in der Astronomie eine so bedeutende Rolle spielt. Wie oben bei der Zerlegung der Bewegung ist im §. 249. die Bemerkung des Verfassers hervorzuheben, dass man sich bei der respectiven Bewegung der Körper diesen, ausser der absoluten wirklichen, eine andere Bewegung beigelegt nur zu denken habe, um eben die Erscheinung sich klar zu machen, dass aber von keiner wirklichen weitern Bewegung die Rede sein kann und darf.

Im §. 258. gibt der Verfasser eine kurze Andeutung, wie man zu verfahren hat, um die Bewegung des Mondes so darzustellen, wie sie vom Mittelpunkte der Erde aus sich zeigen würde. Indem hier zugleich erwähnt wird, dass die Himmelskörper sich eben so bewegen, als ob die Masse eines jeden in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre, dürfen wir hieraus schon entnehmen, dass die in den frühern Theilen für blosse Punkte bewiesenen Sätze sich auch auf materielle Körper anwenden lassen werden. Hiermit endet die in sechs Kapitel eingetheilte Einleitung, welche hauptsächlich dazu dienen sollte, den Inhalt des frühern Werkes zu ergänzen und zu erläutern. Durch die bisherigen Auszüge wollte ich eine Andeutung der verschiedenen Bereicherungen geben, welche jenes Werk

durch diese Einleitung erhalten hat; ausserdem wollte ich aber auch hierdurch motiviren, warum ich mir erlaubt habe, durch einen doppelten Titel dieses Werk als einen dritten Theil der frühern Mechanik darzustellen. Diess ist die einzige Abänderung, welche das Original erleidet, sie ist aber nur eine äussere, indem der Verfasser selbst in diesem Werke wiederholt die ersten Theile anführt.

Möge dieser dritte Theil eine so gute Aufnahme finden, wie nach der Mittheilung mehrerer competenter Richter, die beiden ersten Theile erlangt haben!

Berlin, im Juli 1852.

Der Herausgeber.

Einleitung

enthaltend

nothwendige Erläuterungen und Zugaben

zur

Bewegung von Punkten.

1

Kapitel I.

Betrachtung der Bewegung im Allgemeinen.

Erklärung 1.

§. 1. So wie die Ruhe ein beständiges Verharren an demselben Orte ist, ist die Bewegung eine beständige Veränderung des Ortes. Man sagt nämlich, ein Körper ruhe, wenn man wahrnimmt, dass er stets an demselben Orte haften bleibt; von einem Körper, welcher mit dem Verlauf der Zeit nach andern und andern Orten folgt, sagt man, dass er sich bewege.

Erläuterung 1.

§. 2. Obgleich die Bezeichnungen der Ruhe und der Bewegung an sich ganz klar zu sein scheinen, so ist es doch, um eine genauere Kenntniss derselben zu erlangen, angemessen, dass man die einzelnen Ideen, welche ihnen zu Grunde liegen, aufmerksam betrachte. Zuerst tritt uns die Idee des Ortes entgegen, was aber ein Ort sei, lässt sich nicht leicht erklären. Diejenigen, welche sich den unermesslichen Raum vorstellen, worin die ganze Welt sich befindet, nennen die Theile desselben, welche von Körpern eingenommen werden, ihre Orte. Wegen der Ausdehnung muss nämlich jeder Körper einen ihm gleichen Theil des Raumes einnehmen und gleichsam ausfüllen. Wir können aber die Bedeutung dieses Raumes nur durch Abstraction auffassen, indem wir im Geiste alle Körper aufheben und dasjenige, was alsdann nach unserer Vorstellung übrig bleibt, den Raum nennen. Wir nehmen demnach an, dass, nachdem alle Körper fortgenommen sind, ihre Ausdehnung noch übrig bleibe; eine Auffassung, welche die Philosophen mit vielen Gründen zu bekämpfen pflegen. Es scheint ferner diese Frage nicht eher abgeschlossen werden zu können, bevor nicht

eine entsprechende Idee der Bewegung aufgestellt worden ist. Da wir nun aber derartige bedenkliche Abstractionen verschmähen, müssen wir die Sache so erwägen, wie sie uns unmittelbar in die Sinne tritt und werden demnach über die Bewegung eines beliebigen Körpers auf keine andere Weise urtheilen können, als indem wir ihn auf andere ihn umgebende Körper beziehen. So lange er in Bezug auf diese seine Lage beibehält, pflegen wir zu sagen, dass er an demselben Orte verharre, wenn er aber in eine andere Lage gelangt ist, sagen wir, er habe seinen Ort verändert.

Erläuterung 2.

§. 3. Da wir nun die Lage eines Körpers in Bezug auf andere ihn umgebende abschätzen, während diese unter einander dieselbe Lage beibehalten, so kann unser Urtheil, da es sich auf geometrische Ideen stützt, uns nicht betrügen. Es wird nämlich die Lage durch die Abstände von einigen verschiedenen Punkten bestimmt und hierzu werden weder Ein, noch auch zwei Punkte hinreichend sein. Sage ich nämlich, ein Punkt O sei vom Punkt A um den Zwischenraum $= a$ entfernt, so wird die Lage des ersten Punktes keineswegs bestimmt. Es existirt nämlich alsdann die ganze sphärische Oberfläche, welche um den Mittelpunkt A mit dem Radius $= a$ beschrieben worden ist und in deren einzelnen Punkten der Punkt O sich auf gleiche Art befinden kann. Es wird daher keiner von allen Punkten als sein wirklicher Ort angegeben. Sage ich aber, der Punkt O sei von A um den Abstand $= a$ und von B um den Abstand $= b$ entfernt; so denke man sich die beiden sphärischen Oberflächen, welche um den Punkt A mit dem Radius $= a$ und um B mit dem Radius $= b$ beschrieben sind. Da der Durchschnitt beider Flächen ein Kreis ist, so werden seine einzelnen Punkte so liegen, dass sie von A um den Abstand a und von B um den Abstand b entfernt sind. Gewiss liegt also der Punkt O auf der Peripherie dieses Kreises, wo er sich aber wirklich befindet, ist noch nicht bestimmt. Setzen wir daher voraus, dass ausserdem der Punkt O von einem dritten C um den Abstand $= c$ entfernt sei und dass C nicht mit A und B in Einer geraden Linie liege; so wird die mit dem Radius $= c$ um C beschriebene Kugelfläche den obigen Kreis noch in zwei Punkten schneiden und wir werden daher auch jetzt zweifelhaft sein, in welchem von beiden der Punkt O sich befinde; wir sind daher jetzt nur

noch über zwei Punkte in Ungewissheit. Hieraus schliessen wir, dass, wenn wir die Abstände des Punktes *O* von je vier, nicht in derselben Ebene liegenden, Punkten *A*, *B*, *C* und *D* kennen, auch seine Lage vollkommen bestimmt sein wird. Häufig werden aber auch je drei Punkte ausreichen, wenn nämlich aus einem anderweitigen Grunde der eine von jenen zwei, gleich Genüge leistenden, Punkten ausgeschlossen wird.

Anmerkung.

§. 4. Da diese Bestimmung der Lage eines Punktes eine geometrische ist, so waltet durchaus kein Zweifel darüber ob, wie wir von ihr aus die Betrachtungen über die Ruhe und Bewegung zu eröffnen haben. Was wir aber hier über die Lage von Punkten bemerkt haben, lässt sich leicht allen Körpern anpassen; weil die Idee der Ruhe und Bewegung nur in so fern bei Körpern stattfindet, als man sie ihren einzelnen Punkten zutheilt. Was für eine Idee wir nämlich auch von der Ruhe und Bewegung aufstellen, so können wir dieselbe nicht sogleich auf einen bestimmten ganzen Körper anwenden, da möglicherweise in dem letztern die einen Punkte ruhen, die andern sich mehr oder weniger bewegen können. Desshalb ist es durchaus nothwendig, dass wir die wahre Natur der Ruhe und Bewegung zuerst nur an Punkten erforschen. Diese Betrachtung ist jedoch nicht als eine imaginäre anzusehen, weil der Begriff der Punkte ein rein abstracter ist und jeder ohne Zweifel diesen eine Bewegung oder Ruhe zuschreiben wird. Wie es nun aber auch mit dieser Streitigkeit beschaffen sein mag, so wird man doch nothwendig zugeben müssen, dass man in einem ruhenden oder sich bewegenden Körper sich Punkte denken könne, welche entweder ruhen oder sich bewegen. Hierbei kommt es nicht darauf an, ob man solche Punkte für Elemente des Körpers halten könne oder nicht. Es steht auch nichts im Wege, dass jeder an die Stelle dieser Punkte nach Belieben wahre Elemente des Körpers setze, welche entweder unendlich oder wenigstens sehr klein sind; die Sache kommt nämlich auf dasselbe hinaus und es kann hieraus gar kein Zweifel hervorgehen. Auf ähnliche Weise steht nichts im Wege, die Punkte *A*, *B*, *C* und *D*, auf welche ich die Lage des Punktes *O* bezogen habe, als reelle anzusehen, da sie Grenzen sind, welche in wirklichen Körpern existiren und von welchen aus die Abstände gemessen werden. Wenn man nicht etwa die Existenz von Körpern ganz ableugnet, womit unser Streit verschwinden würde,

so wird man eine derartige Auffassung zur Erleichterung der Forschung keinesweges missbilligen können.

Erklärung 2.

§. 5. Wenn, während vier oder mehrere Punkte dieselben Abstände von einander beibehalten, ein Punkt *O* stets in gleicher Entfernung von ihnen bleibt; so sagt man, er ruhe in Bezug auf sie, weil er ebenfalls in Bezug auf sie dieselbe Lage beibehält.

Zusatz 1.

§. 6. Ist *A* ein fester Körper, welcher seine Gestalt beständig beibehält, so kann man sich in ihm, wie klein er auch sein mag, nicht nur vier, sondern so viel Punkte als möglich denken, welche unter sich stets dieselben Abstände beibehalten.

Zusatz 2.

§. 7. Wenn daher ein Punkt *O* in Bezug auf diesen Körper *A* dieselbe Lage beibehält, was der Fall ist, wenn er von allen seinen Punkten beständig gleich weit entfernt bleibt; so sagt man, der Punkt *O* ruhe in Bezug auf den Körper *A*.

Zusatz 3.

§. 8. Hier haben wir eine wirkliche Erklärung der Ruhe, welche in keine vage und imaginäre Ideen verwickelt, aber mit der Idee eines beliebigen Körpers verbunden ist, in Bezug auf welchen der Punkt *O* sich in Ruhe befindet. Es ist nicht klar, was die sogenannte absolute Ruhe sei, welche von dem Begriff eines solchen Körpers getrennt ist.

Erläuterung 1.

§. 9. Hier an der Schwelle der Mechanik brauchen wir uns aber um die absolute Ruhe nicht zu bekümmern, wir wissen auch durchaus nicht, ob und wie sie existire, indem wir nur dasjenige untersuchen, was die Sinne uns zeigen. Wo ferner bei uns von der Ruhe die Rede sein wird, ist immer unsere Idee mit einem beliebigen Körper verknüpft, in Bezug auf welchen ein Körper oder vielmehr ein Punkt nach unserer Erklärung sich in Ruhe befindet. So nehmen die Schiffer die Körper als ruhend an, welche in Bezug auf das Schiff ihre Lage beibehalten; eben so wie wir, wenn wir uns auf dem Festlande befinden, den Körpern Ruhe zuzuschreiben pflegen, welche in Bezug auf den Erdboden dieselbe Lage beibehalten. Weil das Schiff sich wirklich bewegt, befinden sich jene in keinem grössern Irrthum als wir,

da nach den Lehren der Astronomen die ganze Erde sich ebenfalls bewegt. Bei der hier aufgestellten Idee der Ruhe kümmern wir uns durchaus nicht darum, ob jener Körper, in Bezug auf welchen wir die Ruhe als Behauptung aufstellen, selbst ruhe oder sich bewege. So lange nämlich der Punkt O in Bezug auf den Körper A dieselbe Lage beibehält, sagen wir er ruhe in Bezug auf ihn und deuten durchaus nichts an, was sich über diese Worte hinaus erstreckt. Die Frage über die Ruhe oder Bewegung des Körpers A würde nämlich eine durchaus neue und anderweitig zu entscheidende sein, welche aber zu jener Erklärung nichts hinzufügen wird. So befindet sich in einem Schiffe alles in Bezug auf dasselbe in Ruhe, was in derselben Beziehung seine Lage nicht ändert und es kommt nichts darauf an, ob das Schiff selbst ruhe oder sich bewege.

Erläuterung 2.

§. 10. Die hier gegebene Idee der Ruhe ist eine relative, da sie nicht allein aus der Lage des Punktes O, welchem wir sie zutheilen, entnommen ist, sondern auch eine Vergleichung desselben mit einem andern gewissen Körper A angestellt wird. Wenn wir daher jemals dahin gelangen können, zu erfahren, ob es eine absolute Ruhe gebe und was sie sei, so wollen wir, der Unterscheidung wegen, die hier erklärte Ruhe eine respective nennen. Hiernach wird es offenbar möglich sein, dass derselbe Punkt, welcher in Bezug auf den Körper A ruhet, in Bezug auf andere Körper nicht ruhe, sondern sich mannigfach bewege. So bewegt sich ein in einem Schiffe ruhender Körper, in Bezug auf die Sonne oder andere Himmelskörper, auf die eine oder andere Weise. Hieraus erhellt, dass diese Eigenschaften der Ruhe oder Bewegung im Körper oder Punkt O keine Veränderung hervorbringen, da sie beide ihm zugleich zukommen können, so wie man ihn auf den einen oder andern Körper bezieht.

Anmerkung.

§. 11. Alles dieses ist auf ähnliche Weise von der Idee des Ortes zu verstehen. Da nämlich Ruhe das Verharren an demselben Orte ist, so muss man, damit diese Erklärung auch für die respective Ruhe gelte, sagen: der Punkt O, welcher in Bezug auf den Körper A ruhen soll, muss in Bezug auf diesen an demselben Orte verharren. Da er nun in derselben Lage in Bezug auf den Körper A bleibt, so stimmt nothwendig der-

selbe Ort mit derselben Lage überein. Diese Idee des Ortes ist eben so, wie die der Ruhe eine respective, so dass der respective Ort ein gewisser und bestimmter mit Bezug auf einen gewissen Körper ist. Ob es eine andere natürlichere Idee des Ortes gebe ist noch unbekannt; ist eine derartige gegeben, so wird ein solcher Ort ein absoluter genannt. Einem respectiven Orte, wie wir ihn hier erklärt haben, darf man die Unbeweglichkeit nicht zutheilen, wie dies häufig zu geschehen pflegt; denn wenn der Körper, in Bezug auf welchen wir ihn beschrieben haben, sich selbst bewegt, so muss man annehmen, dass der Ort zugleich mit ihm fortschreite. Wenn nun jemandem die Körper absolut zu ruhen scheinen, welche in Bezug auf die Fixsterne denselben Ort beibehalten, so wird für ihn der absolute Ort die sichere und bestimmte Lage in Bezug auf die Fixsterne sein. Ob aber die Beziehung auf die Fixsterne mehr mit der Natur übereinstimme, als die auf andere beliebige Körper, dies müssen wir auch hier in Zweifel gestellt sein lassen.

Erklärung 3.

§. 12. Wenn ein Punkt O in Bezug auf einen beliebigen Körper A, dessen Figur stets unverändert bleibt, seine Lage beständig ändert, so sagt man, er bewege sich in Bezug auf den Körper A.

Es ist einleuchtend, dass man die Figur des letztern als unveränderlich annehmen muss, damit vier in ihm aufgefasste Punkte, auf welche man den Punkt O bezieht, unter sich dieselben Abstände beibehalten.

Zusatz 1.

§. 13. Alles das, was wir von der respectiven Ruhe gesagt haben, lässt sich leicht auf respective Bewegung übertragen. Wenn nämlich ein Punkt O in Bezug auf den Körper A dieselbe Lage beibehält, so sagt man, er ruhe; wenn er diese Lage beständig ändert, so sagt man, er bewege sich respective.

Zusatz 2.

§. 14. Zugleich ist es offenbar möglich, dass derselbe Punkt O, welcher in Bezug auf den Körper A ruhet, in Bezug auf einen andern Körper B sich bewege. Daher ist diese Idee der Bewegung sowohl, als auch der Ruhe eine relative und sie bringt nicht die mindeste Veränderung im Punkte O hervor.

Zusatz 3.

§. 15. Bewegung und Ruhe sind daher nur im Namen,

nicht aber in der Sache selbst einander entgegengesetzt, da man beide zugleich demselben Punkte zutheilen kann, je nachdem man ihn mit dem einen oder andern Körper vergleicht. Die Bewegung unterscheidet sich von der Ruhe nicht mehr, als die eine Bewegung von der andern.

Zusatz 4.

§. 16. Man zählt daher fälschlich Bewegung und Ruhe zu den Zuständen der Körper, indem, wenn der Zustand irgend einer Sache sich ändert, man annehmen muss, dass die letztere selbst eine Veränderung erlitten habe, während doch in einem Körper keine Veränderung vorgeht, mag man ihm Bewegung oder Ruhe zutheilen.

Erläuterung 1.

§. 17. Es fällt daher jene berühmte Unterscheidung zwischen Bewegung und Ruhe, welche die Philosophen als eine den Körpern wesentliche anzuführen pflegen, zusammen, wenn wir nämlich nur die respective Bewegung und Ruhe betrachten. Sie werden nun zwar einwenden, die Sache verhalte sich ganz anders, wenn von der absoluten Bewegung und Ruhe die Rede ist; was aber absolute Bewegung und Ruhe sei, hiervon geben sie keine genügende Erklärung. Soll man diese Benennungen aus der Beziehung auf die Fixsterne herleiten, so werden nichts desto weniger so wohl die Bewegung, als auch die Ruhe respective sein und von unsern Erklärungen nur darin abweichen, dass man einen andern bestimmten Körper angibt, auf welchen die Beziehung angestellt wird. Man sieht hiernach nicht ein, wie daraus etwas für den Körper, welchen man darauf bezieht, hervorgehe. Uebrigens leugne ich keinesweges, dass ein Unterschied zwischen der Bewegung und Ruhe, oder zwischen einem sich bewegenden und ruhenden Körper stattfinde, da vielmehr die ganze Mechanik sich mit der Bestimmung derselben beschäftigt. Dagegen leugne ich und mit Recht, dass die Bewegung und Ruhe irgend eine innere Veränderung des Körpers enthalte. Die Philosophen mögen sehen, zu welcher Art von Prädikaten man die Ruhe und Bewegung zu zählen habe, Eigenschaften kann man sie gewiss am wenigsten nennen. Nichts aber verhindert, sie zu den Relationen zu zählen; wenn man nämlich dieselbe Sache mit andern Gegenständen vergleicht, so erleidet ihre innere Natur keine Aenderung.

Erläuterung 2.

§. 18. Nachdem wir die Idee des Ortes bestimmt haben, wie das Urtheil der Sinne sie uns darbietet, stösst uns nun auch die Idee der Zeit auf, welche in den Begriff der Ruhe und Bewegung verflochten ist. Während man nämlich Ruhe das beständige Verharren an demselben Orte nennt, kann man dies beständig und Verharren ohne den Begriff der Zeit nicht verstehen. Die Idee der Bewegung erfordert aber einen mehr entwickelten Begriff der Zeit, wonach man sich auch die Eintheilung der letztern in gleiche oder ungleiche Abschnitte vorstellen könne. Während nämlich der Punkt O seine Lage in Bezug auf den Körper A verändert, kann man diese Veränderung nur erkennen, indem man wahrnimmt, wie gross die in einer beliebigen Zeit erfolgte ist. Wenn man daher, wie einige wollen, die Kenntniss der Zeit nicht anders wo her, als aus der Betrachtung der Bewegung schöpfen könnte; so würden wir weder die Zeit ohne die Bewegung, noch diese ohne jene erkennen können; wir würden daher von keiner von beiden je eine Kenntniss erlangt haben. Die Eintheilung der Zeit haben wir durch die Betrachtung der Bewegung, nämlich der Bewegung der Sonne gelernt, aber auch ohne Hülfe der Bewegung haben wir, wie es scheint, einen Begriff von dem, was vor und nach ist und hieraus wird sich von selbst die Idee der Aufeinanderfolge ergeben. Wenn wir nun ferner auch der Betrachtung der Bewegung die genauere Kenntniss der Zeit verdanken, so folgt hieraus doch nicht, dass die Zeit an sich nichts anderes sei, als was wir uns darunter denken. Was nämlich zwei gleiche Zeitintervalle sind, sieht jeder ein, wenn auch vielleicht nie in beiden gleiche Aenderungen eintreten, aus denen man auf jene Gleichheit schliessen könnte. Welchen Streit daher auch die Philosophen über den Verlauf der Zeit führen mögen, so müssen wir doch zur Erkenntniss der Bewegung ein Zeitmass benutzen. Ferner muss man zugeben, dass die Zeit unabhängig von jeder Bewegung verfliesse, so dass man sich Theile derselben denken könne, welche sowohl einander gleich als nach einem beliebigen Verhältniss ungleich sind. Wer uns diese Erlaubniss versagen wollte, würde alle Kenntniss der Bewegung durchaus aufheben. Es sei uns daher erlaubt, eben so die Zeit, wie Linien und andere geometrische Grössen in die Rechnung einzuführen.

Erklärung 4.

§. 19. Bei der Bewegung eines Punktes wird der Raum, welchen er durchläuft, der Weg genannt und da dieser eine Linie ist, so wird sie eine gerade oder krumme sein. In jenem Falle heisst die Bewegung eine geradlinige, in diesem eine krummlinige.

Zusatz 1.

§. 20. Da wir bis jetzt nur von der respectiven Bewegung eine Idee haben, so wird man auch den Weg oder die vom Punkt beschriebene Linie auf den Körper zu beziehen haben, in Bezug auf welchen man die Bewegung abschätzt.

Zusatz 2.

§. 21. Dieser Körper wird nämlich, mag er selbst ruhen oder sich bewegen, indem das letztere Verhältniss nicht in Rechnung kommt, als ein fester angesehen und man muss in Bezug auf ihn die Richtung und Lage jenes vom Punkte beschriebenen Raumes angeben.

Zusatz. 3.

§. 22. Die Kenntniss dieses Weges wird demnach auf drei Fälle zurückgebracht, von denen der erste stattfindet, wenn die Bewegung geradlinig also der Weg eine gerade Linie ist. Der zweite Fall findet statt, wenn der Weg eine krumme Linie, die ganz in derselben Ebene liegt, der dritte, wenn die krumme Linie nicht in derselben Ebene enthalten ist.

Erläuterung 1.

§. 23. In der Geometrie nimmt man schon an, dass durch die Bewegung eines Punktes eine Linie beschrieben werde, was an sich so klar ist, dass es keines Beweises bedarf. Wenn nämlich ein Punkt, welcher sich vorher in A befand, nun in B liegt, so muss er nothwendiger Weise inzwischen eine gewisse continuirliche, von A bis B sich erstreckende Linie durchlaufen haben. Es müsste sonst jemand behaupten wollen, dass der Punkt in A plötzlich vernichtet, hierauf aber in B von neuem erzeugt sei; da diess aber ein Wunder und keine Bewegung sein würde, so gehört es nicht in unsern Plan. Diejenigen, welche eine Bewegung nicht anerkennen wollen, glauben die Sache deutlicher aufzufassen, indem sie behaupten, der Punkt werde in den einzelnen Punkten des scheinbar durchlaufenen Weges vernichtet und in den folgenden sogleich wie-

der erzeugt; als ob der Uebergang von dem einen Orte zum andern schwerer zu verstehen sei, als ein wechselndes Zerstört- und Erzeugtwerden. Da aber eine Bewegung in einer andern Beziehung Ruhe sein kann, so müssen wir von der letztern dasselbe behaupten, dass nämlich ein Körper an demselben Orte beständig zerstört und plötzlich wieder erzeugt werde. Diese Meinung weicht nicht von derjenigen ab, nach welcher die Erhaltung der Körper als ein beständiges Erschaffenwerden derselben angesehen wird, sie scheint daher kaum von der gewöhnlichen abzuweichen. Da es nämlich keinen Zeitpunkt gibt, in welchem ein Körper nicht existirte, so kann man nicht daran zweifeln, dass er beständig existire und zwar muss man diese beständige Existenz des Körpers, so wohl bei der Bewegung, als bei der Ruhe zugeben. Hieraus ergibt sich, dass ein Punkt von der einen Grenze zur andern nur übergehen kann, indem er nach und nach die ganze Linie durchläuft, welche sich von jener Grenze zu dieser erstreckt.

Erläuterung 2.

§. 24. (Figur 1.) Setzen wir voraus, dass ein Punkt die Linie $APQB$ durchlaufen habe, so muss er sich nothwendig in B befinden, nachdem er in A gewesen ist, da er nicht zugleich in A und B sein kann. Aus denjenigen Dingen, welche wie wir begreifen nicht zugleich stattgefunden haben können, schliessen wir auf die Idee der Zeit und da der Punkt sich in A befunden hat, so erkennen wir, dass er nur nach Verlauf einiger Zeit nach B gelangt sein kann. Dasselbe gilt von den zwischenliegenden Punkten P und Q und da er früher nach P als nach Q, früher nach Q als nach B gelangt ist; so entnehmen wir hieraus zugleich eine Eintheilung der Zeit. Hiernach ist der Zeitraum, in welchem er von A nach P gelangt, kürzer als der, in welchem er von A nach Q und dieser wieder kürzer als derjenige, in welchem er von A bis B fortgeht. Hieraus ersehen wir, dass die Zeit eine theil- und messbare Grösse ist und zwar wird man die eine nicht nur grösser als die andere zu nennen haben, sondern es werden auch ihre Theile entweder als einander gleiche, oder als nach irgend einem Verhältniss ungleiche angegeben werden können. Da nämlich die Zeit eine Grösse ist, so muss man nothwendiger Weise zugeben, dass diejenige, in welcher der Körper von A nach P gelangt, entweder gleich oder grösser

als die Zeit sei, in welcher er weiter von *P* nach *Q* gelangt und was man auch sagen möge; so wird nothwendig zwischen diesen zwei Zeiten ein gewisses Verhältniss stattfinden müssen. Mit dem grössten Rechte stelle ich daher hier die Forderung, dass die Zeit als eine theilbare und der Ausmessung fähige Grösse in die Rechnung eingeführt werden dürfe.

Erklärung 5.

§. 25. Eine gleichmässige oder gleichförmige Bewegung heisst diejenige, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Wege durchlaufen werden. Werden aber in gleichen Zeiten ungleiche Wege oder in ungleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt, so wird die Bewegung eine ungleichförmige genannt.

Zusatz 1.

§. 26. Wenn daher ein Punkt sich gleichförmig bewegt, so durchläuft er in der doppelten Zeit einen doppelten, in der dreifachen Zeit einen dreifachen Weg und es stehen im Allgemeinen die durchlaufenen Wege im Verhältniss der dazu gebrauchten Zeiten, und umgekehrt. Wird daher in der Zeit t der Weg s und in einer andern Zeit T der Weg S zurückgelegt, so wird $$t : T = s : S.$$

Zusatz 2.

§. 27. Bei der ungleichförmigen Bewegung verhält sich aber die Sache anders und es werden die durchlaufenen Wege s und S nicht im Verhältniss der Zeiten t und T stehen. Ferner ist hier nur die Rede von einer beliebigen respectiven Bewegung, von welcher allein wir bis jetzt eine Idee haben und es ist dabei einerlei, ob die Bewegung gerad- oder krummlinig ist.

Zusatz 3.

§. 28. Aus der gleichförmigen Bewegung erhalten wir umgekehrt eine genaue Eintheilung der Zeit, da wir nämlich den Weg geometrisch eintheilen können, so wird sich daraus eine ähnliche Eintheilung der Zeit in gleiche oder ungleiche Theile ergeben.

Anmerkung 1.

§. 29. Man ersieht hieraus, dass die Eintheilung der Zeit nicht eine reine Operation des Geistes ist, wie diejenigen zu behaupten pflegen, welche der Zeit nur in unserm Geiste eine Stelle einräumen und die Idee der Zeit von der letztern selbst nicht trennen. Wäre nämlich die Zeit nichts anderes, als die Reihefolge der nach einander eintretenden Dinge und wäre

ausserhalb unseres Geistes nichts, wodurch die Zeit bestimmt würde; so würde uns nichts hindern, bei jeder Bewegung die Zeittheile, in denen gleiche Wege zurückgelegt werden, für gleiche zu halten, da sie als einander gleiche Nachfolgungen erscheinen. Wir würden daher mit gleichem Rechte jede Bewegung als eine gleichförmige ansehen können. Durch die Natur der Sache erhalten wir aber ein hinreichendes Zeugniss, dass die gleichförmige Bewegung sich wesentlich von der ungleichförmigen unterscheide und es muss daher in der Gleichheit der Zeiten, worauf sie sich stützt, mehr stecken, als was wir in der Idee uns vorstellen. Man muss demnach behaupten, dass die Gleichheit der Zeiten einen gewissen, ausserhalb unseres Geistes befindlichen, Grund habe und es scheint, dass wir ihre Kenntniss eher von ausserhalb aus der gleichförmigen Bewegung geschöpft haben.

Anmerkung 2.

§. 30. So lange ein Punkt sich gleichförmig bewegt, dergestalt dass er in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, sagt man, er bewege sich gleich geschwind. Wenn ferner zwei Punkte A und B sich gleichförmig bewegen, jener in den einzelnen Zeiten den Weg s, dieser in denselben Zeiten den Weg σ zurücklegt und $s > \sigma$ ist; so sagt man: A bewege sich geschwinder als B oder B langsamer als A. Wenn ferner der Punkt A in derselben Zeit das zwei- oder dreifache des von B beschriebenen Weges zurücklegt, so sagt man, jener schreite zwei- oder dreimal so geschwind fort als dieser. Auf diese Weise stellt sich die Vergleichung desjenigen, was wir geschwinder benannt haben, dem Geiste deutlich dar, wenn wir auch noch nichts über die Sache selbst bestimmt haben. Es ist aber diese Sache eine abstracte Auffassung, welche gleichsam die Basis dessen darstellt, was wir uns unter der Benennung geschwinder denken; diese Auffassung nennen wir Geschwindigkeit oder Schnelligkeit und hiervon wollen wir eine Erklärung aufstellen.

Erklärung 6.

§. 31. Bei der gleichförmigen Bewegung heisst das Verhältniss der Wege zu den Zeiten, in welchen sie durchlaufen werden, Geschwindigkeit oder Schnelligkeit. Die Geschwindigkeit wird daher vermittelst des Quotienten des Weges durch die Zeit abgeschätzt.

Zusatz 1.

§. 32. Wenn daher bei gleichförmiger Bewegung der Weg s in der Zeit t durchlaufen wird, so ist die Geschwindigkeit $= \frac{s}{t}$ und wenn wir diese $= v$ setzen, so haben wir die Gleichung

$$v = \frac{s}{t}.$$

Zusatz 2.

§. 33. Bei derselben Bedeutung von s, t und v wird daher durch je zwei Grössen die dritte bestimmt, indem wir haben:

$$1)\ v = \frac{s}{t};\ 2)\ t = \frac{s}{v};\ 3)\ s = tv.$$

Zusatz 3.

§. 34. Haben für eine andere gleichförmige Bewegung S, T und V dieselbe Bedeutung, so erhalten wir die sehr bekannten Proportionen:

$$1)\ v : V = \frac{s}{t} : \frac{S}{T};\ 2)\ t : T = \frac{s}{v} : \frac{S}{V};\ 3)\ s : S = tv : TV.$$

Erläuterung 1.

§. 35. Es wird hier ein Zweifel darüber entstehen, wie man Wege durch Zeiten dividiren könne, da sie ungleichartige Grössen sind und man nicht angeben kann, wie oft eine Zeit z. B. 10 Minuten in einem Wege von z. B. 10 Fuss enthalten sei. Es ist hier jedoch nicht absolut von einer Division die Rede, sondern nur von einer Vergleichung, weil die Idee der Geschwindigkeit nichts Absolutes enthält. Es kann nämlich die Geschwindigkeit nicht anders als relativ verstanden werden und wenn wir die Geschwindigkeit irgend einer bestimmten gleichförmigen Bewegung als bekannt annehmen und als Einheit betrachten; so wird bei jeder andern gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit durch eine Zahl ausgedrückt, also ferner keine Schwierigkeit aufstossen. Denken wir uns, dass man bei einer gleichförmigen Bewegung, vermöge welcher der Weg s in der Zeit t zurückgelegt wird, die Geschwindigkeit als Einheit annehme, also $\frac{s}{t} = 1$ setze, so wird für eine andere gleichförmige Bewegung, vermöge welcher der Weg S in der Zeit T durchlaufen wird, die Geschwindigkeit V so beschaffen sein, dass wir haben $V : 1 = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$.

Es wird demnach $V = \frac{St}{Ts} = \frac{S}{s} \cdot \frac{t}{T}$, wo also die Faktoren $\frac{S}{s}$ und $\frac{T}{t}$ wirkliche Quotienten darstellen.

Erläuterung 2.

§. 36. Die obige Schwierigkeit verschwindet aber auch, wenn wir alles auf absolute Zahlen zurückführen. Wenn wir nämlich bei der Messung der Wege eine bestimmte Länge als Einheit annehmen und eben so für die Zeiten eine gewisse bestimmte Zeit als Einheit betrachten, so werden wir uns dieser Masse beständig bedienen und so alle Wege und Zeiten durch absolute Zahlen ausdrücken, deren vermischte Division durch nichts verhindert wird. Die oben angegebenen Quotienten sind daher gewiss den Geschwindigkeiten proportional und weil es noch unserer Willkühr überlassen ist, welche Geschwindigkeit wir als Einheit ansehen wollen; so hindert uns nichts, eben diejenige Geschwindigkeit, bei welcher jener Quotient $= 1$ wird, auch als Einheit anzunehmen. Haben wir diese Verfahrungsweise aufgestellt, so bezeichnen die obigen Quotienten $\frac{s}{t}$ und $\frac{S}{T}$ in Wirklichkeit irgend welche Geschwindigkeiten. Stets aber können die blossen gegenseitigen Verhältnisse hinreichen und es wird in jedem vorkommenden Falle leicht sein, dieselben auf absolute Masse zurückzuführen.

Anmerkung.

§. 37. Diesen Begriff der Geschwindigkeit haben wir aus der gleichförmigen Bewegung abgeleitet, allein er gilt nichts desto weniger auch für die ungleichförmige Bewegung. Während in der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit überall dieselbe ist, muss man sie in der ungleichförmigen als veränderlich ansehen. Wir werden nämlich bald zeigen, dass bei jeder Bewegung, wie ungleichförmig sie auch sein mag, die kleinsten einzelnen Elemente des Weges als mit gleichförmiger Bewegung durchlaufen gedacht werden können; auf diese Weise kann man daher in jedem beliebigen Punkte des Weges die Geschwindigkeit angeben, mit welcher ein so gedachter sehr kleiner Weg durchlaufen wird. Hiernach kann man die Geschwindigkeit als eine besondere Eigenschaft der Bewegung ansehen, welche von dem beschriebenen Wege nicht abhängig ist, da in jedem beliebigen Punkte des letztern eine

bestimmte Geschwindigkeit gegeben ist. Hiernach können wir sagen, die Geschwindigkeit ist eine solche Modification der Bewegung, wodurch diese, als zur Beschreibung eines gegebenen Weges in einer gewissen Zeit geeignet, bestimmt wird. So wie wir übrigens hier eine beliebig respective Bewegung betrachten, wird auf gleiche Weise die Geschwindigkeit auch eine respective sein und wird man sie als eine in demselben Punkte und zu derselben Zeit verschiedene anerkennen müssen, je nachdem man die Bewegung auf den einen oder andern Körper bezieht. So ist es möglich, dass die Geschwindigkeit eines in einem Schiffe sich bewegenden Körpers in Bezug auf dieses Schiff sehr verschieden ist, von seiner Geschwindigkeit in Bezug auf das Ufer.

Erklärung 7.

§. 38. Ist die Bewegung geradlinig, so ist die Richtung der Bewegung eben die gerade Linie, auf welcher jene vor sich geht; ist die Bewegung aber krummlinig, so gibt in jedem Punkte die Tangente der Curve die Richtung an. Man sagt daher, dass bei einer krummlinigen Bewegung die Richtung sich beständig ändere, während sie bei einer geradlinigen stets dieselbe bleibt.

Zusatz 1.

§. 39. Die Richtung der Bewegung erkennt man aus dem Winkel, unter welchem sie gegen eine oder zwei feste gerade Linien geneigt ist. Erfolgt nämlich die Bewegung in derselben Ebene, so ist die Neigung gegen eine feste gerade Linie hinreichend; erfolgt jene nicht in derselben Ebene, so muss man die Neigung gegen zwei feste gerade Linien kennen.

Zusatz 2.

§. 40. Bei einer krummlinigen Bewegung wird daher, sobald man die Curve kennt, welche der sich bewegende Körper beschrieben hat, die Richtung an den einzelnen Punkten nach der Methode, wonach man Tangenten bestimmt, bekannt werden.

Anmerknng.

§. 41. Wie man sich keine Bewegung ohne Geschwindigkeit, so kann man sie sich auch nicht ohne eine Richtung denken. Da nämlich ein Punkt, selbst in einer sehr kurzen Zeit, von seinem Orte nach einem andern übergeht, so ergibt der Quotient dieses sehr kleinen Weges durch die sehr kurze Zeit die Geschwindigkeit, und die Lage jenes Weges die Richtung der Bewegung. In der Ruhe verschwindet zwar die Geschwin-

digkeit und es geht eine Bewegung, deren Geschwindigkeit $= 0$ ist, in die Ruhe über; allein man kann nicht behaupten, dass in der Ruhe auch die Richtung verschwinde, sondern man muss annehmen, dass alsdann das Verhältniss der Richtung ganz aufhöre. Sobald wir nämlich erklären, dass ein Punkt ruhe, findet nicht einmal die Frage nach der Richtung mehr statt. In der Bewegung sind zwar soviel Umstände vorhanden, welche zu ihrer Erkentniss beitragen, indem man fragen kann: 1) An welchem Orte wird der Punkt nach einer gewissen Zeit stehen bleiben? 2) Welche Linie oder welchen Weg wird er inzwischen zurückgelegt haben? 3) Eine wie grosse Geschwindigkeit wird er zu jeder Zeit haben? 4) Welches wird die Richtung seiner Bewegung sein? Da die Geschwindigkeit und Richtung Begriffe sind, welche man aus der Idee der Bewegung abgeleitet hat, so wird man alle zugleich bestimmen, wenn man nur in jedem einzelnen Falle die erste Frage beantwortet hat. Um dies deutlicher auseinander zu setzen, wollen wir, nach der oben angestellten Eintheilung, drei Arten von Bewegung untersuchen. Zuerst werden wir annehmen, dass ein Punkt sich längs einer geraden Linie bewege; zweitens werden wir den beschriebenen Weg als krumm, jedoch in derselben Ebene befindlich annehmen; drittens wollen wir die Art untersuchen, nach welcher die bei der Bewegung beschriebenen Wege sich nicht in derselben Ebene befinden.

Aufgabe 1.

§. 42. (Figur 2.) Ein Punkt bewegt sich auf einer geraden Linie, man soll seine Bewegung durch Rechnung bestimmen.

Auflösung.

Die ganze Arbeit kommt darauf hinaus, dass man zu jeder Zeit den Ort angebe, an welchem der Punkt sich befindet. Es sei daher AB eine gerade Linie, auf welcher der Punkt fortgeht, man setze den Anfangspunkt in A und nach Verlauf der Zeit t sei der Punkt nach S gelangt; es wird daher $AS = s$ der in der Zeit t durchlaufene Weg sein. Ist nun eine Gleichung zwischen t und s gegeben, mittelst welcher man die eine Grösse aus der andern herleiten kann, so ist alles bekannt, was die Bestimmung der Bewegung betrifft. Stellt man nämlich eine Differentiation an, so wird für das Element der Zeit $= dt$ das in demselben durchlaufene Element des Weges $= ds$

abgeleitet und es wird $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes in S ausdrücken. Es ist nämlich bekannt, dass dieser Bruch eine endliche Grösse darstellt. Setzen wir daher die Geschwindigkeit $= v$, so haben wir die Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

mittelst welcher man für jede gegebene Zeit und an jedem Orte des Weges die Geschwindigkeit angeben kann. Die Richtung der Bewegung wird ferner überall mit der geraden Linie AB übereinstimmen.

Zusatz 1.

§. 43. Ist in den einzelnen Zeitmomenten die Geschwindigkeit des Körpers $= v$ gegeben, also eine Relation zwischen t und v aufgestellt, so wird man hieraus auch die in den einzelnen Zeiten beschriebenen Wege ableiten können. Es wird nämlich aus der Gleichung $ds = vdt$, durch Integration

$$s = \int vdt.$$

Zusatz 2.

§. 44. Kennt man in den einzelnen Punkten des Weges die Geschwindigkeit v, oder ist eine Relation zwischen s und v gegeben; so bestimmt man die Zeit t, in welcher der Weg s zurückgelegt wird, mittelst der Differentialgleichung $dt = \frac{ds}{v}$, woraus durch Integration folgt

$$t = \int \frac{ds}{v}.$$

Zusatz 3.

§. 45. Ist daher die Bewegung gleichförmig, so wird die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ constant $= c$, also $ds = cdt$ und $s = ct$; für $t=0$ muss auch $s = 0$ werden. Wenn umgekehrt die Relation zwischen s und t so beschaffen ist, dass sich daraus $\frac{ds}{dt}$ constant ergibt, so ist die Bewegung eine gleichförmige.

Erläuterung.

§. 46. Wenn wir sagen, unser Punkt sei nach Verlauf der Zeit t in S, so ist diese Rede nur dann zulässig, wenn man von dem Worte s e i alles Verbleiben und Verharren trennt. Im gewöhnlichen Leben pflegt der Ausdruck a n e i n e m O r t e s e i n dasselbe zu bedeuten, als a n e i n e m O r t e v e r b l e i b e n, wor-

aus das alte Sophisma „Wenn ein Körper sich bewegt, so bewegt er sich entweder an dem Orte, wo er ist, oder an dem, wo er nicht ist“ die grösste Beweiskraft gegen die Existenz der Bewegung erlangt. Man kann nämlich keines von beiden behaupten und schliesst daher, dass der Körper sich gar nicht bewegen könne. Das erste kann man nämlich sicher nicht behaupten, wenn an einem Orte, wo er ist dasselbe bedeutet, als an einem Orte, wo er verharret oder ruhet. Wenn man statt des Wortes sein setzte vorübergehen, so würde alle Schwierigkeit aufgehoben werden; denn da, wo ein Körper vorübergeht, bewegt er sich ohne Zweifel. Allein ein solches Wort scheint nicht stark genug zu sein, um zugleich die Existenz anzudeuten, während der Körper oder Punkt in *S* vorübergeht; es scheint aber der Begriff der Existenz, angewandt auf einen beliebigen Ort, eine gewisse Verzögerung zu enthalten, welche der Bewegung durchaus fremd ist. Wenn wir daher nicht durch diese Benennung allein die Bewegung in der Welt ganz aufheben wollen; so müssen wir uns wohl davor hüten, dass wir mit der Redeformel: an einem Orte sein, existiren oder sich befinden kein Bleiben verbinden und in dieser Bedeutung werde ich sie stets benutzen, so dass sie nicht mehr angeben, als an einem Orte vorübergehen, wenn nämlich der Körper sich bewegt. Hieraus haben manche Philosophen, welche diese Unterscheidung vernachlässigten, sich ganz verkehrte Begriffe der Bewegung gebildet; während sie nämlich die Bewegung durch eine aufeinander folgende Existenz des Körpers an verschiedenen Orten erklären, theilen sie demselben zugleich eine gewisse Zögerung an den einzelnen Orten zu, von wo er plötzlich zu dem folgenden übergehe. Wenn sie durch diese Erklärung die Schwierigkeit, vor welcher sie sich bei einer Existenz ohne Verzögeruug an demselben Orte fürchten, vermeiden wollen; so werden sie sich vor jenen plötzlichen Sprüngen noch weit mehr fürchten müssen. Während nämlich ein solcher erfolgt, können sie nicht angeben, wo gerade der Körper existire und wenn für diese Meinung irgend ein Grund vorhanden wäre, würde sie eher zur Ableugnung aller Bewegung beitragen, als Principien dieser Art aufstellen, welche die Natur der Bewegung umstürzen.

Aufgabe 2.

§. 47. (Figur 3.) Ein Punkt bewegt sich auf einer krum-

men Linie, die aber ganz in derselben Ebene liegt; man soll die allgemeine Bestimmung der Bewegung, mittelst je zweier Coordinaten, durch Rechnung ausführen.

Auflösung.

Da wir den Körper, in Bezug auf welchen die Bewegung abgeschätzt wird, als feststehend ansehen, so können wir auch die Ebene, in welcher der durchlaufene Weg liegt, für eine feste halten. In derselben nehmen wir nach Belieben zwei Axen OA und OB an, welche entweder recht- oder schiefwinklig auf einander stehen und wollen auf sie die Bewegung beziehen. Es sei demnach ESF der Weg, welchen der Punkt beschrieben hat und E der Anfangspunkt der Bewegung; die ganze Untersuchung kommt nun darauf hinaus, nach Verlauf einer Zeit t den Ort S auf der Curve anzugeben, wo der Punkt alsdann sein wird. Man setze den in der Zwischenzeit durchlaufenen Weg $ES = s$ und ziehe aus S die, den beiden Axen OA und OB respective parallelen, Linien SY und SX, setze die Coordinaten $OX = SY = x$ und $OY = SX = y$. Kann man nun für die Zeit t die Werthe von x und y angeben, so wird man zugleich den Ort S kennen; ferner wird durch eine Relation zwischen x und y die Natur der Curve ESF ausgedrückt werden. Setzen wir nun den Winkel, welchen beide Axen mit einander bilden, oder $AOB = \zeta$, so haben wir das, dem Element dt der Zeit entsprechende, Element des Weges

$$Ss = ds = \sqrt{dx^2 + 2dx\,dy\cos\zeta + dy^2}$$

und hieraus die Geschwindigkeit in $S = \frac{ds}{dt}$. Zur Bestimmung der Richtung der Bewegung finden wir den Winkel, welchen dieselbe mit der Axe OA bildet und dessen Tangente $= \frac{dy\sin\zeta}{dx + dy\cos\zeta}$ und Sinus $= \frac{dy\sin\zeta}{ds}$. Sucht man aber den Winkel, welchen die Richtung der Bewegung oder Ss mit der andern Axe OB bildet, so ist dessen Tangente $= \frac{dx\sin\zeta}{dy + dx\cos\zeta}$ und Sinus $= \frac{dx\sin\zeta}{ds}$.

Zusatz 1.

§. 48. So wie der Ort S der Curve durch die Coordinaten $OX = x$ und $OY = y$ bestimmt wird, ergibt sich der folgende Ort s aus ihren Elementen dx und dy. Es wird nämlich der Punkt aus S, in der kurzen Zeit dt, längs OA durch den klei-

nen Weg dx und längs OB durch den kleinen Weg dy fortgeführt.

Zusatz 2.

§. 49. Diese zweifache Fortführung durch die kleinen Wege dx und dy zeigt die wahre Fortführung über den kleinen Weg $Ss = ds$ so an, dass sie so wohl seine Grösse als auch seine Richtung ergibt.

Zusatz 3.

§. 50. Wenn aber der sich bewegende Punkt in dem kleinen Zeittheilchen dt die kleinen Wege dx und dy wirklich durchliefe, so würden seine Geschwindigkeiten sein $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$. Denkt man sich diese Geschwindigkeiten, so erhält man hieraus nicht nur die, dem kleinen Wege $Ss = ds$ entsprechende, Geschwindigkeit, sondern auch die Richtung der Bewegung.

Zusatz 4.

§. 51. Setzt man den Winkel beider Axen OA und OB d. h. $AOB = \zeta = 90^\circ$, so wird die Rechnung sehr einfach; indem alsdann durch die Elemente dx und dy der kleine Bogen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ bestimmt und die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Richtung Ss mit der festen Linie OA bildet, $= \frac{dy}{dx}$ wird.

Anmerkung 1.

§. 52. Diese Betrachtung, nach welcher wir uns die Bewegung eines Punktes, während er in dem kleinen Zeittheilchen dt den kleinen Weg $Ss = ds$ durchwandert, in je zwei längs der Richtungen OA und OB zerlegt denken, ist eine durchaus geometrische, indem sie in der Bewegung selbst nichts verändert. Indem wir nun die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ dieser zweifachen Bewegung angeben, erlangen wir den Vortheil, dass wir nicht nur die wahre Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, sondern auch die Richtung der Bewegung kennen lernen, was für die Rechnung meistentheils sehr grossen Nutzen verschaffen wird. Da nämlich Geschwindigkeit und Richtung zwei ihrer Natur nach verschiedene Dinge sind, so werden wir beide auf diese Weise durch zwei Geschwindigkeiten oder Grössen derselben Art kennen lernen. Wir zerlegen aber nur im Geiste die Bewegnng des Punktes, für jedes Zeitelement dt, in je zwei Bewegungen längs gegebener Richtungen und geben die

Geschwindigkeit einer jeden von ihnen an; nicht als ob der Punkt eine zweifache Bewegung hätte, was ungereimt sein würde, sondern weil eine solche Auffassung zur wahren Erkenntniss führt. Wir können uns dieses Hülfsmittels bedienen, wenn anderweitig bereits festgesetzt worden ist, dass die Bewegung des Punkts in derselben Ebene erfolgen soll; ist dies nicht bekannt, so muss man auf je drei feste Axen zurückgehen. Man hat alsdann zweckmässig die gegebene Bewegung in drei, längs dieser Axen gerichtete, Bewegungen zu zerlegen.

Anmerkung 2.

§. 53. Diese Entwickelung der Bewegung, welche in einer Ebene vor sich geht, stützt sich auf die übliche Weise, nach welcher man krumme Linien auf je zwei Axen, denen die Coordinaten parallel gezogen werden, zurückführt. Da aber die Wahl dieser geraden Axen von unserer Willkühr abhängt, so wird man offenbar dieselbe Bewegung auf unendlich vielfache Weise durch Rechnung ausdrücken können. Da sich nun für eine bestimmte Zeit dieselbe Geschwindigkeit und Richtung ergeben muss, so ist die Zerlegung der Bewegung ganz willkürlich. Die Bewegung, womit ein Punkt im Zeittheilchen dt den kleinen Weg $Ss = ds$ durchläuft, kann man, wenigstens im Geiste, auf vielfache Weise in je zwei Bewegungen zerlegen, je nachdem man die einen oder die anderen Linien als Axen annimmt. Es findet aber stets darin Uebereinstimmung statt, dass je zwei Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$, wie verschieden sie auch sein mögen, zusammen genommen immer dieselbe wahre Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ und dieselbe Richtung oder Lage der in S gezogenen Tangente ergeben werden. Diese unendliche Mannichfaltigkeit kann uns nicht wundern, weil sie durch die Geometrie eingeführt wird; indessen kommt in jedem einzelnen Falle sehr viel darauf an, nach welcher Weise man jene Axen auswählt, damit die Rechnung möglichst erleichtert werde.

Aufgabe 3.

§. 54. (Figur 4.) Der vom Punkt beschriebene Weg liegt nicht in derselben Ebene, man soll die Bewegung mittelst je drei Coordinaten allgemein durch Rechnung bestimmen.

Auflösung.

Der Körper, in Bezug auf welchen wir die Bewegung ab-

schätzen und welchen wir als feststehend annehmen, wird je drei feste Richtungen ergeben, welche sich in der Länge, Breite und Tiefe erstrecken. Ihre Auswahl ist unserer Willkühr überlassen und wir nehmen sie, zur Erleichterung der Rechnung, auf einander normal an. Es seien daher OA, OB und OC diese drei Axen, von denen die zwei ersten in der Ebene des Papiers liegen mögen, die dritte OC aber als auf dieser Ebene senkrecht stehend gedacht wird. Es habe der sich bewegende Punkt die Linie ESF beschrieben, welche beliebig ausserhalb der Ebene des Papiers liegt und er sei auf derselben während der Zeit t von E bis S gelangt. Wir fällen aus dem letztern Punkte auf die Ebene AOB das Perpendikel SY und aus Y auf die Axe OA die normale YX. Man setze die rechtwinkligen Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YS = z$, sie werden den drei Axen respective parallel sein und es wird durch zwei Gleichungen zwischen ihnen die Natur der Curve ESF bestimmt; so dass man, wenn man ihre Werthe zu einer Zeit t angeben kann, dadurch den Ort S bestimmt, an welchem der sich bewegende Punkt sich alsdann befindet. Setzt man nun den in der Zeit t durchlaufenen Weg $ES = s$, so schliesst man aus den, dem kleinen Zeittheilchen dt zukommenden Differentialen dx, dy und dz auf das Element des Weges $Ss = ds$, welches in demselben Zeittheilchen durchlaufen wird. Wir haben nämlich

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

und dann die Geschwindigkeit in $S = \frac{ds}{dt}$. Was aber die Richtung des Weges Ss betrifft; so wird sie auf dieselbe Weise bestimmt. Verlängert man nämlich die gerade Linie yY, bis sie in T mit der geraden Linie AO zusammentrifft, so wird

$$XT = \frac{ydx}{dy}$$

und wenn man sich eine Ebene denkt, welche über YT normal auf der Ebene AOB steht; so wird sich in derselben das Element Ss befinden. Dieses wird verlängert mit der Linie YT einen Winkel bilden, dessen Tangente $= \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ und dessen Sinus $= \frac{dz}{ds}$ ist. Ferner wird die Richtung Ss mit der, durch S parallel mit OA gezogenen geraden Linie einen Winkel bilden, dessen Cosinus $= \frac{dx}{ds}$ und sie wird mit den, durch S parallel mit OB und OC gezogenen, geraden

Linien Winkel bilden, deren Cosinus respective $= \frac{dy}{ds}$ und $= \frac{dz}{ds}$ ist. Hierin ist die ganze Bestimmung der Bewegung enthalten.

Zusatz 1.

§. 55. Man betrachtet hier also das Element des Weges $= Ss$ wie die Diagonale eines Parallelepipedums, dessen Seiten dx, dy und dz respective den drei Axen OA, OB und OC parallel sind. Bildet man aus demselben ein rechtwinkliges Parallelepipedum, so wird seine Diagonale $Ss = ds$ so bestimmt, dass man hat $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Zusatz 2.

§. 56. Man pflegt sich vorzustellen, dass, während der sich bewegende Punkt im Zeittheilchen dt das Element Ss durchläuft, er inzwischen längs der drei Richtungen, welche parallel OA, OB und OC sind, respective die kleinen Wege dx, dy und dz zurücklege.

Zusatz 3.

§. 57. Betrachtet man diese dreifache Fortrückung, wenn man sie sich auch nur im Geiste vorstellt, als eine wahre Bewegung; so bezeichnen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ respective die Geschwindigkeiten längs der Richtungen OA, OB und OC.

Zusatz 4.

§. 58. Aus diesen drei bloss gedachten Geschwindigkeiten leitet man nicht nur die wahre Geschwindigkeit in $S = \frac{ds}{dt}$, sondern auch die Richtung der Bewegung ab; durch ihre Integrale wird also die ganze Bewegung bestimmt.

Anmerkung 1.

§. 59. Der kürzern Rechnung wegen habe ich hier die drei Axen OA, OB nnd OC unter sich normal angenommen, sie hätten aber auch, wie im vorigen Falle, beliebig schief angenommen werden können; allein die Natur schiefwinkliger Körper pflegt den meisten nicht so geläufig zu sein, dass man ihre Eigenschaften hier, als aus den Elementen hinreichend bekannt hätte voraus setzen können. Wir werden vielmehr, weil wir hauptsächlich eine weitläufige Rechnung zu vermeiden haben, mit Recht immer rechtwinklige Axen anwenden. Wären sie indessen schiefwinklig und setzte man $\angle AOB = \zeta$, AOC

$= \eta$ und $BOC = \theta$, und die, erstern parallelen, Coordinaten $=$ x, y und z; so würde man durch die etwas unbequeme Formel
$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dx\,dy\cos\zeta + 2dx\,dz\cos\eta + 2dy\,dz\cos\theta}$
das Element Ss und seine Lage oder die Richtung der Bewegung zu unbequem ausdrücken.

Anmerkung 2.

§. 60. Da die Lage der drei, wenn auch auf einander normalen, Axen OA, OB und OC auf unzählige Weise verändert werden kann, so wird man auch die Bewegung auf unendlich vielfache Weise darstellen können. Selbst wenn ein Punkt sich auf einer geraden Linie, oder einer ganz in derselben Ebene liegenden Curve bewegt, kann man ebenfalls die Bewegung durch je drei derartige Axen darstellen, indessen ist doch die Anwendung der obigen einfachern Methoden vorzuziehen. Man ersieht hieraus, dass man dieselbe Bewegung auf vielfache Weise in je drei zerlegen kann und indem man jeder von diesen die ihr zugehörige Geschwindigkeit beilegt, wird man aus ihrer Verbindung nicht nur die wahre Geschwindigkeit des Punktes, sondern auch die Richtung der Bewegung herleiten. Diess wird den grössten Nutzen in der Rechnung verschaffen, weil wir auf diese Weise vieler sehr unangenehmer Untersuchungen in Betreff der Krümmung des beschriebenen Weges und der doppelten Krümmung, wenn die Bewegung nicht in derselben Ebene vor sich geht, überhoben werden. Diese drei Geschwindigkeiten, welche wir dem sich bewegenden Punkte beigelegt denken, werden die ganze Rechnung erleichtern und da ich mich dieses Hülfsmittels in den frühern Theilen der Mechanik nicht bedient habe, bin ich dort auf sehr verwickelte Rechnungen verfallen. Da nun diese Zerlegung der Bewegung, wenn sie auch nur im Geiste geschieht, von so grosser Wichtigkeit ist; so wird es der Mühe werth sein, sie durch eine besondere Erklärung festzustellen.

Erklärung 8.

§. 61. Man sagt, eine Bewegung wird zerlegt, wenn man den kleinen in einem Zeitelemente durchlaufenen Weg als die Diagonale eines Parallelogramms oder eines Parallelepipedums betrachtet, dessen Seiten gegebene Richtungen haben und indem man dem Punkte eine zwei- oder dreifache Bewegung längs dieser Seiten, jede mit der ihr zukommenden Geschwindigkeit zuschreibt.

Anmerkung 1.

§. 62. Dasjenige, was wir hier über eine gleichsam elementare Bewegung durch einen unendlich kleinen Weg sagen, lässt sich auch auf eine endliche Bewegung übertragen, wenn diese nur gleichförmig und geradlinig ist. Dort sind wir an eine elementare Bewegung gebunden, weil man jedes Element einer Curve als eine gerade Linie und die Bewegung durch dasselbe als gleichförmig ansehen kann. Damit man das Gesagte besser einsehe, wollen wir es an einer gleichförmigen und geradlinigen endlichen Bewegung erläutern, von welcher man leicht zur elementaren Bewegung übergehen kann.

Erläuterung 1.

§. 63. (Figur 7.) Wir setzen voraus, dass ein Punkt in der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung die gerade Linie SV durchlaufe, so dass seine Geschwindigkeit $= \frac{SV}{t}$ ist und denken uns um SV ein beliebiges Parallelogramm $SAVB$ beschrieben, dessen Diagonale SV ist. Alsdann können wir uns die Bewegung so längs der Seiten SA und SB zerlegt denken, dass die Geschwindigkeit der erstern $= \frac{SA}{t}$, die der letztern $= \frac{SB}{t}$ und beide gleichförmig werden. Diese zweifache Bewegung mit diesen Seitengeschwindigkeiten wird nicht nur die wahre Geschwindigkeit $\frac{SV}{t}$, sondern auch die wahre Richtung der Bewegung ergeben; es wird daher zur Kenntniss dieser Bewegung hinreichend sein, wenn man jene zwei Seitengeschwindigkeiten bestimmt hat. Man darf aber nicht glauben, dass sich eine derartige Zerlegung auf einen mechanischen Grund stütze, vielmehr ist es ausgemacht, dass mehr als Eine Bewegung nicht zugleich in demselben Punkte stattfinden kann. Sie ist vielmehr anzusehen als aus einer rein geometrischen Auffassung hervorgegangen, als der Natur der Bewegung durchaus fremd und nur zur Erleichterung der Rechnung in die Mechanik eingeführt.

Erläuterung 2.

§. 64. (Figur 5.) Es durchlaufe ein beweglicher Punkt in der Zeit t gleichförmig die gerade Linie OV, welche Bewegung wir nach je drei Richtungen zerlegen sollen. Man ziehe den letztern parallel aus beiden Endpunkten O und V die geraden Linien OA, OB, OC und VP, VQ, VR so weit, bis

jede die Ebene durchschneidet, welche man sich am andern Endpunkt durch die zwei übrigen Richtungen gelegt denkt. Auf diese Weise wird ein Parallelepipedum entstehen, dessen Diagonale OV ist und man wird so die Bewegung durch OV, deren Geschwindigkeit $= \frac{OV}{t}$ ist, im Geiste in die drei Bewegungen längs OA, OB und OC zerlegen, deren Geschwindigkeiten respective $\frac{OA}{t}$, $\frac{OB}{t}$ und $\frac{OC}{t}$ sind. Mittelst dieser drei Geschwindigkeiten erhält man nicht nur die wahre längs der Diagonale OV, sondern auch die Richtung der Bewegung in Bezug auf die drei Axen. Auf dieselbe Weise kann man, wenn OV das in der kleinen Zeit dt durchlaufene Element einer beliebigen Curve ist, die Zerlegung in je drei, nach drei beliebigen Axen gerichtete, Geschwindigkeiten anstellen.

Anmerkung 2.

§. 65. Bei diesen Bestimmungen der Bewegung habe ich die in der Geometrie gebräuchliche Methode angewandt, wonach man die Natur krummer Linien durch je zwei oder drei Coordinaten ausdrückt; durch jene nämlich, wenn die Curve ganz in derselben Ebene liegt, durch diese, wenn sie nicht in derselben Ebene enthalten sein kann. So wie diese Methode sich zuerst dargestellt hat, hat sie uns zu jener ausgezeichneten Zerlegung der Bewegung längs zwei oder drei gegebener Richtungen geführt, welche in der ganzen Mechanik vom weitesten Gebrauch ist, indem die Kenntniss der Seitengeschwindigkeiten zugleich die Richtung und Neigung enthält, deren Betrachtung sonst für die Rechnung nicht wenig störend zu sein pflegt. Da aber oft in der Geometrie krumme Linien, nicht ohne eine bedeutende Abkürzung der Rechnung, auf irgend einen festen Punkt bezogen werden; so wird es angemessen sein, auch die Entwickelung der Bewegung auf dieselbe Weise darzustellen und zwar nicht allein, wenn die Bewegung in derselben Ebene vor sich geht, sondern auch wenn sie aus derselben heraus tritt. Dieses Verfahren pflegen die Astronomen mit Glück anzuwenden, indem sie die Bewegung der Planeten in Bezug auf irgend einen Punkt durch um denselben beschriebene Winkel und die Abstände von ihm bestimmen; dabei betrachten sie, wenn die Bewegung nicht in derselben Ebene erfolgt, ausserdem die Knotenlinie und die Neigung der Bahn gegen eine bestimmte Ebene. Es wird daher nicht ausserhalb unseres

Gegenstandes liegen, auch diese Darstellungsweise der Bewegung kurz im allgemeinen zu erklären.

Aufgabe 4.

§. 66. (Figur 8.) Eine Bewegung erfolgt in derselben Ebene; man soll die allgemeine Bestimmung derselben durch Winkel, welche um einen gewissen festen Punkt gezogen werden, beschreiben.

Auflösung.

Es sei AS der Weg, welchen ein Punkt in derselben Ebene beschreibt, man nehme in derselben den festen Punkt O an, welcher zur Bestimmung der Bewegung am meisten geeignet erscheint und ziehe nach dem Anfangspunkt A der letztern die gerade Linie OA; alsdann wird man die Bewegung vollständig kennen, wenn man nach Verlauf einer jeden Zeit t, wo der Punkt sich in S befindet, den Winkel $AOS = \varphi$ und den Abstand $OS = z$ bestimmen kann. Da nämlich hierdurch die Natur der Curve bestimmt wird, so werden die Differentiale so wohl die Geschwindigkeit, als auch die Richtung der Bewegung bestimmen. Ist nämlich der Punkt in der kleinen Zeit dt von S nach s gelangt, in welcher der Winkel AOS das Increment $SOs = d\varphi$ und der Abstand OS das Increment $sp = dz$ erhalten hat; so wird für den Radius $= 1$

$$Sp = zd\varphi \ , \ Ss = \sqrt{dz^2 + z^2\, d\varphi^2}$$

und daher die Geschwindigkeit in S

$$= \frac{\sqrt{dz^2 + z^2\, d\varphi^2}}{dt}.$$

Die Richtung wird durch den Winkel ASO oder Ssp bekannt, wo
$$\operatorname{tg} Ssp = \frac{zd\varphi}{dz}.$$

Zusatz 1.

§. 67. Da der sich bewegende Punkt in der Zeit t um O den Winkel AOS beschrieben hat und von demselben Punkte um $OS = z$ entfernt ist; so kann man seine Bewegung als eine zweifache ansehen, eine Winkelbewegung um den festen Punkt O und eine geradlinige, vermöge welcher der Punkt sich entweder von O entfernt oder ihm nähert.

Zusatz 2.

§. 68. Da in dem kleinen Zeittheilchen dt der Winkel $AOS = \varphi$ um das Element $d\varphi$ zunimmt, so wird der Bruch

$\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit ausdrücken und weil ferner dz die Zunahme des Abstandes $OS = z$ ist, so wird der Bruch $\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeit des Zurückweichens vom Punkt O darstellen.

Zusatz 3.

§. 69. Sind aber beide Geschwindigkeiten, die der Winkelbewegung und die des Zurüchweichens bekannt, so wird man hierdurch nicht nur die wahre Bewegung des Punktes, sondern auch ihre Richtung und ausserdem die beschriebene Curve AS selbst bestimmen können.

Aufgabe 5.

§. 70. (Figur 9.) Ein Punkt bewegt sich nicht in derselben Ebene; man soll seine Bewegung sowohl in Bezug auf eine bestimmte Ebene, als auf einen in dieser gegebenen festen Punkt durch Winkel ausdrücken.

Auflösung.

Es stelle das Papier die Ebene dar, auf welche man die Bewegung beziehen soll und in derselben sei O jener feste Punkt, welcher gleichsam als Mittelpunkt angesehen wird. Der Punkt bewege sich irgendwie ausserhalb dieser Ebene auf der Linie ES und sei nach Verlauf der Zeit t bis S gelangt; von diesem fälle man auf die Ebene das Perpendikel SM und ziehe die geraden Linien MO und SO. Es sei OA eine in dieser Ebene angenommene feste Richtung, alsdann ist es klar, dass zu einer gegebenen Zeit t der Ort des Punktes S bestimmt sein wird, wenn man 1) den Winkel $AOM = \varphi$, 2) den Winkel $MOS = \psi$ und 3) den Abstand $OM = z$ angeben kann. Um dies zu erleichtern, ziehe man aus S die Tangente an der Curve, welche die feste Ebene in T schneide und wenn man die Linie OT zieht, so ist diese die Durchschnittslinie der Ebene, in welcher der Punkt sich jetzt bewegt, mit der angenommenen Ebene. Man pflegt OT die Knotenlinie zu nennen und es sei zur Bestimmung derselben um diese Zeit $\angle AOT = \omega$ und die Neigung der Ebene OST gegen die angenommene feste Ebene $= \varrho$. Sind diese beiden Winkel ω und ϱ ausser dem Winkel $AOM = \varphi$ und dem Abstande $OM = z$ für eine gegebene Zeit bekannt, so wird man den Ort des Punktes S, d. h. den Winkel $MOS = \psi$ und den Abstand $OS = \frac{z}{\cos\psi}$

bequem angeben können. Zu diesem Ende fälle man von M auf die gerade Linie OT die Normale MN und zugleich ziehe man die gerade Linie SN. Da nun $\angle TOM = \varphi - \omega$, so hat man $MN = z \sin(\varphi - \omega)$ und $ON = z \cos(\varphi - \omega)$.

Ferner hat man, weil $\angle MNS = \varrho$ ist,

$$MS = z \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho \text{ und } NS = \frac{z \sin(\varphi - \omega)}{\cos \varrho}$$

also $$OS = \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{\sin(\varphi - \omega)^2 + \cos(\varphi - \omega)^2 \cos \varrho^2},$$

$$= \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{1 - \cos(\varphi - \omega)^2 \sin \varrho^2}.$$

Nun bestimmt man den Winkel $MOS = \psi$ so, dass

$$tg\psi = \frac{MS}{OM} = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho$$

wird. Da nun der Winkel $AOT = \omega$ und die Neigung $= \varrho$ eben so sehr dem folgenden Punkte s, in welchem der Punkt nach Verlauf des Zeittheilchens dt sich befindet, als dem Punkte S angehört; so darf man bei der Differentiation des Winkels ψ die Elemente von α und ϱ als constant ansehen. Hierdurch erhalten wir $$\frac{d\psi}{\cos \psi^2} = d\varphi \cos(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho,$$

allein nach den Lehren der Differentialrechnung ist auch

$$\frac{d\psi}{\cos \psi^2} = (d\varphi - d\omega) \cos(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho + \frac{d\varrho}{\cos \varrho^2} \sin(\varphi - \omega)$$

und wir erhalten daher mittelst beider Gleichungen

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho} = d.\log(\operatorname{tg} \varrho).$$

Diese Gleichung enthält ein Verhältniss zwischen dem augenbliklichen Fortrücken der Knotenlinie und der Veränderung der Neigung. Hat man den Winkel $MOS = \psi$ mittelst der Gleichung $\operatorname{tg} \psi = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho$ gefunden, so erhält man den Abstand $OS = \frac{z}{\cos \psi}$.

Zusatz 1.

§. 71. Da die Winkel ω u. ϱ, der gefundenen Gleichung $\frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho}$ entsprechend, von einander abhängen, so ist es klar, dass, wenn der Winkel $AOT = \omega$ derselbe bleibt, auch die Neigung ϱ stets unverändert bleiben wird; alsdann

erfolgt also die Bewegung des Punktes in derselben Ebene. Ein Criterium für die Bewegung, welche in derselben, durch einen festen Punkt O gehenden, Ebene erfolgt, besteht also darin, dass die Winkel ω und ϱ constant sind.

Zusatz 2.

§. 72. Während der bewegliche Punkt durch die angenommene feste Ebene geht, befindet er sich in der Knotenlinie OT, es wird also
$$\operatorname{tg}(\varphi - \omega) = 0$$
und daher, wie auch die Neigung ϱ sich verändern mag,
$$d\omega = 0;$$
es wird also die Knotenlinie ruhen.

Zusatz 3.

§. 73. Ist aber $\angle TOM = \varphi - \omega = 90^0$, also $\operatorname{tg}(\varphi - \omega) = \infty$, so wird, wie auch immer die Knotenlinie sich bewegen mag,
$$d\varrho = 0,$$
oder es wird sich die Neigung während des Zeittheilchens dt nicht ändern.

Anmerkung.

§. 74. Wenn wir auf diese Weise das Element des Weges Ss ausdrücken und dadurch die Geschwindigkeit bestimmen wollten, so würde die Formel zu verwickelt werden, was auch bei der Bestimmung der Richtung der Fall ist. Die Rechnung kann auf eine andere Weise angestellt werden, wodurch dieser Unbequemlichkeit abgeholfen wird. Man suche nämlich für eine gegebene Zeit die Lage der Knotenlinie OT oder den Winkel $AOT = \omega$ und die Neigung $MNS = \varrho$, ferner in der Ebene TOS, in welcher man nun den Punkt sich bewegend denkt, den Winkel $TOS = \sigma$ und zugleich den Abstand $OS = v$. Unter diesen Voraussetzungen haben wir
$$ON = v\cos\sigma,\quad SN = v\sin\sigma,\quad SM = v\sin\sigma\sin\varrho$$
$$\text{und } MN = v\sin\sigma\cos\varrho.$$

Es ergibt sich nun der Winkel $SOM = \psi$ aus der Gleichung
$$\sin\psi = \sin\sigma\,\sin\varrho.$$

Weil ferner $\operatorname{tg} TOM = \operatorname{tg}\sigma\cos\varrho$ ist und vorher der Winkel $TOM = \varphi - \omega$ war, so werden die Differentiale $d\omega$ und $d\varrho$ so von einander abhängig sein, dass wir haben
$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg}\sigma\cos\varrho} = \frac{d\varrho}{\sin\varrho\cos\varrho} \text{ (§. 70.) oder } d\omega = \frac{d\varrho.\operatorname{tg}\sigma}{\sin\varrho}.$$

Hierauf wird das Element des Weges, $Ss = \sqrt{dv^2 + v^2\,d\sigma^2}$ und die Geschwindigkeit $= \frac{1}{dt}\sqrt{dv^2 + v^2\,d\sigma^2}$. Die Richtung der Bewegung Ss in der Ebene TOS ist so gegen die gerade Linie OS geneigt, dass

$$\operatorname{tg} OST = \frac{v\,d\sigma}{dv}$$

wird. In der Astronomie, wo diese Entwickelung sehr häufig in Anwendung kommt, pflegt man den Winkel TOS das Argument der Breite und den Winkel SOM die Breite zu nennen. Wenn man ferner den durch die Gleichung $\operatorname{tg} TOM = \operatorname{tg}\sigma \cos\varrho$ bestimmten Winkel TOM zur Länge des Knotens $AOT = \omega$ addirt, so wird die Summe oder der Winkel AOM die Länge genannt.

Kapitel II.

Von den innern Principien der Bewegung.

Erklärung 9.

§. 75. Die innern Principien der Bewegung umfassen alles dasjenige, was in den Körpern selbst sich befindet und worin der Grund ihrer Ruhe oder ihrer Bewegung zu suchen ist. Ausgeschlossen werden hierbei alle äussern Ursachen, welche irgend etwas zu ihrer Bewegung oder Ruhe beitragen können.

Erläuterung 1.

§. 76. Da ich im vorigen Kapitel eine Verfahrungsart erklärt habe, nach welcher man die im allgemeinen betrachtete Bewegung in Rechnung ziehen kann, so will ich jetzt nach ihren Ursachen forschen. Mag nämlich der Körper ruhen oder sich bewegen, mag er in Ruhe verharren oder eine Bewegung annehmen und dieselbe auf irgend eine Weise fortsetzen; so müssen diese Erscheinungen nothwendig aus bestimmten Ursachen entspringen. Was nämlich im Körper das Verhältniss der Bewegung oder Ruhe betrifft, so kann man auf keine Weise zugeben, dass etwas hierin ohne Grund und zufällig geschehe. Was aber auch die Ursache hiervon sein mag, so muss sie entweder sich nothwendig in dem Körper, wovon die Rede ist, befinden, oder man muss sie ausserhalb desselben suchen. Hieraus entspringen zwei Arten von Principien, von denen ich jene innere, diese aber äussere nennen werde. Auf die innern beziehe ich alles das, was in den Körpern selbst sich befindet und worin die Ursache der Bewegung oder Ruhe enthalten ist; alles dasjenige aber, was von aussen her auf den Körper wirkt und seinen Zustand der Bewegung oder Ruhe afficirt, ist auf die äussern Principien der Bewegung zu beziehen.

Da aber in der Welt alle Körper nach irgend einer Richtung mit andern in Berührung stehen und sie auf's engste mit einander verbunden sind, so wird man in dieser Verbindung dasjenige schwer von einander sondern können, was äussern und innern Principien zugetheilt werden muss. Damit wir nun bei dieser Untersuchung nicht in Verwirrung gerathen, müssen wir, wenigstens im Geiste, alle umgebenden Körper fortschaffen; alsdann wird derjenige, von welchem die Rede ist, gleichsam als ein vereinzelter übrig bleiben. Wie ein solcher Körper, mag er sich nun in Ruhe oder Bewegung befinden, sich verhalten wird, muss man zu erforschen suchen und wird hieraus die innern Principien der Bewegung erkennen, welche sorgfältig von den äussern zu unterscheiden sind.

Erläuterung 2.

§. 77. Während ich aber einen auf diese Weise vereinzelten und ausser aller Verbindung mit andern Körpern stehenden, also gleichsam einzig in der Welt existirenden Körper betrachte, werden manche Philosophen sogleich ausrufen, diese Hypothese enthalte in sich einen Widerspruch; da alle Körper in der Welt so eng mit einander verbunden seien, dass, wenn man einen fortnehme, der ganze Bau zerstört werde. Allein es handelt sich hier gar nicht um die Fortnahme irgend eines Körpers aus der Welt, sondern auf welche Weise auch ein Körper durch die Verbindung mit andern afficirt werden mag; so wird doch selbst ein Philosoph nicht verhindert werden zu fragen, was mit jenem Körper geschehen würde, wenn die übrigen gar nicht auf ihn einwirkten. Er soll alsdann nicht bestätigen, dass diess wirklich geschehen wird, sondern nur lernen, was von dem wirklich Geschehenden äussern Ursachen zugeschrieben werden muss. Solcher Abstractionen bedienen sich die Philosophen beständig, denn wenn sie dieselben untersagen wollten, würde gar kein Zugang zur Erkentniss der Wahrheit übrig bleiben. Ist es aber erlaubt, einen Körper so zu betrachten, als ob er durch andere gar nicht afficirt würde, so wird sich die Sache eben so verhalten, als wenn die andern gar nicht vorhanden wären. Wozu ist es daher nöthig, alle übrigen Körper ausser demjenigen, wovon die Rede ist, als existirend anzusehen, da sie durchaus nicht auf ihn einwirken? Nach dieser Erwägung kann durchaus nichts im Wege stehen, einen Körper als ganz vereinzelt anzusehen, gleichsam als wenn alle übrigen

Körper aus der Welt fortgenommen wären. Sollte diese Hypothese aber etwa jemanden verletzen, so möge dieser alle Körper übrig lassen, uns jedoch die Annahme gestatten, dass von ihnen keine Wirkung auf den Körper, welchen wir zu betrachten uns vorgenommen haben, übergehe.

Grundsatz 1.

§. 78. Jeder Körper befindet sich, auch ohne Beziehung auf andere Körper, entweder in Ruhe oder in Bewegung, d. h. er ruhet oder bewegt sich absolut.

Erläuterung 1.

§. 79. Bis jetzt haben wir in Folge der sinnlichen Wahrnehmung keine andere Bewegung oder Ruhe anerkannt, als in Bezug auf andere Körper, wesshalb wir beide, die Ruhe und Bewegung respective genannt haben. Wenn wir aber jetzt alle Körper ausser dem einen in Gedanken aufheben, so fällt auch die Beziehung auf jene fort, durch welche wir bis jetzt die Ruhe oder Bewegung beurtheilt haben. Man muss daher jetzt zuerst fragen, ob unser Urtheil über Bewegung und Ruhe des Körpers noch stattfinden könne, oder nicht? Können wir nämlich dieses Urtheil nicht anderswo her, als aus der Vergleichung der Lage des vorausgesetzten Körpers mit andern erlangen; so wird, nachdem diese entfernt sind, nothwendig auch unser Urtheil aufgehoben werden. Wenn wir aber die Ruhe oder Bewegung irgend eines Körpers nur aus seiner Beziehung auf andere erkennen, so darf man hieraus noch nicht schliessen, dass diese Dinge an sich nichts weiter als eine rein im Geiste angestellte Relation seien und dass in den Körpern selbst nichts enthalten sei, was unsern Ideen von der Ruhe und Bewegung entspricht. Auch die Grösse eines Körpers können wir nicht anders als durch Vergleichung mit andern erkennen, allein wenn die Gegenstände fortgenommen werden, mit welchen wir die Vergleichung aufgestellt haben, so bleibt doch im Körper gleichsam ein Fundament seiner Grösse übrig. Man müsste nämlich zugeben, dass eine wirkliche Aenderung in ihm vorgehe, wenn er sich entweder zu einem grössern ausdehnen oder in einen kleinern zusammenziehen sollte. Eben so würde man, wenn nur ein einziger Körper existirte, behaupten müssen, dass derselbe entweder ruhe oder sich bewege, da man eben so wenig beides zugleich, als weder das eine noch das andere aufstellen kann. Hieraus schliesse ich,

dass Bewegung und Ruhe nicht etwas Ideales sei, was allein aus der Vergleichung hervorgegangen ist, so dass in den Körpern nichts ihnen entsprechendes enthalten sei; sondern dass man auch in Betreff eines ganz vereinzelten Körpers fragen kann, ob er sich bewege oder ruhe. Hierbei fürchte ich mich am wenigsten vor den Philosophen, welche alles auf Relationen zurükführen, da sie der Bewegung so viel beilegen, dass sie in der bewegenden Kraft selbst eine Substanz anerkennen.

Erläuterung 2.

§. 80. Da also auch in Betreff eines einzigen Körpers, ohne Rücksicht auf andere oder wenn diese selbst vernichtet sind, mit Recht gefragt werden kann, ob er ruhe oder sich bewege; so wird man eines von beiden nothwendig zugeben müssen. Wie aber diese Ruhe oder diese Bewegung beschaffen sein wird, können wir, da die Aenderung der Lage in Beziehung auf andere Körper hier nicht stattfindet, uns nicht einmal denken; wenn wir nicht einen absoluten Raum annehmen, in welchem unser Körper einen gewissen Ort einnehmen wird und von wo er nach andern Orten übergehen kann. Da nämlich nach denselben Philosophen, welche gegen das Dasein eines absoluten Raumes auf's höchste streiten, am meisten darauf ankommt, ob irgend ein Körper sich bewege oder ruhe; so mögen sie ohne Rücksicht auf andere Körper angeben, worin sonst der Unterschied bestehe. Werden sie etwa sagen, derjenige Körper bewege sich wirklich, welcher seine Lage in Bezug auf die ihm benachbarten beständig ändert? allein die Bewegung kann in diesen stattfinden, während jener ruhet. Wird man eine Vergleichung mit den weiter entfernten Körpern anstellen müssen? mit welchem von diesen dann zuerst? und warum mit dem einen eher als mit dem andern? Sie werden zuletzt antworten: mit solchen, welche an sich ruhen. Alsdann frage ich aber weiter, auf welche Weise wir an sich ruhende Körper erkennen können und was es heisst, an sich ruhen, wenn man nämlich nicht mehr zu der Lage in Bezug auf andere Körper seine Zuflucht nehmen darf. Sie werden endlich gezwungen zu gestehen, dass diejenigen Körper an sich ruhen, welche an demselben Orte des Raumes verharren und da aus diesem die Betrachtung anderer Körper ganz entfernt ist, gelangen sie zu dem absoluten Raume, in Bezug auf welchen die Körper ruhen oder sich bewegen, welche absolut ruhen oder sich bewegen sollen.

Anmerkung.

§. 81. Derjenige, welcher den absoluten Raum ableugnen wollte, würde in die grösste Verlegenheit gerathen. Da er nämlich die absolute Ruhe und Bewegung als leere Worte ohne Sinn verwerfen muss, so wird er nicht nur die Gesetze der Bewegung, welche sich auf dieses Princip stützen, verwerfen, sondern auch zugeben müssen, dass es gar keine Gesetze der Bewegung geben kann. Denn wenn die Frage, welche uns hierher gebracht hat: was in einem ausser Verbindung mit den übrigen gesetzten Körper vorgehen werde? an sich absurd ist; so werden auch die Wirkungen, welche andere Körper in ihm hervorbringen können, an sich ungewiss und unbestimmbar sein und man wird behaupten müssen, dass sich alles von ungefähr und ohne Grund ereigne. Wollte er aber diesem entgehen, so würde er alle Bewegung leugnen müssen, bei welcher Meinung er jedoch, wenn auch alle gegen sie anzuführenden Gründe glücklich widerlegt wären, sich keineswegs beruhigen könnte; da er nicht einmal zu sagen vermöchte, was die von ihm in der ganzen Welt angenommene Ruhe denn sei. Es scheint aber der Umstand, dass wir gegen so offenbare Ungereimtheiten streiten müssen, das festeste Fundament unserer Meinung zu sein.

Grundsatz 2.

§. 82. Ein absolut ruhender Körper wird, wenn er keiner Einwirkung von aussen unterworfen wird, stets in Ruhe verharren.

Erläuterung.

§. 83. Man pflegt diesen Grundsatz in Betreff jedes beliebigen Körpers auszusprechen und er scheint von selbst so einleuchtend zu sein, dass er keines Beweises bedarf. Damit man aber seine Kraft noch deutlicher einsehe, betrachte man nur einen Punkt oder ein Element eines Körpers; befindet sich dieses einmal in absoluter Ruhe, so muss es beständig in derselben verharren. Da nämlich in demselben kein Grund vorhanden ist, warum es eher nach der einen, als nach allen andern Richtungen sich zu bewegen anfangen sollte und da jede äussere Ursache der Bewegung aufgehoben wird; so wird es nach keiner Richtung eine Bewegung beginnen können. Diese Wahrheit stützt sich daher zwar auf das Princip des zureichenden Grundes, indessen muss man doch in dem Punkte oder körperlichen Elemente selbst eine Ursache des Verharrens in Ruhe anerkennen, so dass man diese Wahrheit für eine noth-

wendige halten muss. Was aber von jedem beliebigen Punkte erwiesen worden ist, gilt auch nothwendig von allen zusammen genommen und daher auch von jedem Körper. Wenn nämlich seine einzelnen Elemente ruhen und in Ruhe verharren, so wird niemand daran zweifeln können, dass auch der ganze Körper ruhen werde. Inzwischen kann in Betreff eines derartigen Körpers ein Zweifel entstehen, ob seine Theile, wenn sie auch ruhen, doch nicht vielleicht wechselseitig auf einander einwirken und eine Bewegung hervorbringen. Allein wenn man diess auch zugibt, so geht daraus nichts hervor, was dem Grundsatze widerspräche, so lange wir nicht nur den ganzen Körper, sondern auch seine einzelnen Theile von jeder äussern Einwirkung befreien. Uns ist es genügend, den Grundsatz in diesem Sinne zugelassen zu sehen, dass wenigstens alle sich in Ruhe befindenden kleinsten Theilchen, so weit sie nicht auf einander wirken, in Ruhe verharren.

Anmerkung 1.

§. 84. Dieses Gesetz, welches in Betreff der absoluten Ruhe angenommen worden ist, kann keinesweges auf die respective Ruhe ausgedehnt werden. Wenn nämlich der Körper, in Bezug auf welchen ein kleines Körperchen sich in Ruhe befand, plötzlich angestossen wird, so wird auch dieses in Bezug auf jenen nicht mehr in Ruhe bleiben. Man denke sich eine Kugel, welche auf einem Tische in einem gleichförmig fortschreitenden Schiffe liegt und welche in Bezug auf das letztere allerdings in Ruhe verharren wird. Wenn nun das Schiff auf einen Felsen stösst, so wird diese respective Ruhe plötzlich aufhören und die Kugel in Bezug auf das Schiff eine Bewegung beginnen, wenn auch keine äussere Ursache auf sie eingewirkt hat. Nothwendiger Weise ist daher dieses Gesetz auf die absolute Ruhe beschränkt und da es ein nothwendiges ist, so muss auch die Beziehung der Körper auf den beliebigen Ort, welchen sie einnehmen, eine nothwendige sein. Da das Gesetz der Ruhe das Verharren an demselben Orte andeutet, so darf man hierunter nur den absoluten Ort verstehen, dieser selbst kann aber nicht durch die Reihenfolge zwischen den daneben befindlichen Körpern erklärt werden, weil wir sonst unser Gesetz auf die respective Ruhe ausdehnen würden.

Grundsatz 3.

§. 85. Ein Körper, welcher sich absolut bewegt, wird, wenn man ihn keiner Einwirkung unterwirft, nach derselben Richtung mit gleichförmiger Bewegung fortschreiten.

Erläuterung 1.

§. 86 Dieser Grundsatz ist eigentlich auch von den kleinsten Theilchen der Körper, gleichsam von Punkten zu verstehen und gilt nur von solchen Körpern, welche eine bestimmte Grösse haben, wenn alle ihre Theilchen sich mit gleicher Geschwindigkeit nach derselben Richtung bewegen. Hätten sie nämlich im Anfange entweder ungleiche Geschwindigkeiten oder verschiedene Richtungen angenommen, so würden die einzelnen Theilchen nicht einmal diese Bewegung beibehalten können, weil sie sonst von einander getrennt und der Zusammenhang des Körpers aufgehoben werden würde. Dies ist aber nicht zu befürchten, wenn die Geschwindigkeiten und Richtungen aller Theilchen einander gleich sind, oder wenn der Körper so klein ist, dass in ihm eine derartige Ungleichheit nicht stattfinden kann. Man betrachte daher einen körperlichen Punkt dieser Art als allein existirend und als ob derselbe eine beliebige Bewegung empfangen habe, so dass er mit gegebener Geschwindigkeit und nach gegebener Richtung sich zu bewegen angefangen haben muss; alsdann wird derselbe vermöge dieses Grundsatzes stets sowohl dieselbe Geschwindigkeit, als auch dieselbe Richtung beibehalten. Da wir dies als Grundsatz angenommen haben, so bedarf es keines Beweises, indessen kann man ohne Schwierigkeit einen Grund dafür anführen. Zuerst wird der Körper in der Richtung keine Aenderung erleiden, da kein Grund vorhanden sein kann, warum er eher nach der einen, als nach der andern Seite hin von ihr abweichen sollte; er wird also eben so gewiss dieselbe Richtung beibehalten, wie ein ruhender Körper in Ruhe verharret. Was aber ferner die Geschwindigkeit anbetrifft, so würde sie, wenn sie nicht stets dieselbe bliebe, entweder zu- oder abnehmen müssen und keines von beiden kann man ohne Absurdität behaupten. Wenn sie nämlich zu- oder abnähme, so müsste diess nach einem bestimmten Gesetz geschehen; allein wie dieses Gesetz beschaffen sein wird, kann man sich auf keine Weise vorstellen, da keinem einzelnen vor den übrigen ein so grosses Vorrecht zukommt. Wollte ferner jemand behaupten, die Geschwindigkeit nehme im Verhältniss der Zeiten ab, so würde er hierdurch die Sache noch nicht erklären; er müsste nämlich ausserdem bestimmen, ein wie grosser Theil der Geschwindigkeit in jeder Zeit verloren ginge und was er auch hierfür angeben möchte, so könnte man diess auf keine Weise zulassen, da

es durch keinen Grund unterstützt wird. Dasselbe wird auch von jedem andern Gesetze gelten. Es bleibt demnach nichts anderes übrig, als zuzugeben, dass auch die Geschwindigkeit eben so wie die Richtung stets dieselbe bleibe.

Erläuterung 2.

§. 87. Diesem Grundsatze eben so wie dem vorhergehenden tritt die Meinung derjenigen Philosophen entgegen, welche behaupten, dass alle Körper mit einer gewissen verborgenen Kraft begabt sind, ihren Zustand der Ruhe oder Bewegung beständig zu ändern. Diese Meinung stützt sich aber auf gar keinen Grund und wird eben dadurch gänzlich umgeworfen, dass sie mit dem Grundsatze im Widerspruch steht. Allein dieser Grundsatz scheint beim ersten Anblick der Erfahrung entgegen zu sein, da wir bei allen Versuchen wahrnehmen, dass die Bewegung nach und nach verzögert und endlich ganz aufgehoben wird. Aus dieser Quelle scheint daher eine Verneinung der beständigen Bewegung zu entspringen, während diese vermöge unseres Grundsatzes stattfinden müsste. Bei diesen Versuchen liegt aber die Ursache der Verzögerung so wohl in der Reibung, als im Widerstande der Luft und andern Hindernissen der Bewegung, welche man keinesweges ganz aufzuheben im Stande ist. Wenn wir diese Umstände gehörig erwägen, müssen wir aus eben diesen Versuchen schliessen, dass, im Fall alle diese Hindernisse aufgehoben wären, die Bewegung wirklich beständig fortdauern würde. Da wir nun in unserm Grundsatze alle Hindernisse ausdrücklich entfernt haben, so stehen diese Versuche ihm so wenig entgegen, dass sie vielmehr seine Wahrheit durch einen bemerkbaren Grund bestätigen. Uebrigens muss man sich wohl hüten, diesen auf die absolute Bewegung beschränkten Grundsatz nicht auch auf respective Bewegungen auszudehnen.

Erklärung 10.

§. 88. Während ein Körper absolut entweder ruhet oder sich gleichförmig auf einer geraden Linie bewegt, sagt man, er beharre in seinem Zustande.

Zusatz 1.

§. 89. Man kann daher die beiden angeführten Grundsätze so aussprechen, dass Körper, so weit sie durch andere nicht verhindert werden, in demselben Zustande verharren.

Zusatz 2.

§. 90. Wenn also ein Körper, welcher vorher sich in Ruhe befand, anfängt sich zu bewegen, oder welcher schon vorher sich bewegend eine Aenderung in seiner Geschwindigkeit oder Richtung erleidet; so wird derselbe seinen Zustand verändert haben.

Anmerkung.

§. 91. Das Verbleiben in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung wird nicht unpassend ein Zustand genannt, weil der Körper dazu von freien Stücken bestimmt wird. So lange nämlich ein Körper sich selbst überlassen und keiner äussern Einwirkung unterworfen ist, sagt man mit Recht, dass er in demselben Zustande bleibe, insofern eine Veränderung des Zustandes eine äussere Einwirkung anzudeuten scheint. Das Verharren in demselben Zustande ist daher im höchsten Grade vom Verharren an demselben Orte verschieden und stimmt nur dann erst damit überein, wenn der Körper sich in Ruhe befindet. Auf diese Idee des Zustandes haben uns die vorher aufgestellten Grundsätze geführt und es hätte nicht umgekehrt die Idee des Zustandes, welche an sich ganz willkürlich ist, uns zu der Kenntniss jener Grundsätze führen können; hierdurch hat aber eben diese Idee eine feste Bedeutung erlangt.

Erklärung 11.

§. 92. Jene Eigenschaft der Körper, welche den Grund des Verharrens in demselben Zustande enthält, wird Trägheit und bisweilen auch Kraft der Trägheit genannt.

Zusatz 1.

§. 93. Die Trägheit ist daher die wahre Ursache, aus welcher das Verharren der Körper in demselben Zustande entspringt; da man nämlich die Ursache im Körper selbst suchen muss, hat man sie ohne Zweifel für eine allen Körpern gemeinschaftliche Eigenschaft zu halten.

Zusatz 2.

§. 94. Wenn man daher frägt, warum ein absolut ruhender Körper zu ruhen, oder ein sich bewegender gleichförmig und geradlinig sich zu bewegen fortfährt; so kann man keine andere Ursache, als seine Trägheit angeben, auch darf man die Ursache dieser Erscheinung nicht irgendwo ausserhalb des Körpers suchen.

Anmerkung.

§. 95. Der Name Trägheit wird ganz besonders zur

Bezeichnung derjenigen Eigenschaft der Körper angewandt, vermöge welcher ruhende in Ruhe verharren, weil sie in diesem Zustande sich gleichsam der Bewegung widersetzen. Da aber Körper, welche sich in Bewegung befinden, sich eben so jeder Aenderung in Bezug auf ihre Geschwindigkeit und Richtung widersetzen, so wird dieser Name nicht unpassend zur Bezeichnung der Erhaltung des Zustandes, entweder der Ruhe oder der Bewegung angenommen. Man sagt bisweilen Kraft der Trägheit, weil Kraft etwas ist, was der Aenderung des Zustandes entgegenwirkt. Wenn aber die Kraft durch eine beliebige Ursache, welche den Zustand der Körper verändert, erklärt wird, so kann man sie hier keinesweges in dieser Bedeutung annehmen. Ihre Weise weicht sicher im höchsten Grade von derjenigen ab, nach welcher, wie wir künftig zeigen werden, Kräfte wirken. Damit nun hieraus keine Verwirrung hervorgehe, werden wir das Wort Kraft fortlassen und diese Eigenschaft der Körper einfach Trägheit nennen.

Erläuterung.

§. 96. Die Trägheit wird demnach auf den absoluten Zustand der Körper beschränkt und man darf sie nicht auf die respective Ruhe oder Bewegung beziehen. Ein Körper kann nämlich in Beziehung auf einen andern mit beliebig ungleichförmiger Bewegung, oder auf einer krummen Linie fortgehen, während er doch absolut entweder ruhet oder sich gleichförmig auf einer geraden Linie bewegt und daher in seinem Zustande verharret. Trifft es sich ferner, dass wir einen Körper sehen, welcher, wie wir gewiss sind, keiner äussern Einwirkung unterworfen ist und der mit beliebig ungleichförmiger respectiver Bewegung fortzurücken scheint; so können wir mit Bestimmtheit aussprechen, dass derselbe absolut entweder ruhe oder gleichförmig auf einer geraden Linie fortschreite. Da wir aber die Ruhe oder Bewegung der Körper nur in Beziehung auf andere erkennen können, so werden uns die Sinne keineswegs den absoluten Zustand der Körper angeben; daher ist das Criterium des absoluten Zustandes, welches wir daraus entnehmen, dass die Körper keiner äussern Einwirkung unterworfen werden, in dieser Wissenschaft von der grössten Wichtigkeit. Es ist jedoch möglich, dass dieser Grundsatz auch bei der respectiven Bewegung stattfinde, wenn nämlich der Körper, in Bezug auf welchen wir die Bewegung abschätzen, selbst in seinem Zustande verbleibt, d. h. entweder absolut ruhet oder absolut gleichförmig und geradlinig sich fortbewegt.

Lehrsatz 1.

§. 97. Wenn der Körper, in Bezug auf welchen wir die Bewegung anderer Körper abschätzen, absolut entweder ruhet oder sich gleichförmig auf einer geraden Linie bewegt; so gelten die Grundsätze eben so für die respective Ruhe oder Bewegung, als für die absolute.

Beweis.

(Figur 10.) Man betrachte zwei Körper, welche beide mit absoluter Bewegung gleichförmig auf geraden Linien fortrücken, der eine beschreibe in der Zeit t den Weg $Aa = at$, der andere in derselben Zeit den Weg $Bb = bt$, so dass die Geschwindigkeit des ersten $= a$, die des zweiten $= b$ ist. Es ist hierbei gleichgültig, ob diese geraden Linien Aa und Bb in derselben Ebene liegen, oder nicht. Man beziehe nun die Bewegung des Körpers B auf den Körper A, welcher gleichsam als in A ruhend betrachtet wird und da im Anfang der Körper B sich in B befand, so wird man ihn nach Verlauf der Zeit t als in β befindlich annehmen, wenn man nämlich $A\beta \#$ und $= ab$ gezogen hat. Da nun $b\beta = Aa = at$ ist, so hat man

$$Bb : b\beta = b : a,$$

also Bb zu $b\beta$ in constantem Verhältniss. Da ferner der Winkel $Bb\beta$ stets derselbe ist, so wird das Dreieck $Bb\beta$ seiner Art nach gegeben und daher auch der Winkel $bB\beta$ constant und von der Zeit unabhängig sein, eben so wie das Verhältniss $Bb : B\beta$. Setzt man das letztere Verhältniss $= b : \beta$, so wird $B\beta = \beta t$. Hieraus schliesst man, die respective Bewegung des Körpers B sei so beschaffen, dass er von B längs der geraden Linie $B\beta$ fortschreitet und in der Zeit t den Weg $B\beta = \beta t$ beschreibt, also eine constante Geschwindigkeit hat. Es wird daher der Körper B, welchen man als absolut gleichförmig und längs einer geraden Linie sich bewegend voraussetzt, auch in Beziehung auf den Körper A sich gleichförmig und geradlinig bewegen, wenn nur der letztere sich eben so bewegt.

Zusatz 1.

§. 98. Setzt man den Winkel $Bb\beta = \zeta$, welcher immer derselbe ist, wenn auch die geraden Linien Aa und Bb sich nicht in derselben Ebene befinden; so wird

$$B\beta = t\sqrt{a^2 - 2ab\cos\zeta + b^2}.$$

Wir haben daher die respective Geschwindigkeit

$=\sqrt{a^2-2ab\cos\zeta+b^2}$ und $\operatorname{tg} bB\beta = \frac{a\sin\zeta}{b-a\cos\zeta}$.

Zusatz 2.

§. 99. Wenn der Körper A absolut ruhete, so würde die respective Bewegung des Körpers B von seiner absoluten nicht verschieden sein. Gäbe es daher in der Welt einen einzigen absolut ruhenden Körper, so würde man, indem man die übrigen Körper auf ihn bezöge, ihre absolute Bewegung erkennen können.

Zusatz 3.

§. 100. Wenn in der Welt ein gleichförmig auf einer geraden Linie fortschreitender Körper existirte, auf welchen man die übrigen Körper bezöge; so würde man von diesen, vorausgesetzt dass sie keiner äussern Einwirkung unterworfen wären, behaupten können, dass auch sie in ihrem respectiven Zustande verharren.

Zusatz 4.

§. 101. In Folge der Trägheit streben daher die Körper nicht nur in demselben absoluten, sondern auch in demselben respectiven Zustande zu verharren, wenn nur der Körper, in Bezug auf welchen man ihren Zustand abschätzt, absolut entweder ruhet oder sich gleichförmig auf einer geraden Linie fortbewegt.

Erläuterung.

§. 102. Wenn im Weltall die Sonne oder vielmehr ihr Mittelpunkt absolut ruhete und alle Körper in Bezug auf ihre Lage mit dem letztern verglichen würden; so würde die Trägheit bewirken, dass alle Körper, welche in Beziehung auf jenen Mittelpunkt ruhen, in Ruhe zu verharren, die aber, welche sich bewegen, mit derselben gleichförmigen und geradlinigen Bewegung fortzugehen strebten. In diesem Falle wäre nämlich ihre absolute Bewegung von der respectiven nicht verschieden. Wenn aber, wie es wahrscheinlich der Fall ist, nicht der Mittelpunkt der Sonne, sondern vielmehr der gemeinschaftliche Schwerpunkt des ganzen Systems sich in Ruhe befindet, so hat man in Bezug auf diesen diese Eigenschaft der Trägheit zu verstehen. Zur Bestimmung der respectiven Bewegung ist es aber nicht hinreichend nur einen einzigen Punkt als fest anzusehen, weil man hierdurch nur die Abstände, aber nicht die Richtungen kennen lernen könnte, sondern man bedarf hierzu 3

oder 4 fester Punkte, wie wir oben gezeigt haben. Im Weltraume pflegt man daher die Fixsterne als eben so viele feste Punkte anzusehen und wenn diese Hypothese wahr wäre, so würden alle Körper in der Welt, welche in Bezug auf sie entweder ruhen oder sich bewegen, der Trägheit wegen in demselben Zustande verharren. Dies würde ebenso stattfinden, wenn alle Fixsterne sich mit gleichen Geschwindigkeiten, nach parallelen Richtungen gleichförmig und geradlinig im Himmelsraume bewegten. Man nimmt aber an den Fixsternen gewisse kleine Ungleichheiten wahr, auf welche man bei dieser Beurtheilung Rücksicht nehmen muss uud was daher mit Recht für sehr schwierig gehalten wird.

Anmerkung.

§. 103. Wenn wir daher derartige Körper oder vielmehr, damit ihre Grösse keine Verzögerung herbeiführe, gleichsam körperliche Punkte betrachten, welche keiner äussern Einwirkung unterworfen sind; so werden dieselben entweder beständig ruhen oder sich beständig gleichförmig auf einer geraden Linie bewegen und zwar nicht nur absolut, sondern auch respectiv; wenn nur der Körper, auf welchen wir sie beziehen, selbst in demselben absoluten Zustande verharret. Es ist daher angemessen, eine solche Bewegung, deren Grund allein in der Trägheit liegt, genauer zu untersuchen und in Rechnung zu ziehen. Oben haben wir im Allgemeinen drei Fälle behandelt, denen die Rechnung zur Bestimmung der Bewegung angepasst wurde. Der erste war derjenige, in welchem eine geradlinige Bewegung auf eine, mit ihrer Richtung übereinstimmende, Axe bezogen wurde; der zweite, in welchem die Bewegung auf zwei Axen bezogen wurde und da dieser bei jeder in derselben Ebene vor sich gehenden Bewegung von Erfolg war, so werden wir ihn auf die geradlinige gleichförmige Bewegung, wie wir sie hier untersuchen, anwenden können. Der dritte sich sehr weit erstreckende Fall, in welchem wir 3 Axen anwandten, umfasst auch den hier zu behandelnden und es wird der Mühe werth sein zu untersuchen, wie jene allgemeinen Formeln für die gleichförmige geradlinige Bewegung eingerichtet sein werden. Wir wollen daher, diesen drei Fällen entsprechend, die gleichförmige geradlinige Bewegung in Rechnung ziehen und werden hieraus schliessen können, was bei jeder Bewegung der Trägheit zugeschrieben werden muss. Sofern man nun hierauf wahrnehmen wird, dass die Bewegung irgend eines

Körpers sich anders verhält, hat man die Ursache hiervon nicht in seiner Trägheit, sondern anderwärts ausserhalb des Körpers zu suchen.

Aufgabe 6.

§. 104. Eine geradlinige gleichmässige Bewegung wird auf eine einzige Axe, welche mit ihrer Richtung übereinstimmt, bezogen; man soll sie durch Rechnung bestimmen oder den Ort des Körpers zu jeder Zeit angeben.

Auflösung.

(Figur 2.) Betrachten wir den sich bewegenden Körper wie einen Punkt, so sei der Anfangspunkt der Bewegung in A und jener sei nach Ablauf einer Zeit t nach S gelangt, indem er den Weg $AS = s$ zurückgelegt hat. Da also die Geschwindigkeit in $S = \frac{ds}{dt}$ ist und dieselbe stets unverändert bleibt, setzen wir sie $= c$. Wir haben also $\frac{ds}{dt} = c$ und durch Integration

$$s = ct,$$

welche Formel schon oben für die gleichmässige Bewegung gegeben worden ist. Um aber die Erscheinungen dieser Bewegung allgemein, ohne Rücksicht auf die Grösse ihrer Geschwindigkeit, zu entwickeln, ist es hinreichend zu wissen, dass $\frac{ds}{dt}$ constant sei, wesshalb sein Differential $= 0$ sein wird. Betrachtet man daher das Element der Zeit oder dt als constant, so wird $\frac{dds}{dt} = 0$ und so, indem man die Homogeneität ergänzt,

$$\frac{dds}{dt^2} = 0.$$

Zusatz 1.

§. 105. Wenn daher bei einer geradlinigen Bewegung $\frac{dds}{dt^2} = 0$ ist, so ist sie auch zugleich gleichförmig und wenn sie absolut oder einer absoluten gleichgeltend ist, so hat man in Folge der Trägheit die Gleichung

$$\frac{dds}{dt^2} = 0.$$

Zusatz 2.

§. 106. Wenn aber bei einer geradlinigen Bewegung nicht $\frac{dds}{dt^2} = 0$ ist, so ist diess ein Zeichen, dass der kleine Körper

nicht allein der Trägheit folgt, sondern dass man den Werth von $\frac{dds}{dt^2}$ irgend einer äussern Ursache zuschreiben muss, insofern wir nämlich die Bewegung als eine absolute betrachten.

Aufgabe 7.

§. 107. Ein Punkt bewegt sich gleichförmig auf einer geraden Linie und man bezieht seine Bewegung auf zwei in derselben Ebene liegende Axen, man soll die Erscheinungen dieser Bewegung durch Rechnung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 3.) Es sei der vom Punkt beschriebene Weg die gerade Linie EF, welche mit den Axen OA und OB in derselben Ebene liegt und jener befinde sich nach Verlauf der Zeit t in S, von wo man den Axen parallel die Linien SY und SX gezogen hat und man setze $OX=x$ und $XS=y$. Da nun ESF eine gerade Linie ist, so wird $\frac{dy}{dx}=$ constans. Ferner gelange im Verlauf des Zeittheilchens dt der bewegliche Körper nach s, so wird, wenn man $Xx=Sp=dx$, $ps=dy$ und den Winkel $AOB=\zeta$ setzt,

$$Ss=\sqrt{dx^2+dy^2+2dx\,dy\cos\zeta}$$

und die Geschwindigkeit in $S=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+2dx\,dy\cos\zeta}}{dt}$.

Da aber $\frac{dy}{dx}=$ constans ist, so wird, wenn man $dy=adx$ setzt, die Geschwindigkeit $=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+a^2+2a\cos\zeta}$, welche ebenfalls nach der Voraussetzung constant ist. Es werden daher sowohl $\frac{dx}{dt}$ als auch $\frac{dy}{dt}$ constant und es verschwinden ihre Differentiale. Wenn demnach die Bewegung geradlinig und gleichförmig ist, so wird für $dt=$ constans

$$\frac{ddx}{dt^2}=0 \text{ und } \frac{ddy}{dt^2}=0.$$

Umgekehrt wenn diese zwei Gleichungen stattfinden, werden $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$, also auch $\frac{dy}{dx}$ constant; mithin die Bewegung gleichförmig und geradlinig.

Zusatz 1.

§. 108. Wenn daher ein Punkt keine äussere Einwirkung erleidet und seine Bewegung vermöge der Trägheit allein fortsetzt,

so wird bestimmt sowohl $\frac{ddx}{dt^2}=0$, als auch $\frac{ddy}{dt^2}=0$ sein, indem durch diese Bedingungen die geradlinige und gleichmässige Bewegung angedeutet wird.

Zusatz 2.

§. 109. Wenn man daher eine gleichförmige geradlinige Bewegung längs der Richtungen je zweier Axen OA und OB zerlegt, so werden die Geschwindigkeiten beider Seitenbewegungen constant und umgekehrt, wenn diese gleichförmig sind, wird auch die wahre Bewegung nicht nur gleichförmig, sondern auc geradlinig sein.

Zusatz 3.

§. 110. Wenn hingegen bei irgend einer Bewegung, welche man auf die Axen OA und OB bezieht, entweder nicht $\frac{ddx}{dt^2}=0$ oder nicht $\frac{ddy}{dt^2}=0$ ist, oder keines von beiden stattfindet; so ist dies ein Zeichen, dass der Körper nicht der Trägheit allein unterworfen ist, sondern dass eine äussere Einwirkung auf ihn stattfindet.

Anmerkung.

§. 111. So lange ein nur der Trägheit gehorchender Körper sich gleichförmig in gerader Linie bewegt, entweder absolut oder in Beziehung auf einen Körper, welcher selbst in demselben absoluten Zustande verharret, mag man seine Bewegung beliebig längs zweier Axen zerlegen, was allerdings auf unzählige Weise geschehen kann; beide Seitenbewegungen werden alsdann stets gleichförmig, d. h. so beschaffen sein, wie ein Körper sie vermöge der Trägheit verfolgen würde. Hierin besteht die ausgezeichnete Eigenschaft dieser Zerlegung, dass die an die wahre Bewegung gebundenen Grundsätze auch bei diesen, wenn auch nur erdichteten Seitenbewegungen stattfinden, woraus für die Rechnung vorzügliche Vortheile entspringen werden. Man wird ferner diese Zerlegung als noch wichtiger erkennen, wenn wir unten zeigen werden, dass die Kräfte auf diese, aus der Zerlegung entsprungenen und nur ideellen Bewegungen eben so wirken, als ob sie wirkliche wären. Dasselbe hat man aber im Allgemeinen auch bei der Zerlegung längs je drei Axen festzuhalten, wie wir aus der folgenden Aufgabe ersehen werden.

Aufgabe 8.

§. 112. Ein Punkt bewegt sich gleichförmig auf einer geraden Linie und man bezieht seine Bewegung auf je drei beliebige Axen, man soll die Erscheinungen dieser Bewegung in Rechnung ziehen und bestimmen.

Auflösung.

(Figur 4.) Es seien als die drei Axen die Linien OA, OB und OC angenommen, ESF sei die beliebige gerade Linie, welche der Punkt mit gleichförmiger Bewegung beschreibt und derselbe befinde sich nach Verlauf der Zeit t in S, wofür die den drei Axen parallelen Coordinaten $OX=x$, $XY=y$ und $YS=z$ sind; diese mögen mit einander rechte oder schiefe Winkel bilden. Da ESF eine gerade Linie ist, so wird ihre Projection TY auf die Ebene AOB ebenfalls eine gerade Linie, also $\frac{dy}{dx}$ constant sein. Auf ähnliche Weise wird, weil die Projection auf die Ebene AOC eine gerade Linie ist, $\frac{dz}{dx}$ ebenfalls wie auch $\frac{dz}{dy}$ constant sein. Setzt man nun den in der kleinen Zeit dt beschriebenen kleinen Weg $Ss = ds$, so werden auch $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$ und $\frac{ds}{dz}$ constante Grössen sein, welche Bedingungen daraus folgen, dass ESF eine gerade Linie ist. Wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung ist die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ constant und es werden daher $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ constante Grössen sein, und hierin ist sowohl die Gleichförmigkeit der Bewegung, als auch die Geradlinigkeit des Weges enthalten. Differentiirt man nun die letzten Quotienten, indem man das Element dt constant setzt, so erhält man die drei Gleichungen

$$\frac{ddx}{dt^2}=0,\ \frac{ddy}{dt^2}=0 \text{ und } \frac{ddz}{dt^2}=0,$$

durch welche die Natur der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung bestimmt wird.

Zusatz 1.

§. 113. Ist daher ein Punkt keiner äussern Einwirkung unterworfen und bezieht man seine absolute Bewegung auf drei beliebige Axen, so finden sicher die drei Gleichungen statt:

$$\frac{ddx}{dt^2}=0,\ \frac{ddy}{dt^2}=0 \text{ und } \frac{ddz}{dt^2}=0,$$

deren Grund in der Trägheit des kleinen Körpers zu suchen ist.

Zusatz 2.

§. 114. Wenn daher eine Bewegung gleichförmig und geradlinig ist, so werden, indem man dieselbe nach je drei beliebigen festen Axen zerlegt, die drei Seitenbewegungen auch gleichförmig sein, weil $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ constant sind.

Zusatz 3.

§. 115. Bei einer absoluten Bewegung werden demnach die Seitenbewegungen, in welche wir erstere nach je drei festen Richtungen zerlegen, wenn sie auch nur erdacht sind, doch das Gesetz der Trägheit befolgen, so dass wir sie in diesem Kapitel als wirkliche Bewegungen betrachten können.

Anmerkung.

§. 116. Dies sind die innern Principien der Bewegung, welche sich auf die, gewöhnlich Trägheit benannte, allgemeine Eigenschaft stützen. Mittelst dieser Principien sind wir im Stande, die Bewegung körperlicher Punkte zu bestimmen, wenn diese keiner äussern Einwirkung unterworfen sind. Alles kommt nämlich darauf hinaus, dass, wenn ein solcher kleiner Körper absolut ruhet, er beständig in Ruhe verharren, wenn er aber eine beliebige absolute Bewegung angenommen hat, er beständig mit derselben Geschwindigkeit geradlinig fortschreiten wird. Hier haben wir zwar die sich bewegenden Körper als unendlich klein betrachtet, allein es lässt sich dasjenige, was wir hier aufgestellt haben, auch Körpern von jeder Grösse anpassen. Ehe wir jedoch hierzu übergehen, müssen wir nothwendig erwägen, was äussere Kräfte zu bewirken vermögen und diese Erforschung wollen wir ebenfalls für Punkte oder sehr kleine Körpertheilchen unternehmen.

Kapitel III.

Von den äussern Ursachen der Bewegung oder den Kräften.

Erklärung 12.

§. 117. Dasjenige, was den absoluten Zustand der Körper zu verändern vermag, wird eine Kraft genannt und man hat diese für eine äussere Ursache zu halten, weil der Körper wegen der innern Ursachen in seinem Zustande verharren würde.

Zusatz 1.

§. 118. Die Ursache also, durch welche ein absolut ruhender Körper zur Bewegung angetrieben, oder in einem mit absoluter Bewegung fortschreitenden Körper die Geschwindigkeit oder Richtung geändert wird, nennen wir eine Kraft.

Zusatz 2.

§. 119. Die Kraft ist daher eine äussere Ursache, welche den absoluten Zustand der Körper zu verändern vermag und so lange eine solche äussere Ursache nicht hinzutritt, verharret ein Körper in demselben absoluten Zustande entweder der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung.

Erläuterung.

§. 120. Im Körper selbst befindet sich nichts, was seinen Zustand zu verändern strebt und eben desshalb behaupten wir, dass jener so lange in demselben Zustande verharre, als er gleichsam seinem eigenen Instinkte folgt und keiner äussern Einwirkung unterworfen wird. Sobald daher der absolute Zustand irgend eines Körpers sich ändert, können wir die Ursache hiervon sicher nicht in ihm selbst suchen, sonst würde nämlich keine Aenderung des Zustandes eintreten, indem wir den Zustand so erklärt haben, dass ein Körper so lange in demselben

verharre, als er durch keine äussere Ursachen angetrieben wird. Jene innere Ursache aber, in Folge welcher der Körper in demselben Zustande verharret, ist seine Trägheit und da in dieser der Grund alles desjenigen enthalten ist, was im Körper die Ruhe oder Bewegung betrifft; so würde jene (die Trägheit) nicht nur ganz aufgehoben, sondern auch gar nicht einmal aufgestellt werden können, wenn im Körper etwas enthalten wäre, was seinen Zustand zu verändern strebte. Wenn wir daher das Wort Kraft auf diejenigen Ursachen beschränken, welche den absoluten Zustand der Körper zu verändern im Stande sind; so kann man sicher keinem Körper die Kraft zutheilen, seinen Zustand zu ändern. So oft das letztere eintritt, wird die Ursache oder die Kraft nothwendig stets ausserhalb des Körpers sich befinden.

Anmerkung 1.

§. 121. Hier entsteht daher die Frage: woraus entspringen die Kräfte, durch welche der Zustand der Körper nach unserer Wahrnehmung sich beständig ändert? hat man dieselben, da sie sich nicht in den Körpern befinden, unmateriellen Substanzen zuzuschreiben? Die Philosophen pflegen auf andere Weise zu argumentiren. Da nämlich der Zustand der Körper sich beständig ändert, schliessen sie, dass die Ursache dieser Veränderung in den Körpern selbst enthalten sei und hieraus folgern sie, dass die einzelnen Körper mit der Kraft begabt seien, ihren Zustand beständig zu ändern und heben so das Princip der Trägheit von Grund aus auf. In dieser Schlussfolge machen sie aber einen bedeutenden Sprung; indem wir nämlich den ersten Theil, dass die Ursache der Aenderung des Zustandes in den Körpern liege, zugeben, leugnen wir durchaus den zweiten Theil, dass nämlich die einzelnen Körper die Kraft haben, ihren Zustand zu verändern. Wir entfernen nämlich die Ursache der Zustandsänderung nur von dem Körper, dessen Zustand sich ändert und behaupten, dass dieselbe in andern Körpern gesucht werden muss; wir legen also den Körpern die Kraft bei, den Zustand anderer Körper, nicht ihren eigenen zu verändern. Diess kann durchaus nicht absurd erscheinen, vielmehr folgt eben aus der Fähigkeit einzelner Körper in ihrem Zustande zu verharren, dass in ihnen Kräfte enthalten sein müssen, den Zustand anderer Körper zu verändern. In einem Haufen mehrerer Körper wird es nämlich, wenn sie nicht entweder alle

ruhen oder mit gleichen Geschwindigkeiten nach derselben Richtung fortgehen, nothwendig sich ereignen, dass die einzelnen nicht in ihrem Zustande verharren können, während der Zustand der übrigen unverändert bleibt. Denken wir uns nämlich zwei Körper A und B, von welchen jener zu diesem gelangt ist, so ist es sicher unmöglich, dass der Körper A seine Bewegung fortsetze, ohne dass zugleich der Körper B in seinem Zustande der Ruhe gestört werde, noch dass der Körper B in Ruhe verharre, ohne dass zugleich die Bewegung des Körpers A aufhöre. Da also beide nicht zugleich ihren Zustand beibehalten können, so muss sich entweder der Zustand beider, oder des einen von beiden ändern und zwar eben desshalb, weil beide das Bestreben haben, in ihrem Zustande zu verharren. Folglich liefert die Fähigkeit der einzelnen Körper, in ihrem Zustande zu verharren, Kräfte, durch welche der Zustand anderer verändert werden kann.

Anmerkung 2.

§. 122. Wenn wir ferner fragen, warum jene beiden Körper A und B nicht zugleich in ihrem Zustande verharren können, so begreifen wir, dass hieran die Undurchdringlichkeit Schuld ist. Könnten sich nämlich jene Körper wechselseitig durchdringen, so dass der eine dem andern den frei'sten Durchgang gleichsam durch seine Substanz gestattete; so würde nichts den Körper A verhindern, seine Bewegung fortzusetzen und den Körper B, in Ruhe zu verharren; es würden daher beide auf diese Weise der Trägheit Folge leisten. Die Ursache jener Kräfte, durch welche der Zustand der Körper verändert wird, ist daher nicht nur in der Trägheit, sondern in der Verbindung der letztern mit der Undurchdringlichkeit anzunehmen. Da aber die Undurchdringlichkeit nur in Bezug auf Körper ausgesprochen werden kann, ferner die Körper nothwendig mit Trägheit begabt sind; so enthält die Undurchdringlichkeit von selbst die Trägheit, dergestalt dass die erstere allein richtiger Weise für die Quelle derjenigen Kräfte, welche den Zustand der Körper verändern, gehalten wird. Diese Eigenschaft der Körper, als den Ursprung aller Kräfte werden wir angemessener Weise genauer untersuchen.

Erklärung 13.

§. 123. Die Undurchdringlichkeit ist diejenige Eigenschaft, vermöge welcher zwei oder mehrere Körper sich nicht an demselben

Orte befinden können, sie erstreckt sich selbst auf die kleinsten Elemente der Körper, so dass auch nicht einmal zwei solche Elemente an demselben Orte existiren können.

Zusatz 1.

§. 124. Vermöge dieser Eigenschaft muss wechselweise jeder einzelne Körper ausserhalb des andern existiren, so dass zwei Körper nicht einmal mit ihren kleinsten Theilen in einander eindringen können.

Zusatz 2.

§. 125. Da die Undurchdringlichkeit eine nothwendige Eigenschaft der Körper ist, so existirt keine Kraft, welche zwei Körper an denselben Ort zu treiben im Stande wäre und es ist die grösste Kraft der Hervorbringung einer solchen Wirkung eben so wenig gewachsen, als die kleinste.

Zusatz 3.

§. 126. Wie daher auch immer der Zustand der Körper durch Kräfte geändert werden mag, so können doch niemals zwei Elemente oder körperliche Punkte an denselben Ort getrieben werden.

Erläuterung 1.

§. 127. Fälschlich werden wider diese allgemeine Eigenschaft der Körper gewisse Versuche angeführt, nach welchen Körper, wie man sagt, in einander einzudringen scheinen. Man sagt nämlich, eine geworfene Kugel durchdringe den Thon, allein hier wird das Wort durchdringen in einem andern Sinne genommen. Kein Theil der Kugel gelangt nämlich an einen derartigen Ort, an welchem in Wirklichkeit ein Theil des Thons sich befindet; sondern weil jetzt die Kugel einen vorher vom Thone eingenommenen Ort einnimmt, wendet man das Wort Durchdringung an. Hier leugnen wir aber nur, dass ein Körper irgend einen Ort einnehmen könne, an welchem sich zugleich ein anderer befindet, nicht aber einen solchen, an welchem sich vorher ein anderer Körper befunden hat. Eben so wenn man sagt, dass das Wasser einen Schwamm durchdringe, erfüllt dasselbe nur die Zwischenräume oder Poren des letztern und da man diese vorher von der Substanz des Schwammes nicht unterschied, scheint dieser selbst durchdrungen zu sein. Wenn wir aber die Sache genauer untersuchen,

werden wir begreifen, dass nirgend das kleinste Theilchen des Schwammes zugleich mit dem Wasser existirt. Eben so verhält sich die Sache bei Körpern, welche sich in einen kleinern Raum zusammendrücken lassen; es werden nämlich niemals zwei Theilchen an denselben Ort gebracht, sondern nur die Zwischenräume der Theilchen verengt und daher die vorher sie erfüllende Materie herausgetrieben. Wenn man daher diess gehörig erwägt, so bleibt kein Zweifel übrig, dass die Körper undurchdringlich seien oder dass zwei Körper nicht zugleich an demselben Orte existiren.

Erläuterung 2.

§. 128. Die Idee der Undurchdringlichkeit stützt sich daher auf die Idee des Ortes, ohne welche sie durchaus nicht bestehen kann. Wäre nämlich der Ort nicht etwas von den Körpern Verschiedenes, so könnten wir auf keine Weise verstehen, was die Undurchdringlichkeit sei. Die Philosophen, welche die Wirklichkeit des Ortes leugnen, sagen zwar, die Körper existiren nothwendig ausser sich; was aber ausser- oder innerhalb sei, wenn ein Ort ohne Körper nichts ist, erklären sie keinesweges. Das, was wir oben über die absolute Ruhe und Bewegung auseinander gesetzt haben, beweist vollkommen, dass der Ort nicht ein reiner Begriff des Verstandes ist und jetzt ersehen wir aus der Undurchdringlichkeit ganz deutlich, dass die Idee des Ortes mehr umfasst, als eine blosse wechselseitige Beziehung der Körper, so dass nach der Aufhebung aller Körper auch für den Ort kein Ort übrig bleiben würde. Der Ort ist daher etwas, was von den Körpern nicht abhängt und eben so wenig ein reiner Begriff des Verstandes, was er aber ausserhalb des letztern für eine Reellität besitze, möchte ich nicht zu bestimmen wagen, wenn wir nicht auch in ihm einige Reellität anerkennen müssen. Wenn aber die Philosophen alle Reellitäten in bestimmte Klassen theilen und wähnen, dass der Ort auf keine von ihnen bezogen werden könne; so möchte ich lieber glauben, dass diese Klassen fälschlich von ihnen aufgestellt worden sind, indem sie die darauf zu beziehenden Dinge nicht hinreichend erkannt hatten. Auf ähnliche Weise ist das Verhältniss der Zeit beschaffen, in welchem sie nichts reelles annehmen, während sie doch den Worten vor- und nachher nichts desto weniger Reellität beilegen. So wie daher die wahre Idee des Ortes und des Raumes mehr

enthält, als die Reihefolge der neben einander existirenden Dinge, so enthält auch die wahre Idee der Zeit mehr, als die Reihefolge der nach einander existirenden Dinge; obgleich ich zugebe, dass die ersten Ideen dieser Dinge für uns daraus entstanden sind.

Anmerkung I.

§. 129. Nachdem die Bedeutung der Undurchdringlichkeit aufgestellt worden ist, trage ich kein Bedenken, darin das Wesen der Körper zu setzen; diess erscheint verwegen, da fast alle Philosophen einstimmig verkünden, dass uns das Wesen der Körper unbekannt sei. Dies gebe ich sicher leicht hinsichtlich specieller Körper zu und glaube nicht, dass uns das Wesen des Goldes oder Silbers bekannt ist. In welche Sache man nämlich auch das Wesen des Goldes setzen mag, so ist es doch ungewiss, ob dieselbe dem Golde auch in jedem Zustande zukomme und ob nicht ein anderer Körper, welcher nicht Gold ist, mit derselben begabt sei; eben diese Ungewissheit hebt aber jene Behauptung auf. Wenn aber vom Körper im Allgemeinen die Rede ist, so fürchte ich einen solchen Einwurf nicht; wer nämlich leugnen wollte, dass das Wesen der Körper in ihrer Undurchdringlichkeit liege, würde auch leugnen oder wenigstens bezweifeln müssen, dass entweder alle Körper undurchdringlich oder umgekehrt dass alles, was undurchdringlich ist, ein Körper sei. Kein Philosoph wird nämlich bezweifeln, dass in eine Eigenschaft, welche allen Körpern und ihnen allein zukommt, das Wesen derselben zu setzen sei. Zuerst ist es aber ganz entschieden, dass alle Körper undurchdringlich sind. Wären nämlich ausgedehnte und mit Trägheit begabte Dinge gegeben, welche sich selbst überlassen entweder ruheten oder sich gleichförmig in gerader Linie bewegten; so würde doch, wenn sie der Undurchdringlichkeit entbehrten, niemand sie zu den Körpern zählen. Daher hält man Schatten und Bilder, welche durch optische Maschinen dargestellt werden, nicht für Körper. Ferner muss alles, was undurchdringlich ist, auch nothwendig ausgedehnt und mit Trägheit begabt sein, ohne Ausdehnung kann man sich nämlich keine Undurchdringlichkeit denken. Ferner müsste es durchaus beweglich sein, und wenn man Beweglichkeit voraussetzt, so folgt daraus auch das Dasein der Trägheit. Es ist darum kein Grund vorhanden, warum nicht alles, was undurchdringlich ist, für einen Körper gehalten werden sollte.

Anmerkung 2.

§. 130. Ein schwererer Einwurf gegen diese Meinung kann daraus abgeleitet werden, dass wir die Undurchdringlichkeit an sich nicht begreifen können, weil sie ihrer Bedeutung nach nothwendig mehrere Körper umfasst. Hiernach gebe ich leicht zu, dass die Erklärung, nach welcher ein Körper eine undurchdringliche Substanz genannt wird, mit den Regeln des Philosophirens nicht übereinstimmt; nicht weil wir auf unrechte Weise das Wesen der Körper in ihre Undurchdringlichkeit setzen, sondern weil man diese Erklärung ohne den vorher aufgestellten Begriff eines Körpers nicht verstehen kann. Wenn jemand fragte, was eine undurchdringliche Substanz sei und man hierauf antwortete, sie sei etwas, was von Körpern, d. h. von andern undurchdringlichen Substanzen nicht durchdrungen werden könne; so wäre die Sache keineswegs abgemacht. Obgleich wir aber diese Eigenschaft nur aus der wechselseitigen Vergleichung der Körper erkennen, so findet doch kein Zweifel statt, dass der Grund der Undurchdringlichkeit in einer gewissen innern Eigenschaft eines jeden Körpers liege; so dass alle Körper eine gewisse bestimmte Eigenschaft besitzen, vermöge welcher sie untereinander undurchdringlich sind. Diese Eigenschaft wird man vielleicht nicht unpassend Festigkeit nennen, durch welche gleichsam eine Materiellität gebildet wird, die man mit Recht für das Wesen der Körper halten kann. Ich gestehe freilich ein, dass die Sache fast darauf hinauskommt, als wenn man sagte, das Wesen der Körper bestehe in ihrer Körperlichkeit. Jedoch führt die Undurchdringlichkeit uns zum Ursprung der Kräfte und unterscheidet sich so von einem leeren Tone, was näher auseinander gesetzt zu werden verdient.

Lehrsatz 2.

§. 131. Wenn zwei Körper so zusammentreffen, dass keiner von beiden seinen Zustand beibehalten, noch der eine den andern durchdringen kann; so wirken sie wechselseitig auf einander und üben Kräfte aus, durch welche ihr Zustand verändert wird.

Beweis.

Da die Körper in einem derartigen Zustande vorausgesetzt werden, dass sie nur dann in demselben verharren können, wenn sie einander durchdringen; so muss, weil eine Durchdringung auf keine Weise möglich ist, nothwendig eine Aenderung

in ihrem Zustande eintreten. Da ferner der Zustand der Körper sich ohne äussere Kräfte nicht ändern kann, im vorausgesetzten Falle aber eine solche Aenderung wirklich hervorgebracht wird, so müssen ohne Zweifel Kräfte da sein, denen man diese Wirkung zuzuschreiben hat. Man kann daher die Fragen aufstellen: woraus entspringen diese Kräfte? entspringen sie aus der Undurchdringlichkeit der Körper oder aus etwas anderm? Behauptet man das letztere, so kann man die Entstehung wenigstens in Gedanken aufheben und es würde daher, unter Vorbehalt der Undurchdringlichkeit, keine Aenderung des Zustandes eintreten, die Körper müssten mithin einander durchdringen und weil diess absurd wäre, müssten jene Kräfte nothwendig durch die Undurchdringlichkeit erzeugt werden. Sobald nämlich Körper nicht in ihrem Zustande verharren können, ohne sich wechselseitig zu durchdringen, erzeugt eben die Undurchdringlichkeit Kräfte, durch welche ihr Zustand so verändert wird, dass die Durchdringung vermieden werde. Während nun diese Kräfte ihre Wirkung ausüben, sagt man, dass die Körper auf einander wirken und der eine den Zustand des andern verändert.

Zusatz 1.

§. 132. Körper wirken daher auf einander, wenn sie so zusammentreffen, dass sie einzeln nicht in ihrem Zustande verharren können, ohne sich wechselseitig zu durchdringen. Hieraus kann man einen bestimmten Begriff der Wirksamkeit der Körper entnehmen, welcher bei den meisten Schriftstellern nicht hinreichend klar zu sein pflegt.

Zusatz 2.

§. 133. Die Kräfte, welche in diesem Falle den Zustand der Körper verändern, entspringen aus ihrer Undurchdringlichkeit und bringen eine so grosse Wirkung hervor, dass die Durchdringung verhindert wird. Sie werden ferner stets so gross sein, dass sie zur Erreichung dieses Zweckes genügen.

Zusatz 3.

§. 134. Die Grösse dieser Kräfte wird nicht durch die Undurchdringlichkeit, welche nämlich nicht messbar ist, bestimmt, sondern durch die Aenderung des Zustandes, wodurch bewirkt werden soll, dass die Körper sich wechelseitig nicht durchdringen.

Zusatz 4.

§. 135. Diese Kräfte, welche aus der Undurchdringlichkeit

entspringen, werden sich daher nur so weit zeigen, als der Durchdringung zu begegnen ist und wie grosse Kräfte hierzu auch erforderlich sein mögen, so wird die Undurchdringlichkeit sie immer liefern, wenn nur die Durchdringung keinesweges eintreten kann.

Erläuterung 1.

§. 136. Wird irgend ein Körper durch andere verhindert, wenn er ruhet, in Ruhe zu verharren und wenn er sich bewegt, gleichförmig in gerader Linie fortzuschreiten; so erzeugt so wohl seine eigene, als auch die Undurchdringlichkeit jener Körper die zur Aenderung des Zustandes erforderlichen Kräfte. Wäre nämlich derselbe, oder diese durchdringlich, so würde es keiner Kräfte bedürfen; die letztern entspringen daher nicht aus der Undurchdringlichkeit eines einzigen, sondern zweier oder mehrerer Körper vereint. Die Undurchdringlichkeit kann man sich sicher nicht ohne einen unbesiegbaren Widerstand denken und sie wird daher mit Recht für die Quelle jener Kräfte gehalten, welche die Durchdringung verhindern. Die bisher aufgestellten Lehren kommen darauf hinaus, dass die Körper wegen der ihnen inwohnenden Trägheit so lange in ihrem Zustande der Ruhe oder der gleichmässigen geradlinigen Bewegung verharren, als keine Durchdringung zu befürchten ist. Sobald sie aber ihren Zustand nicht mehr beibehalten können, ohne dass eine Durchdringung eintreten würde, liefert die Undurchdringlichkeit so grosse Kräfte, dass diese den Zustand der Körper angemessen verändern, um jede Durchdringung abzuwenden. Da nun die Welt von Körpern erfüllt ist, deren Zustand so verschieden ist, dass, wenn irgend welche von ihnen selbst den kleinsten Zeitraum hindurch in demselben Zustande blieben, die Durchdringung überall erfolgen würde; so entspringt hieraus die reichste Quelle von Kräften, welche den Zustand der Körper beständig verändern werden. Obgleich wir daher gleichsam eine unendliche Menge von Kräften in der Welt zugeben, welche aus den Körpern entspringen, so sind wir doch durchaus der Meinung derjenigen entgegen, welche den Körpern das Bestreben beilegen, ihren Zustand beständig zu verändern. Diese Kräfte haben nämlich nicht das Bestreben, direct den Zustand der Körper zu verändern, sondern die Durchdringung abzuwenden und wenn diese nicht zu besorgen wäre, würden gar keine derartige Kräfte in der Welt existiren.

Erläuterung 2.

§. 137. Nun entsteht hier die Frage, ob durchaus alle Kräfte, deren Wirkung in der Welt wir bewundern, aus dieser Quelle entspringen, d. h. ob der Zustand der Körper durch keine andern Kräfte als diese, welche die Gefahr der Durchdringung liefert, verändert werden könne. Zuerst ist es nun nicht Sache der Mechanik, zu bestimmen, ob Geister auf Körper zu wirken und ihren Zustand zu verändern vermögen; indessen finden wir in den Körpern nichts, was einer geistigen Einwirkung zuwider wäre. Ferner erscheint die Wirksamkeit auf Körper nicht als so schwierig, dass man dieselbe allein der Allmacht des göttlichen Willens zuschreiben müsste, da man sie selbst den gemeinsten Körpern beilegen muss. Wir müssen vielmehr gestehen, dass wir keinen Grund sehen, warum wir den Geistern die Macht auf Körper zu wirken bestreiten sollten, wenn wir auch keineswegs die Weise angeben können, nach welcher sie wirken. Ob aber Körper auf andere Weise, als die von uns erklärte, wechselseitig auf einander zu wirken vermögen, dies glauben wir verneinen zu müssen. Wirkten sie nämlich auch dann, wenn keine Gefahr der Durchdringung vorhanden wäre, so würden sie in der Entfernung wirken und es wäre alsdann nicht klar, wie hierdurch die Erhaltung des Zustandes gestört werden könnte. Da ferner jene Wirksamkeit nicht aus der Undurchdringlichkeit hervorginge, so müssten die Kräfte auf gleiche Weise wirken, obgleich die Körper durchdringlich wären und wie alsdann eine Wirkung bestehen könne, ist nicht klar. Hiernach ist es höchst wahrscheinlich, dass die Körper wechselseitig auf einander keine andern Kräfte ausüben, als die zur Abwendung der Durchdringung erforderlichen, und da diese Kräfte nicht kleiner sein können, als dieser Zweck sie erfordert, so wird man sie auch nicht grösser, als zu diesem Zweck ausreichend, aufstellen können. Uebrigens können wir hier keine bestimmten Behauptungen aufstellen, sondern müssen damit zufrieden sein, dass wir eine reiche Quelle von Kräften, welche in der Welt wirken, entdeckt haben; dass ferner hieraus zugleich eine wechselseitige Wirksamkeit der Körper entspringt, welche viele Philosophen entweder geleugnet oder in das stärkste Dunkel gehüllt haben, sieht man vortrefflich genug ein. Wie gross aber und in welchem Falle diese Kräfte aus der Undurchdringlichkeit der Körper hervorgehen und auf welche Weise der Zustand der Körper durch sie verändert wird, können wir nicht

eher bestimmen, als bis wir im Allgemeinen die Wirksamkeit der Kräfte untersucht haben werden.

Anmerkung.

§. 138. Nachdem wir den Ursprung der Kräfte durchschau't haben, können wir mit Recht annehmen, dass es in der Welt Kräfte gebe, durch welche der Zustand der Körper verändert wird. In wie fern aber derartige auf die Körper wirkende Kräfte einander das Gleichgewicht halten, pflegt in der Statik oder Dynamik behandelt zu werden, wo man durch ihre Messung lehrt, dass einzelne Kräfte nicht nur grösser oder kleiner als andere sind, sondern dass dieselben auch ein bestimmtes Verhältniss zu einander haben. Man muss nämlich die Kräfte auf eine Art von Grössen beziehen, da sie durch das Verhältniss der Grösse mit einander verglichen werden können; aus der Statik wissen wir aber, wann man zwei Kräfte als einander gleich oder nach einem gegebenen Verhältniss ungleich anzunehmen hat. Damit wir nun leichter ihre Wirkung in Bezug auf die Veränderung des Zustandes der Körper erforschen, ist es nicht nur angemessen, von unendlich kleinen Körperchen, auf welche sie wirken, auszugehen, so wie wir auch von hier aus die ganze Behandlung der Bewegung gezogen haben; sondern wir werden auch nur eine augenblickliche Wirksamkeit der Kräfte untersuchen. Wir werden daher erforschen, wieviel sie in den einzelnen Zeitelementen bewirken, weil es möglich ist, dass im Laufe der Zeit die Grösse der Kräfte sich ändere. Wenn wir hiernach die Principien für unendlich kleine Körperchen und ein unendlich kleines Zeitintervall aufgestellt haben, wird es nicht schwierig sein, durch Integrationen zur Bewegung der Körper, welche sich in endlicher Zeit verändert, überzugehen.

Erklärung 14.

§. 139. Die in einem gegebenen Zeittheilchen auf ein gegebenes Körperchen hervorgebrachte Wirkung einer Kraft nennt man denjenigen kleinen Weg, über welchen ein ruhender Körper fortgeführt, oder ein sich bewegender Körper jenseits des Weges, welchen er in Folge der Trägheit durchlaufen würde, fortgetrieben wird.

Zusatz 1.

§. 140. Diese Bestimmung der Wirkung ist keine absolute, sondern eine an einen bestimmten Körper und eine bestimmte

Zeit gebundene und da man die beiden letztern als unendlich klein ansieht, so wird auf diese Weise jede anders woher etwa hinzukommende Veränderlichkeit aufgehoben.

Zusatz 2.

§. 141. Wenn daher unter der Voraussetzung eines kleinen Körpers und Zeittheilchens der kleine Weg derselbe ist, so wird auch die Wirkung dieselbe sein, wesshalb man auch die Kraft für dieselbe zu halten hat; und zwar wird dies der Fall sein, mag der kleine Körper ruhen oder sich schon bewegen.

Zusatz 3.

§. 142. Wenn nämlich ein kleiner Körper sich bewegt, so wird die Kraft nur in soweit abgeschätzt, als jener über einen bestimmten kleinen Weg jenseits desjenigen, welchen er vermöge der bereits inwohnenden Bewegung durchlaufen würde, fortgetrieben wird; denn umgekehrt schätzt man nach der Grösse dieses kleinen Weges die Kraft ab.

Erläuterung. 1.

§. 143. In der Statik, aus welcher wir die Messung der Kräfte schöpfen, betrachtet man die Körper, an denen sie angebracht werden, als in Ruhe befindlich, es wird daher von dort aus nichts über die Messung derjenigen Kräfte, welche auf sich bewegende Körper wirken, bestimmt, so dass diese Messung uns ganz in der Mechanik überlassen bleibt. Denken wir uns daher (Figur 11.) einen in S ruhenden Punkt oder kleinen Körper, welcher durch eine gewisse Kraft $= p$ in der Richtung $S\sigma$ angetrieben wird; alsdann wird die Wirkung darin bestehen, dass jener in einem gegebenen Zeittheilchen $= dt$ über irgend einen bestimmten kleinen Weg $S\sigma = d\omega$ fortgeführt wird. Wie dieser sowohl von der Kraft p, als auch von dem Zeittheilchen dt abhängig ist, werden wir später bestimmen. Hier bemerke ich nur, dass, wenn der kleine Körper eine Bewegung hätte, vermöge welcher er in dem Zeittheilchen dt den Weg $Ss = ds$ (Figur 12.) beschreiben würde, er als durch die gleiche Kraft angetrieben angesehen werden müsste, wenn er in demselben Zeittheilchen dt jenseits s über den gleichen kleinen Weg $s\sigma = d\omega$ fortgeführt würde. Wir setzen hierbei voraus, dass ihn die Kraft nach der Richtung Ss der Bewegung antreibt. Hätte aber die Kraft die entgegengesetzte Richtung und wird der kleine Körper durch sie in demselben Zeittheilchen dt über

den gleichen kleinen Weg $s\sigma = d\omega$ (Figur 13.) zurückgetrieben, so hat man die Kraft gleich jener frühern, d. h. $= p$ anzunehmen. Allgemein, wenn der kleine Körper eine Bewegung hat, vermöge welcher sein im Zeittheilchen dt durchlaufener Weg $Ss = ds$ (Figur 14.) sein würde und wird er durch eine gewisse Kraft in der Richtung SV angetrieben; so bewirkt diese, dass er nach Verlauf der Zeit dt sich nicht in s, sondern in σ befinden wird. Man wird sich daher denken können, dass er von s nach σ über den kleinen Weg $s\sigma$, parallel der Richtung der Kraft, fortgeführt worden sei, obgleich er in der Wirklichkeit, wegen der beständigen Wirksamkeit der Kraft, von S nach σ auf einem gleichmässigen Wege gelangt sein wird. Endlich hat man dann erst diese Kraft SV jener p, welche denselben ruhenden kleinen Körper antrieb, gleich zu halten, wenn dieser Weg $s\sigma$ jenem $S\sigma$ (Figur 11.) gleich ist.

Erläuterung 2.

§. 144. Für Kräfte, welche auf sich schon bewegende Körper einwirken, stellen wir daher die Regel sie zu messen auf, dass wir sie für denjenigen Kräften gleich halten, welche auf dieselben sich in Ruhe befindenden Körper in derselben Zeit dieselbe Wirkung hervorbringen würden. Dieses Verfahren bedarf keines Beweises, weil es sich auf die Erklärung stützt und es uns noch frei stand, diese aufzustellen. Wenn daher für eine beliebige Bewegung die kleinen Wege $s\sigma$ (Figur 12, 13 und 14.) gleich sind dem kleinen Wege $S\sigma$ (Fig. 11.), über welchen derselbe ruhende kleine Körper in demselben Zeittheilchen durch die Kraft p fortgeführt wird; so nennen wir auch jene Kräfte dieser gleich, und zwar kann uns diese mit obiger Regel übereinstimmende Freiheit um so weniger jemand nehmen, als diese Benennung auch mit der allgemeinen Redeweise übereinstimmt. Ferner behaupte ich nicht, dass dieselben Antriebe, welche wir in der Welt wahrnehmen, gleiche Wirkungen auf denselben Körper hervorbringen, wenn dieser ruhet oder sich bewegt; vielmehr gebe ich durchaus zu, dass derselbe Körper ganz anders durch einen Fluss fortgetrieben wird, wenn er sich bewegt oder ruhet. Aber eben dieses Beispiel bestätigt auf vortreffliche Weise unsere Regel, nach welcher wir die Kräfte messen; indem wir nämlich behaupten, dass derselbe Körper anders durch einen Fluss angetrieben werde, je nachdem er ruhet oder sich bewegt, erkennen wir ungleiche Kräfte

an und schätzen für einen sich bewegenden Körper die Kraft genau eben so gross ab, als eine, welche auf den ruhenden Körper dieselbe Wirkung hervorbringen würde. Hieraus wird auch, wenn es sich um Körper handelt, welche sich in einem Flusse bewegen, für jeden Grad der Geschwindigkeit die Kraft genau bestimmt, welche der Fluss wirklich auf den Körper ausübt und sie wird stets eben so gross gesetzt, als diejenige, welche auf denselben sich in Ruhe befindenden Körper dieselbe Wirkung hervorbringen würde. Daher gehört die in den frühern Theilen angestellte Eintheilung der Kräfte in absolute und relative eigentlich nicht hierher, da man in jedem Falle und für jeden Augenblick diejenige Kraft in die Rechnung einführen muss, welche einen sich bewegenden Körper eben so, wie einen ruhenden antreibt. Bei der Betrachtung der Kräfte selbst kommt sehr viel darauf an, zu wissen, ob sie auf sich bewegende Körper eben so wie auf ruhende wirken, oder nicht.

Anmerkung.

§. 145. Was also die Grösse der Kräfte betrifft, welche kleine sich bewegende Körper antreiben, so ergibt sich dieselbe aus der Wirkung oder dem in der Erklärung beschriebenen kleinen Wege eben so, als wenn die Körperchen ruheten. Wenn nämlich der kleine in S ruhende Körper durch die Kraft p in dem Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $S\sigma = d\omega$ (Figur 11.) fortgestossen wird; so wird derselbe Körper, im Fall er sich so bewegte, dass er in der kleinen Zeit dt den Weg $Ss = ds$ (Figur 12, 13 und 14.) durchlaufen würde, als durch die gleiche Kraft p angetrieben betrachtet werden, wenn er jenseits des Weges Ss ausserdem über den kleinen Weg $s\sigma = d\omega$, in der Richtung der Kraft fortgeführt wird. Diese Bewegung des Körpers wird daher durchaus nichts in der Wirkung der Kraft verändern. Wenn aber der Weg $s\sigma$ (Fig. 12, 13 und 14.) grösser oder kleiner ist, als der kleine Weg $S\sigma$ (Figur 11.); so ersehen wir, dass der kleine Körper durch eine grössere oder kleinere Kraft angetrieben wird. Wenn wir demnach die Wirkungen beliebiger Kräfte auf ruhende Körperchen zu bestimmen im Stande sind, so werden wir auch die Wirkungen aller Kräfte auf sich bewegende Körper bestimmen können, wenn wir nur in jedem Falle die Kräfte, durch welche sich bewegende Körperchen angetrieben werden, richtig bestimmen. Hierbei ist dies stets festzuhalten, dass man einen sich bewegenden kleinen Körper als durch eine Kraft $= p$ angetrieben

annehmen muss, wenn die auf ihn hervorgebrachte Wirkung derjenigen gleich ist, welche diese Kraft auf dasselbe ruhende Körperchen in derselben Zeit hervorbringen würde. Sehen wir daher, wie bei einem ruhenden Körperchen der kleine Weg $S\sigma = d\omega$ sich verhalten wird, wenn andere und andere Kräfte, deren Messung in der Statik gelehrt wird, dasselbe antreiben.

Lehrsatz 2.

§. 146. Die kleinen Wege, über welche derselbe ruhende kleine Körper in demselben Zeittheilchen dt durch verschiedene Kräfte fortgeführt wird, sind den letztern proportional.

Beweis.

Gesetzt der kleine Körper werde durch die Kraft $= p$ im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $d\omega$ fortgeführt, so wird er, wenn zugleich eine andere Kraft $= p$ ihn in derselben Richtung antreibt, durch diese zweite Kraft ebenfalls über einen kleinen Weg $= d\omega$ fortgeführt werden; weil diese Wirkung durch die erstere, welche nur eine kleine Bewegung hervorbringt, keine Störung erleiden wird. Der durch eine Kraft $2p$ fortgetriebene kleine Körper wird daher in dem Zeittheilchen $= dt$ über den kleinen Weg $= 2d\omega$ fortgeführt werden. Wenn auf ähnliche Weise beliebig viele, p gleiche Kräfte, deren Anzahl $= n$ sei, zugleich nach derselben Richtung auf denselben ruhenden kleinen Körper während des Zeittheilchen dt wirken; so werden sie ihn über den kleinen Weg $= nd\omega$ forttreiben und dieser ist daher die Wirkung der Kraft $= np$.

Zusatz 1.

§. 147. Wenn daher von zwei gleichen ruhenden kleinen Körpern der eine durch eine Kraft $= p$, der andere durch eine Kraft $= P$ angetrieben wird und dieselben während des Zeittheilchens dt respective die kleinen Wege $d\omega$ und $d\Omega$ zurücklegen, so haben wir $d\omega : d\Omega = p : P$.

Zusatz 2.

§. 148. Es sind daher diese in demselben Zeittheilchen hervorgebrachten Wirkungen den Kräften proportional, wobei wir dasselbe Maass der Kräfte angenommen haben, welches in der Statik gelehrt wird.

Anmerkung 1.

§. 149. Die Grundlage dieses Beweises besteht darin, dass

ich die Kräfte nur als während einer unendlich kleinen Zeit wirkend annehme, so dass im kleinen Körper auch nur eine unendlich kleine Bewegung, welche man für Null halten kann, erzeugt wird. Da es sich nämlich ereignen kann, dass derselbe Anstoss, welcher bei einem ruhenden kleinen Körper die Kraft $= p$ zeigt, bei dem sich bewegenden eine andere Kraft zeige, so findet diese Ausnahme in unserm Lehrsatze nicht statt. Denn wenn wir uns auch mehrere p gleiche Kräfte gleichsam nach einander auf den kleinen Körper wirkend denken, so werden sie einzeln in ihm dieselbe Wirkung hervorbringen, als ob er ruhete und es wird die unendlich kleine Bewegung nicht das Geringste in ihrer Wirksamkeit verändern. Diese Aufeinanderfolge, welche wir nur in Gedanken zugelassen haben, muss aber ganz beseitigt werden, so dass wir die ganze Kraft nur während des kleinen Zeittheilchens dt als wirksam annehmen.

Anmerkung 2.

§. 150. Stellt man die Frage, warum die bestimmte Kraft p auf den gegebenen kleinen Körper während des Zeittheilchens dt die bestimmte Wirkung $d\omega$ hervosbringt; so liegt der Grund hiervon darin, dass in dem Körper eine gewisse bestimmte Fähigkeit, in Ruhe zu verharren, d. h. seine Trägheit sich befindet. Eine solche Fähigkeit, in Ruhe zu verharren, können wir uns aber nicht ohne ein gewisses Widerstreben denken, welches der Erzeugung der Bewegung entgegenwirkt und je grösser oder kleiner dasselbe ist, desto schwerer oder leichter wird der Wirksamkeit der Kraft Folge geleistet werden. Da nun diese Fähigkeit mit der Trägheit übereinstimmt, so sieht man ein, dass man die letztere zu den Grössen zu zählen habe, so dass die Trägheit verschiedener kleiner Körper nach Verhältniss ihrer Grösse verschieden sein kann. Da wir diese Verschiedenheit bis jetzt noch nicht betrachtet hatten, so haben wir nur die Wirkungen der Kräfte auf denselben oder gleiche kleine Körper, welche nämlich gleiche Trägheit besitzen, erforscht. Nun werden wir zu verschiedenen Körpern übergehen, zur Messung der Trägheit geführt werden und dann einsehen, wie in dem einen Körper eine grössere, in dem andern eine kleinere Trägheit stattfinden könne.

Lehrsatz 3.

§. 151. Wenn gleiche Kräfte ungleiche ruhende kleine

Körper antreiben, so sind die in demselben Zeittheilchen hervorgebrachten Wirkungen der Trägheit der Körper umgekehrt proportional.

Beweis.

(Figur 15.) Denken wir uns einen ruhenden kleinen Körper A, welcher durch eine Kraft $= p$ im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $A\alpha = d\omega$ fortgeführt wird, alsdann wird ein anderer, jenem gleicher kleiner Körper B, durch die gleiche Kraft p und nach derselben Richtung angetrieben, in demselben Zeittheilchen dt über einen gleichen kleinen Weg $B\beta = d\omega$ fortgeführt werden. Diese zwei kleinen Körper mögen nun in Einen zusammenwachsen, welcher letztere also durch eine Kraft $= 2p$ im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $d\omega$ fortgetrieben werden wird; so wird eine doppelte Kraft $2p$ im doppelten kleinen Körper $2A$ dieselbe Wirkung hervorbringen, als die einfache Kraft p in dem einfachen Körper A. Wenn daher n kleine und A gleiche Körper zusammenwachsen, so dass daraus Ein kleiner Körper $= nA$ hervorgeht und dieser durch eine Kraft $= np$ angetrieben wird; so ersieht man aus dem Vorhergehenden, dass dieser im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $d\omega$ fortgeführt werden wird. Da aber die Kraft np den Körper nA im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $d\omega$ forttreibt, so wird, nach dem vorhergehenden Lehrsatze, derselbe Körper nA durch eine Kraft p im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $\frac{d\omega}{n}$ fortgetrieben werden. Auf ähnliche Weise wird der, durch die Kraft p angetriebene, kleine Körper mA im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $\frac{d\omega}{m}$ fortgeführt werden. Hieraus ergibt sich, dass die kleinen Wege, durch welche wir die Wirkungen der Kräfte messen, d. h. $\frac{d\omega}{n}$ und $\frac{d\omega}{m}$ sich umgekehrt verhalten, wie die kleinen Körper nA und mA oder wie ihre Trägheiten.

Erläuterung.

§. 152. Da der kleine Körper A eine bestimmte Trägheit hat, durch welche die Wirkung der ihn antreibenden Kraft bestimmt wird, so werden zwei derartige einander gleiche kleine Körper, welche in Einen zusammenwachsen, einen kleinen Körper darstellen, welcher die doppelte, drei einen Körper,

welcher die dreifache Trägheit besitzt u. s. w. f. Umgekehrt wird man denjenigen kleinen Körper als mit der doppelten Trägheit begabt anzusehen haben, zu dessen Forttreibung über einen gegebenen kleinen Weg und in einer gegebenen kleinen Zeit die doppelte Kraft erforderlich ist. Hieraus erhellt, wie man die Trägheit zu einer Art von Grössen zählen und wie sie in dem einen Körper grösser, in dem andern kleiner sein kann. Alle kleinen Körper nämlich, welche durch gleiche Kräfte in demselben Zeittheilchen über gleiche Wege fortgeführt werden, schätzt man in Beziehung auf ihre Trägheit als einander gleich und es können aus der Verbindung derartiger kleiner Körper beliebig viele Körper entspringen, deren Trägheiten ein beliebiges Verhältniss zu einander haben. Die Grösse der Trägheit ist daher bei der Bestimmung der aus Kräften hervorgehenden Wirkung von der grössten Wichtigkeit und muss desshalb in der Mechanik eifrigst erwogen werden. Da dieselbe nun in dieser Wissenschaft unter besondern Benennungen aufgeführt zu werden pflegt, ist es angemessen, sie durch eine besondere Erklärung zu erläutern.

Erklärung 15.

§. 153. Die Masse eines Körpers oder die Menge seiner Materie nennt man die Grösse der Trägheit, welche sich in dem Körper befindet und vermöge welcher er das Bestreben hat, sowohl in seinem Zustande zu verharren, als auch jeder Veränderung zu widerstehen.

Zusatz 1.

§. 154. Die Masse oder die Menge der Materie der Körper muss daher nicht nach ihrem Umfange, sondern nach der Grösse ihrer Trägheit, vermöge welcher sie in ihrem Zustande zu verharren streben und jeder Aenderung entgegenkämpfen, abgeschätzt werden.

Zusatz 2.

§. 155. Nach der Trägheit wird daher die Menge der Materie beurtheilt und man schätzt nicht denjenigen Körper als mehr Materie enthaltend, welcher einen grössern Raum einnimmt, sondern zu dessen Fortbewegung auf gegebene Weise eine grössere Kraft erforderlich ist.

Zusatz 3.

§. 156. Der vorhergehende Lehrsatz kommt demnach dar-

auf hinaus, dass, wenn zwei ruhende Körper, deren Massen A und B sind, durch gleiche Kräfte angetrieben werden, die kleinen Wege, über welche sie in demselben Zeittheilchen fortgeführt werden, sich umgekehrt wie die Massen verhalten.

Anmerkung.

§. 157. Die Betrachtung der Bewegung hat uns zur Kenntniss mehrerer ausgezeichneten Eigenschaften der Körper geführt, von welchen die erste ihre Trägheit ist, vermöge welcher sie in demselben absoluten Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung zu beharren streben. Zuerst haben wir nur die Trägheit im allgemeinen kennen gelernt, jetzt aber sehen wir auch vollständig ein, dass sie eine Grösse und der Ausmessung fähig ist und hierdurch wird dasjenige deutlich bezeichnet, was man im gemeinen Leben zu unbestimmt durch die Benennung der Masse oder der Menge der Materie auszudrücken pflegt; hiervon haben wir also nun, wie es scheint, einen bestimmten Begriff erlangt. In den Körpern befindet sich daher ausser ihrer Ausdehnung etwas, was gleichsam ihr Wesen ausmacht, nämlich ihre Trägheit oder Materie, welche nothwendig mit der Festigkeit oder der Undurchdringlichkeit verbunden zu sein scheint, man sieht nämlich auf keine Weise ein, was ausser der Materie undurchdringlich sein könne. Ferner kann man sich keine Materie ohne Ausdehnung vorstellen, indessen bleibt es noch zweifelhaft, ob dieselbe so nothwendig mit dem Umfange verbunden sei, dass Körper von derselben Last auch eine gleiche Masse oder Menge der Materie enthalten. Kein Grund spricht nämlich für eine derartige Gleichheit und wenn wir die Erfahrung zu Rathe ziehen, so finden wir, dass bei Körpern von gleichem Umfange in dem einen mehr, in dem andern weniger Materie enthalten ist. Obgleich man nämlich einzuwerfen pflegt, dass entweder nicht das ganze Volumen von Materie erfüllt sei, oder dass die in den Poren enthaltene Materie nicht zum Körper gehöre; so wird hierdurch doch keineswegs bewiesen, dass alle gleich grossen Theilchen der Körper auch gleiche Trägheit besitzen. Diese besonders schwierige Frage gehört aber nicht hierher, wenn es auch wahrscheinlich ist, dass wenigstens Materien von einer zweifachen Art in der Welt existiren und zwar ist in der einen bei gleichem Volumen die Masse viel grösser als in der andern.

Lehrsatz 4.

§. 158. Wenn kleine Körper, welche in Bezug auf ihre Masse ungleich sind, sich in Ruhe befinden und einzeln durch beliebige Kräfte angetrieben werden, so stehen die kleinen Wege, über welche sie in demselben Zeittheilchen fortgetrieben werden, in einem Verhältniss, welches aus dem directen der Kräfte und dem indirecten der Massen zusammengesetzt ist.

Beweis.

Es werde der ruhende kleine Körper, dessen Masse $= A$ ist, durch die Kraft p angetrieben und im Zeittheichen dt über den kleinen Weg $d\omega$ fortgeführt. Würde nun derselbe Körper A durch eine andere Kraft q angetrieben, so hätten wir den von ihm in demselben Zeittheilchen zurückgelegten kleinen Weg, nach Lehrsatz 2, $= \frac{qd\omega}{p}$. Wird aber ein anderer ruhender kleiner Körper, dessen Masse $= B$ ist, durch die Kraft q angetrieben, so legt derselbe, nach Lehrsatz 3, in demselben Zeittheilchen den Weg $= \frac{Aqd\omega}{Bp}$ zurück. Werden daher die ruhenden kleinen Körper A und B respective durch die Kräfte p und q angetrieben, so verhalten sich die von ihnen in demselben Zeittheilchen zurückgelegten kleinen Wege, wie

$$d\omega : \frac{Aqd\omega}{Bp}, \text{ d. h. wie } \frac{p}{A} : \frac{q}{B}.$$

Zusatz 1.

§. 159. Wenn daher der kleine Weg $d\omega$, über welchen ein kleiner Körper, dessen Masse gleich A ist, durch eine Kraft p im Zeittheilchen dt fortgetrieben wird, bekannt ist; so erhält man den kleinen Weg, über welchen ein anderer kleiner Körper, dessen Masse $= B$, durch eine Kraft q in demselben Zeittheilchen fortgeführt wird, $= \frac{Aqd\omega}{Bp}$.

Zusatz 2.

§. 160. Absolut zu reden, so ist der kleine Weg, über welchen ein kleiner Körper im Zeittheilchen dt fortgeführt wird, der Kraft dividirt durch die Masse des Körpers proportional; diess gilt auch von einem sich bewegenden kleinen Körper, wenn nur dasjenige gehörig beobachtet wird, woran wir oben erinnert haben.

Anmerkung.

§. 161. Wie die Wirkung von Kräften, welche beliebige kleine Körper antreiben, sowohl von der Grösse der Kräfte, als auch von der Masse der Körper abhängig ist, wenn nämlich die Zeittheilchen einander gleich sind, haben wir so bestimmt, dass kein Zweifel an der nothwendigen Wahrheit der hier aufgestellten Regel übrig bleiben kann. Wir haben hier zwar nur eine Vergleichung angestellt, welche zwischen jenen kleinen Wegen, den Kräften und den Massen stattfindet, man hat aber zu bemerken, dass zwischen derartigen heterogenen Grössen keine absolute Bestimmung angestellt werden kann. Wir können ferner nicht anders zu absoluten Maassen gelangen, als indem wir eine gewisse in der Welt wahrgenommene Wirkung als bekannt annehmen und auf sie, gleichsam wie auf die Einheit, alle übrigen Wirkungen zurückführen; wie dies am bequemsten geschehen könne, werden wir in der Folge ausführlich zeigen. Uebrigens erhellt hieraus noch nicht, wie die Wirkung der Kräfte sich verhalten wird, wenn die Zeittheilchen ungleich sind, auch darf man hiernach nicht von einem verflossenen Zeittheilchen dt zum folgenden fortschreiten, weil der kleine Körper wegen der in dem erstern empfangenen Bewegung schon in Folge der Trägheit während des folgenden Zeittheilchens einen gewissen kleinen Weg zurücklegen würde, welchem man den, durch die Kraft hervorgebrachten, hinzufügen müsste. Damit wir hierdurch unsere früheren Bestimmungen nicht verwirren, haben wir alle Zeittheilchen einander gleich angenommen und es kann auch auf die Zeit keine Rücksicht genommen werden, wenn man nicht die dem Körper schon beigebrachte Geschwindigkeit in Betracht zieht, deren Erforschung wir in der folgenden Aufgabe unternehmen werden. Hierdurch wird umgekehrt dasjenige, was wir bis jetzt ohne Rücksicht auf die Geschwindigkeit vorgetragen haben, deutlicher gemacht werden.

Aufgabe 9.

§. 162. Ein kleiner Körper bewegt sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit und wird zugleich durch eine Kraft in der Richtung seiner Bewegung angetrieben; man soll die augenblickliche, in seiner Bewegung und Geschwindigkeit hervorgebrachte, Aenderung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 16.) Es sei A die Masse des kleinen Körpers, wel-

cher sich in der Richtung AB mit der Geschwindigkeit v bewegt, mit welcher er in Folge der Trägheit stets gleichförmig in gerader Linie fortgehen würde, wenn nicht eine äussere Kraft ihn antriebe. Hat er nämlich in der Zeit t den Weg $AS = s$ beschrieben und geht er hierauf im Zeittheilchen dt durch den kleinen Weg $Ss = ds$ fort, so wird seine Geschwindigkeit in S, $\frac{ds}{dt} = v$ und da diese constant ist; so hat man, wenn keine Kraft vorhanden ist,

$$\frac{dds}{dt^2} = 0.$$

Nun setzen wir aber voraus, dass der kleine Körper, wenn er aus S heraustritt, durch eine Kraft p in der Richtung SB der Bewegung angetrieben werde; offenbar wird alsdann seine Bewegung nicht mehr gleichförmig, sondern beschleunigt werden und es wird daher $\frac{dds}{dt^2}$ nicht mehr $= 0$ sein, sondern irgend einen positiven Werth haben, weil die antreibende Kraft die Geschwindigkeit vermehrt und in der Richtung nichts verändert. Da nun die Formel $\frac{dds}{dt^2}$ jenen kleinen Weg enthält, über welchen der kleine Körper jenseits des, vermöge der ihm beigebrachten Bewegung beschriebenen, Weges fortgeführt wird; so wird dieselbe direct der antreibenden Kraft p und indirect der Masse A, oder es wird $\frac{dds}{dt^2}$ proportional sein $\frac{p}{A}$. Eine absolute Gleichheit können wir nur dann zwischen ihnen aufstellen, wenn alle Grössen auf bestimmte Einheiten zurückgeführt werden; wir können daher jetzt nur die unbestimmte Gleichung

$$\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$$

aufstellen, wo λ eine Zahl bezeichnet, welche durch unten aufzustellende Einheiten bestimmt werden wird. Die Wirkung der antreibenden Kraft p besteht demnach darin, dass $dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$ wird, wo wir das Element dt als constant angenommen haben. Da nun die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$, also $dds = dvdt$ ist, so erhalten wir

$$dv = \frac{\lambda p dt}{A},$$

wodurch das Increment der Geschwindigkeit bekannt wird,

welches die Kraft p während des Zeittheilchens dt im kleinen Körper A hervorbringt; wenn nämlich die Richtung der Kraft mit der der Bewegung übereinstimmt und diese durch jene beschleunigt wird.

Zusatz 1.

§. 163. Die Wirkung der antreibenden Kraft p auf einen kleinen Körper, dessen Masse $= A$ ist und welcher sich nach derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegt, mit der er in dem Zeittheilchen dt einen kleinen Weg ds zurücklegen würde, besteht demnach darin, dass $\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$ oder $dv = \frac{\lambda p dt}{A}$ ist, wo man dt als constant annimmt.

Zusatz 2.

§. 164. Ist umgekehrt die Beschleunigung der Bewegung bekannt, welche entweder $\frac{dds}{dt^2}$ oder $\frac{dv}{dt}$ ist, so kann man die Kraft angeben, durch welche jene erzeugt wird. Es ist nämlich diese Kraft $p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dds}{dt^2} = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt}$ und zwar muss man diese als nach der Richtung der Bewegung wirkend annehmen.

Zusatz 3.

§. 165. Ist aber die Richtung der antreibenden Kraft der Richtung der Bewegung entgegengesetzt, so wird diese durch jene eben so stark verzögert werden; wir erhalten nämlich

$$\frac{dds}{dt^2} = -\frac{\lambda p}{A} \text{ oder } \frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda p}{A}.$$

Man kann nämlich die Kraft, in Beziehung auf den vorliegenden Fall, als negativ ansehen.

Erläuterung.

§. 166. Wir haben hier $dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$ gefunden und man muss daher annehmen, dass der kleine Körper im Zeittheilchen dt den kleinen Weg $ds + dds$ durchlaufe, während er vermöge der ihm inwohnenden Bewegung nur den kleinen Weg ds zurücklegen würde. Es scheint daher dds derjenige kleine Weg zu sein, welchen er jenseits des, vermöge der ihm inwohnenden Bewegung zurükgelegten, Weges in Folge der antreibenden Kraft durchläuft; so dass $\frac{\lambda p dt^2}{A}$ der kleine Weg $d\omega$ sein würde,

über welchen ein ruhender kleiner Körper A, nach unserer Annahme, durch die Kraft p im Zeittheilchen dt fortgetrieben wird. Man muss aber bemerken, dass hier dds den Ueberschuss des im Zeittheilchen dt durchlaufenen kleinen Weges über den, im vorhergehenden Zeittheilchen dt durchlaufenen, Weg ausdrückt, wenn dieselbe Kraft p sich in Wirksamkeit befindet. Wenn daher der im gegenwärtigen Zeittheilchen dt durchlaufene kleine Weg $= ds + d\omega$ ist, wo ds den vermöge der inwohnenden Bewegung beschriebenen und $d\omega$ den durch die Kraft p hinzugefügten kleinen Weg bezeichnet; so wird er im vorhergehenden Zeittheilchen dt, vorausgesetzt dass dieselbe Kraft ihn antrieb, nur den kleinen Weg $ds - d\omega$ zurückgelegt haben, nämlich einen kleinern, als wenn er gar keine Einwirkung erlitten hätte. Da nun dds den Unterschied der beiden kleinen Wege $ds + d\omega$ und $ds - d\omega$ ausdrückt, so haben wir

$$dds = 2d\omega, \text{ also } d\omega = \tfrac{1}{2}dds = \frac{\lambda p dt^2}{2A};$$

es ist daher der kleine Weg $d\omega$, über welchen der ruhende kleine Körper durch die Kraft p im Zeittheilchen dt fortgetrieben wird, halb so gross als unser dds. In der Auflösung habe ich das letztere zwar nicht gleich, sondern nur proportional angenommen, indessen ist hieraus abzunehmen, dass es jener nicht an Kraft fehlen werde. Es wird jedoch der Mühe werth sein, das hier Gesagte noch auf andere Weise darzuthun.

Aufgabe 10.

§. 167. Es ist die Beschleunigung gegeben, welche einem sich bewegenden kleinen Körper A durch eine gegebene, nach der Richtung der Bewegung wirkende, Kraft p im Zeittheilchen dt beigebracht wird; man soll den kleinen Weg $d\omega$ bestimmen, welchen derselbe, aber ruhende und durch dieselbe Kraft angetriebene, Körper A in derselben Zeit dt zurücklegen würde.

Auflösung.

Da die Beschleunigung gegeben ist, so haben wir nach dem Obigen $dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$, wo das Element dt als constant angenommen worden ist. Denken wir uns nun, dass die antreibende Kraft p dieselbe bleibe, mag der kleine Körper sich geschwinder oder langsamer bewegen, so dass wir die Grösse p als eine constante ansehen können; oder bestimmen wir vielmehr hierdurch die Bewegung während einer Zeit t, die jedoch

selbst noch unendlich klein sei, so dass kein Zweifel übrig bleibt, dass die Kraft p unterdessen einen constanten Werth beibehalte. Da wir nun $\frac{dds}{dt} = \frac{\lambda p dt}{A}$ haben, so wird durch Integration $\frac{ds}{dt} = C + \frac{\lambda pt}{A}$ oder $ds = Cdt + \frac{\lambda ptdt}{A}$ und wenn wir auf's neue integriren,

$$s = Ct + \frac{\lambda pt^2}{2A}.$$

Dies ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg und zwar bezeichnet Ct den Weg, welchen der kleine Körper A vermöge der ihm inwohnenden Bewegung durchlaufen haben würde, wenn keine Kraft ihn angetrieben hätte; der Theil $\frac{\lambda pt^2}{2A}$ ist aber die, durch die Wirksamkeit der Kraft ausserdem hinzugefügte, Vermehrung desselben. Setzen wir nun die ganze Zeit t unendlich klein und schreiben dt statt t, so wird $\frac{\lambda pdt^2}{2A}$ den kleinen Weg $d\omega$ ausdrücken, über welchen der kleine Körper A jenseits des, vermöge der ihm inwohnenden Bewegung durchlaufenen, Weges durch die Kraft p im Zeittheilchen dt fortgetrieben werden würde. Demselben ist aber derjenige kleine Weg $d\omega$ gleich, über welchen der ruhende kleine Körper A in demselben Zeittheilchen dt durch die gleiche Kraft p fortgetrieben werden würde; wir haben daher

$$d\omega = \frac{\lambda pdt^2}{2A} \text{ oder } d\omega = \tfrac{1}{2}dds,$$

wie wir schon angegeben haben.

Zusatz 1.

§. 168. Der kleine Weg, über welchen ein ruhender Körper A im unendlich kleinen Zeittheilchen dt durch eine Kraft p getrieben wird, ist ein Differential zweiten Grades oder unendlich viel mal kleiner als der Weg, welchen er mit irgend einer endlichen Geschwindigkeit in demselben Zeittheilchen beschreiben würde.

Zusatz 2.

§. 169. Dieser kleine Weg $d\omega = \frac{\lambda pdt^2}{2A}$ ist ferner gleich der Hälfte des zweiten Differentials dds, welches während desselben Zeittheilchens dt, durch dieselbe Kraft p und bei dem-

selben beliebig sich bewegenden kleinen Körper A hervorgebracht wird.

Zusatz 3.

§. 170. Wir erfahren hieraus, dass der kleine Weg $d\omega$, welchen wir oben als der antreibenden Kraft p direct und der Masse A indirect proportional dargestellt haben, ausserdem im doppelten Verhältniss des Zeittheilchens dt steht.

Anmerkung.

§. 171. Mittelst des Bisherigen sind wir im Stande, die Wirkungen der Kräfte auf beliebig sich bewegende kleine Körper zu bestimmen, wenn nur die Richtung der antreibenden Kraft mit der Richtung der Bewegung übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Es bleibt noch übrig zu untersuchen, wie dieselben sich verhalten werden, wenn die Richtung der Kraft gegen die Richtung der Bewegung geneigt ist, welche Untersuchung sich sehr leicht anstellen lässt, indem man die Bewegung des Körpers, den oben vorgetragenen Vorschriften entsprechend, nach zwei oder drei festen Richtungen zerlegt. Ist diese Zerlegung auch nur eine ideale, so wird sie, wie sie mit der Wahrheit übereinstimmt, auch mit dem glücklichsten Erfolge der Wirksamkeit der Kräfte angepasst und es wird auf diese Weise die ganze Arbeit mittelst derselben Formel ausgeführt. Obgleich nämlich durch schief wirkende Kräfte nicht nur die Geschwindigkeit des kleinen Körpers, sondern auch seine Richtung verändert wird, so ist diese letzte Aenderung doch zugleich in der Aenderung der Seitenbewegungen enthalten, so dass man durchaus keiner besondern Formeln für die Ablenkung der Richtung bedarf. Wie man in diesen Fällen die Rechnung anzustellen habe, wollen wir nun zeigen.

Aufgabe 11.

§. 172. (Fig. 17.) Ein kleiner Körper bewegt sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit in der Richtung Ss und wird durch eine gewisse Kraft in der Richtung Sp angetrieben; man soll die, im gegebenen Zeittheilchen dt auf die Bewegung des Körpers hervorgebrachte, Wirkung der Kraft bestimmen.

Auflösung.

Es sei A die Masse des kleinen Körpers, welcher vermöge der ihm inwohnenden Bewegung im Zeittheilchen dt den kleinen Weg $Ss = ds$ zurücklegen würde, seine Geschwindigkeit

in S würde daher $= \frac{ds}{dt}$ sein. Er werde aber inzwischen nach der Richtung Sp durch eine Kraft p angetrieben, alsdann besteht die Wirkung der letztern darin, dass der Körper sich nach Verlauf des Zeittheilchens dt nicht in s, sondern in σ befinden wird, dass er also ausserdem über den kleinen, der Richtung der Kraft Sp parallelen, Weg $s\sigma = d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$ fortgeführt ist. Um diese Wirkung bequemer zu bestimmen, zerlege man die Bewegung längs je zwei beliebiger Richtungen Sp und Sq, von welchen die erstere mit der Richtung der Kraft übereinstimmt. Wäre daher diese nicht vorhanden, so würde der kleine Körper in der Richtung Sp den kleinen Weg $Sp = dx$ und in der Richtung Sq den kleinen Weg $Sq = dy$ beschreiben, wo das Parallelogramm $Spsq$ vollendet ist. Da er aber, wenn die Kraft p hinzutritt, nach Verlauf des Zeittheilchens dt sich in σ befindet, wo $\sigma\pi \# sp$ gezogen ist; so wird die Bewegung dieselbe sein, als ob er in der Richtung Sp den den Weg
$$S\pi = dx + d\omega$$
und in der Richtung Sq wie vorher den Weg $Sq = dy$ beschrieben hätte. Die Kraft p wirkt also nur auf die Seitenbewegung in der Richtung Sp, nach welcher die Kraft p selbst gerichtet ist und da die andere Seitenbewegung längs Sq unverändert bleibt; so wird die Bewegung längs Sp so beschleunigt, dass wir haben
$$ddx = 2d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{A}.$$

Wenn man daher die Bewegung längs je zwei oder je drei Richtungen zerlegt, von denen die eine mit der Richtung der Kraft Sp übereinstimmt, so wird diese allein eben so durch die Kraft afficirt, als wenn der kleine Körper sich in Wirklichkeit nach dieser Richtung bewegte und es werden die übrigen Seitenbewegungen durchaus keine Einwirkung von dieser Kraft erleiden.

Zusatz 1.

§. 173. So wie daher, nachdem diese Zerlegung der Bewegung angestellt ist, wenn keine antreibende Kraft da wäre,
$$\frac{ddx}{dt^2} = 0 \text{ und } \frac{ddy}{dt^2} = 0$$
sein würde; wird, wenn die längs Sp antreibende Kraft hinzutritt,
$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A} \text{ sein, aber } \frac{ddy}{dt^2} = 0 \text{ bleiben.}$$

Zusatz. 2.

§. 174. Auf ähnliche Weise wird, wenn man die Bewegung längs Ss in je drei Seitenbewegungen zerlegt und die auf diese Weise im Zeittheilchen dt beschriebenen Elemente dx, dy und dz sind, von denen das erste dx in der Richtung der antreibenden Kraft p angenommen ist, die Bewegung in den drei Formeln

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = 0 \text{ und } \frac{ddz}{dt^2} = 0$$

enthalten sein.

Zusatz 3.

§. 175. Wird der kleine Körper A zugleich durch die drei Kräfte p, q und r längs jener drei Richtungen, in welchen die Elemente dx, dy und dz angenommen werden, angetrieben; so so schliesst man aus dem Vorhergehenden, dass die Bewegung des Körpers durch die drei Formeln

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A} \text{ und } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}$$

bestimmt werden wird.

Anmerkung 1.

§. 176. Ist die Bewegung des kleinen Körpers nach der obigen Weise längs je drei beliebiger festen Richtungen zerlegt und wird derselbe durch beliebige Kräfte angetrieben, so kann man die Störung der Bewegung leicht durch derartige Formeln bestimmen. Man zerlege nämlich alle antreibenden Kräfte längs derselben drei Richtungen, woraus die Kräfte p, q und r hervorgehen werden. Die erste p wirke längs der Richtung OA, in welcher man das Element dx, (Figur 4.) die zweite q längs OB, in welcher man dy und die dritte r längs OC, in welcher man das Element dz annimmt und es mögen die einzelnen Kräfte dahin streben, die Bewegungen längs dieser Richtungen zu beschleunigen. Auf diese Weise wird die Bewegung so gestört werden, dass, wenn man das Element dt der Zeit constant setzt, wir haben werden:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}; \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}; \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

Hierbei hat man zu bemerken, dass, wenn eine dieser Kräfte nach der entgegengesetzten Seite hin wirkt, dieselbe negativ genommen werden muss, damit die ihr entsprechende Seitenbewegung verzögert werde. Ferner kann in je drei Formeln dieser Art die Störung aller Bewegungen, auf welche

Weise auch der kleine Körper durch Kräfte angetrieben werden mag, eingeschlossen werden und da sie einander ähnlich sind, kann man auf diese Weise annehmen, dass die ganze Mechanik sich auf ein einziges Princip stütze.

Anmerkung 2.

§. 177. Dieses einzige Princip umfasst aber auch selbst die Grundsätze, welche wir im vorhergehenden Kapitel für die freie Bewegung oder den Fall, in welchem die antreibenden Kräfte verschwinden, aufgestellt haben; alsdann geben unsere Formeln nämlich die gleichförmige geradlinige Bewegung an. Die Grundlage der ganzen Mechanik wird daher in diesen einen Satz eingeschlossen: Wird ein kleiner Körper, dessen Masse $= A$ ist, durch eine Kraft p angetrieben und legt derselbe nach Zerlegung der Bewegung in der Richtung dieser Kraft, während des Zeittheilchens dt, den kleinen Weg ds mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v$ zurück, so wird

$$\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A} \text{ oder } dv = \frac{\lambda p dt}{A}.$$

Es ist also die, in der Richtung der antreibenden Kraft empfangene, Zunahme der Geschwindigkeit direct dem Product der antreibenden Kraft in das Zeittheilchen und indirect der Masse des kleinen Körpers proportional.

Nun pflegt die Frage angeregt zu werden, ob dieses einzige Princip, worauf man die ganze Mechanik also die ganze Wissenschaft der Bewegung aufbaut, nothwendig oder nur genähert wahr sei. Die Entscheidung derselben durch die bis jetzt aufgestellten Beweise erscheint nicht schwierig. Wo nämlich auch immer die Körper sich befinden mögen, so können sicher keine andern Gesetze bei ihrer Bewegung stattfinden und alle Formeln, ausser der $\frac{pdt}{A}$, welchen man die Zunahme der Geschwindigkeit proportional setzen wollte, würden offenbare Widersprüche enthalten. Man darf demnach auf keine Weise daran zweifeln, dass dieses Princip zu den nothwendigen Wahrheiten gezählt werden müsse. Ferner können wir nicht nur auf der Erde, wo man seine Wahrheit durch Versuche zu bestätigen im Stande ist, sondern auch von den Planeten und allen Himmelskörpern kühn aussprechen, dass alle Bewegungen, welche auch im-

merhin dort stattfinden mögen, durch dieses einzige Princip gelenkt und geordnet werden. Diese Frage über die Notwendigkeit oder Annäherung pflegt man aber nicht in Betreff dieses Princips, sondern einiger andern Regeln, welche unter dem Namen der Gesetze der Bewegung aufgeführt werden, anzuregen. So weit aber diese Gesetze auf richtige Weise aus unserm Princip hervorgehen, muss man sie für gleich nothwendig halten; diejenigen Gesetze aber, welche man auf gewisse Arten von Körpern, wie die elastischen, nicht elastischen und flüssigen beschränkt, werden, wenn man solche Körper als existirend zugibt, auf gleiche Weise nothwendig wahr sein, wenn man sie nur auf richtige Weise aus unserm Princip abgeleitet hat.

Anmerkung 3.

§. 178. In den frühern Theilen der Mechanik hatte ich zwar die Principien dieser Wissenschaft schon so aufgestellt, dass ihre Wahrheit ausser allen Zweifel gesetzt war; hier erschien es aber angemessen, dieselben aus einer genauern Erwägung der Natur der Körper abzuleiten und auf ein einziges Princip zurückzuführen, aus welchem man hierauf alles, was die Bewegung betrifft, leichter ableiten kann. Obgleich ich ferner alles, was die Bewegung unendlich kleiner Körper oder gleichsam blosser Punkte betrifft, dort bereits ausführlich untersucht habe, wird es doch angenehm sein, kurz auseinander zu setzen, wie dasselbe aus einem einzigen Princip hervorgehen wird und zwar werde ich diese Behandlung so anstellen, dass der Weg zur Erforschung der Bewegung endlicher Körper mehr geebnet werde. Da ich nun hier das Verhältniss oder die Proportionalität zwischen verschiedenen Grössen, welche in den Begriff der Bewegung eintreten und an sich ungleichartig sind, bestimmt habe und dieselben nur dann auf absolute Maasse zurückgeführt werden können, wenn man eine gewisse Bewegung als bekannt annimmt; so ist es hier durchaus nothwendig, ehe wir weiter gehen, zunächst irgend eine bekannte Bewegung, wie etwa den Fall schwerer Körper, sorgfältiger zu entwickeln und hierdurch absolute Maasse aufzustellen, deren wir uns später bequem bedienen können. Obgleich die Annahme einer solchen Bewegung von unserer Willkühr abhängt und diese Bewegung auf die Erfahrung zurückgeführt wird, so wird doch hierdurch der Nothwendigkeit unseres Princips nichts entzogen; da die Willkühr sich nur auf absolute Maasse erstreckt und diese von bestimmten durchaus beliebigen Einheiten abhängig sind.

Kapitel IV.

Von den aus dem Falle schwerer Körper entnommenen absoluten Maassen.

Erklärung 16.

§. 179. Die Schwere ist diejenige Kraft, durch welche alle Körper in der Nähe der Oberfläche der Erde abwärts getrieben werden; die Kraft, welche einen beliebigen Körper in Folge der Schwere nach unten zu antreibt, wird sein Gewicht genannt.

Zusatz 1.

§. 180. Die Schwere ist eine äussere Ursache, welche die irdischen Körper abwärts treibt, man darf sie daher den Körpern nicht als eine gewisse Eigenschaft beilegen.

Zusatz 2.

§. 181. Ein in der Nähe der Erdoberfläche losgelassener Körper wird daher, wenn er sich auch in Ruhe befindet, zur Bewegung nach unten angetrieben und so lange sinken, bis er auf Gegenstände trifft, welche das weitere Sinken verhindern.

Zusatz 3.

§. 182. So lange das Sinken verhindert ist, mag nun der Körper auf einem unbeweglichen Gegenstande liegen oder aufgehängt sein, zeigt sich sein Gewicht durch einen Druck.

Erläuterung.

§. 183. Die tägliche Erfahrung zeigt überflüssig, dass alle Körper, welche unsern Sinnen aufstossen, schwer sind; erscheinen aber einige vielmehr leicht, indem sie nach oben zu steigen suchen, so ist die Ursache hiervon der Luft zuzuschreiben;

denn wenn diese fortgenommen ist, sinken die leichtesten Körper eben so geschwind als die schwersten herab. Hier aber abstrahiren wir von allen Hindernissen, welche sich dem Sinken der Körper zu widersetzen pflegen. Ruft man ferner die Versuche zu Hülfe, so lernen wir, dass nach Entfernung aller Hindernisse der Bewegung erstens alle Körper gleich schnell herabsinken und zweitens, mögen sie ruhen oder sich bewegen, durch eine gleiche Kraft abwärts getrieben werden. Diese zwei Versuche nehme ich daher als bekannt an, wenn sie auch eine weitere Kenntniss der Bewegung erfordern, da wir uns hier nur vorgenommen haben, feste Maasse aufzustellen; es kommt aber zu diesem Ende gar nicht darauf an, woher sie uns bekannt geworden sind.

Anmerkung.

§. 184. Dass die Schwere eine Kraft sei, welche von aussen her auf die Körper wirkt und sie abwärts treibt, erkennen auch diejenigen an, welche als ihre Ursache die Anziehung annehmen. Sie behaupten nämlich, dass die Körper nicht durch einen gewissen eigenen Instinkt gegen die Erde getrieben, sondern durch eine anziehende Kraft der Erde angezogen werden. Sie fassen die Sache so auf, als ob die Erde nach jeder Richtung Kräfte aussende, welche die sie umgebenden Körper ergreifen und gegen die Erde treiben; sie glauben aber nicht, dass diese Aussendung von Kräften durch Hülfe eines zwischenliegenden Mittels erfolge, sondern dass sie auf gleiche Weise stattfinden müsste, wenn auch alle Materie zwischen der Erde und den Körpern aufgehoben wäre. Es würde daher die Schwere eine unmaterielle Kraft sein, welche auf die Körper wirkte, aber so mit der Erde verbunden wäre, dass sie mit der Aufhebung der letztern zugleich verschwinden würde; die Sache würde sich daher so verhalten, als ob ein gewisser Geist die Körper abwärts triebe. Wie nämlich sonst eine Kraft sich durch weite Entfernungen von der Erde, ohne Unterstützung irgend einer zwischenliegenden Materie, fortpflanzen könne, kann man auf keine Weise einsehen. Man denke sich etwa zwei Körper A und B in grosser Entfernung von einander, zwischen denen durchaus keine Materie existire und es befinde sich in der Umgebung des Körpers A durchaus nichts, was sich auf B bezieht; es wird alsdann im erstern nichts verändert werden, wenn man den zweiten aufhebt. Hiernach scheint eine derar-

tige Aussendung von Kräften der Vernunft zu widersprechen. Es ist vielmehr mit der Wahrheit übereinstimmend, dass die Schwerkraft aus der Wirksamkeit einer lockern und unsern Sinnen entgehenden Materie entspringe. Wenn wir auch die Weise, nach welcher eine solche Kraft hervorgebracht wird, nicht deutlich darthun können, so würde es doch keineswegs angemessen sein, zu derartigen verborgenen Eigenschaften seine Zuflucht zu nehmen. Dass aber in Flüssigkeiten derartige Kräfte entstehen können, wird in der Hydrodynamik gelehrt. Wenn aber die Begünstiger der Anziehung sagen, Gott habe der Erde die anziehende Kraft beigelegt, so behaupten sie hiermit nichts anderes, als dass Gott unmittelbar die Körper gegen die Erde antreibe. Wir wollen nun im allgemeinen die niedersteigende Bewegung eines, durch die Schwere abwärts getriebenen, kleinen Körpers untersuchen.

Aufgabe 12.

§. 185. Ein kleiner Körper wird durch eine constante Kraft beständig abwärts getrieben und fängt seine Bewegung von der Ruhe an; man soll die zu einer gegebenen Zeit zurückgelegte Höhe, wie auch die von ihm erlangte Geschwindigkeit bestimmen.

Auflösung.

(Figur 18.) Es sei A die Masse des kleinen Körpers, welcher sich zuerst im Punkt A in Ruhe befunden hat und von da durch die constante Kraft p beständig abwärts getrieben wird, durch deren Wirkung er, nach Entfernung aller Hindernisse, längs der vertikalen geraden Linie AG herabsteigen wird. Nach Verlauf der Zeit t sei er nun nach S gelangt, indem er die Höhe $AS = s$ zurückgelegt hat; nimmt man das Element der Zeit dt als constant an, so wird seine Bewegung bestimmt durch die Gleichung

$$dds = \frac{\lambda p dt^2}{A} \text{ oder } \frac{dds}{dt} = \frac{\lambda p dt}{A},$$

deren Integral ist $\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A} + \text{Const.}$

Es drückt aber $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit im Punkte S aus und da diese in A, wo $t = 0$, nach der Voraussetzung verschwindet; so ist die durch die Integration eingeführte Constante $= 0$, so dass wir haben

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dt, so wird $ds = \frac{\lambda ptdt}{A}$ und wenn man auf's neue integrirt,

$$s = \frac{\lambda pt^2}{2A},$$

weil für die Zeit $t = 0$, die Höhe $AS = s$ verschwinden muss. Nach Verlauf der Zeit t ist demnach der kleine Körper A durch eine Höhe

$$AS = s = \frac{\lambda pt^2}{2A}$$

herabgestiegen und hat in S die Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}$$

erlangt.

Zusatz 1.

§. 186. Die beim Fall zurückgelegte Höhe ist daher dem Quadrate der Zeit, die erlangte Geschwindigkeit aber der Zeit selbst proportional; in beiden findet das directe Verhältniss der antreibenden Kraft p und das indirecte der Masse A statt.

Zusatz 2.

§. 187. Die in S erlangte Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist so gross, dass, wenn der Körper sich mit derselben gleichförmig bewegte, er in der Zeit t den Weg

$$\frac{tds}{dt} = \frac{\lambda pt^2}{A},$$

d. h. das doppelte des Weges $s = \frac{\lambda pt^2}{2A}$ zurücklegen würde.

Zusatz 3.

§. 188. Da nach der Erfahrung alle Körper, wenn die Hindernisse entfernt sind, gleich schnell herabsteigen, so muss nothwendig $\frac{\lambda p}{A}$ oder $\frac{p}{A}$ eine constante Grösse sein. Es hat daher die Kraft p, welche einen jeden Körper abwärts treibt, oder sein Gewicht ein constantes Verhältniss zu seiner Masse A.

Erläuterung.

§. 189. Wenn von dem Falle schwerer Körper die Rede ist, bezeichnet der Buchstab p das Gewicht des Körpers, wovon wir eine bestimmte Idee haben, da selbst die Gewicht-

maasse sehr bekannt sind; der Buchstab A bezeichnet aber die Masse desselben Körpers, deren an sich dunklerer Begriff eben dadurch hinreichend klar aufgefasst wird, dass sie dem Gewichte proportional ist. Ferner haben wir auch eine deutliche Vorstellung von der Zeit t, da wir ihre Grösse durch ganz bestimmte Maasse, wie Secunden, Minuten oder Stunden auszudrücken im Stande sind. Die Höhe s wird ferner, da sie eine gerade Linie ist, durch geometrische Maasse bestimmt. Der Buchstab λ aber, durch welchen die Proportionalität ausgedrückt wird, nimmt an und für sich keinen bestimmten Werth an, sondern es muss dieser stets ein anderer werden, so wie man die übrigen Grössen auf die einen oder die andern Maasse oder Einheiten bezieht. Sobald wir nun die übrigen Grössen p, A, t und s durch bestimmte Maasse ausdrücken, nimmt auch λ einen bestimmten Werth an, welcher so beschaffen sein muss, dass er in einem einzigen Falle die Wahrheit darstelle; alsdann wird er stets denselben Werth beibehalten, so lange wir uns nämlich derselben Maasse bedienen. Diesen Werth muss man aber aus der Erfahrung nehmen, da auch die angenommenen Maasse sich hierauf stützen. Durch die Erfahrung lernen wir ferner, wie gross die Höhe ist, aus welcher ein schwerer Körper in einer gegebenen Zeit herabsinkt, wesshalb wir λ einen solchen Werth beilegen müssen, dass unsere für die Höhe gefundene Formel $s = \frac{\lambda p t^2}{2A}$, wenn sie diesem Falle angepasst wird, eben die durch die Erfahrung gegebene Höhe darstelle.

Anmerkung.

§. 190. Es kommt demnach alles darauf hinaus, dass wir für alle in unsere Formeln eintretenden Grössen bestimmte Maasse aufstellen, deren wir uns in der Folge beständig bedienen, wenn wir nämlich die Erscheinungen aller Bewegungen durch bekannte Maasse ausdrücken wollen. Es sind aber fünf Arten von Grössen, in denen die Bestimmung einer jeden Bewegung enthalten ist:

1) der durchlaufene Weg, welcher eine Linie, also eine geometrische Grösse und dessen Maass daher keinem Zweifel unterworfen ist;
2) die Zeit, deren Maass sehr bekannt ist, und die Hauptsache besteht darin, eine wie grosse Zeit wir als Einheit annehmen wollen;

3) die Geschwindigkeit, deren Erkenntniss nicht deutlicher sein kann, als wenn wir denjenigen Weg anzugeben im Stande sind, welcher mit derselben Geschwindigkeit in einer gegebenen Zeit gleichförmig durchlaufen werden würde;
4) die antreibende Kraft wird man auf bekannte Maasse zurückführen müssen;
5) die Masse bewegter Körper tritt in die Rechnung ein und wie man ihre Grösse abzuschätzen habe, muss auch festgesetzt werden.

Von diesen fünf Arten von Grössen bietet die erste keine Schwierigkeit dar, wie man die vier übrigen am passendsten durch bekannte Maasse in die Rechnung einzuführen und ihnen angemessen den Werth von λ zu bestimmen habe, wollen wir in den folgenden Hypothesen feststellen.

Hypothese 1.

§. 191. **Die antreibenden Kräfte wollen wir durch Gewichte, welche ihnen gleich sind, beständig ausdrücken.**

Erläuterung.

§. 192. Diese Weise, die Kräfte durch Gewichte auszudrücken, hat keine Schwierigkeit, da nämlich das Gewicht eines Körpers die Kraft ist, welche ihn abwärts antreibt, so sind antreibende Kräfte und Gewichte unter sich homogene Grössen. Welche beliebige Kraft aber auch irgend einen Körper antreiben mag, so wird man sich doch immer einen Körper denken können, welcher an der Oberfläche der Erde durch eine gleiche Kraft abwärts angetrieben werden würde; das Gewicht des letztern wird alsdann das richtige Maass jener Kraft darstellen. Ist die Rede von einer so grossen Kraft, dass kein Körper an der Oberfläche der Erde existiren kann, welcher gleiches Gewicht hätte; so ist es hinreichend zu wissen, wie vielmal jene Kraft grösser ist, als das Gewicht eines mässig grossen, an der Oberfläche der Erde befindlichen Körpers, indem hierdurch die Grösse jener Kraft eben so sicher bestimmt werden kann. Da wir nun aber erfahren haben, dass dieselben Körper in allen Gegenden der Erde nicht durch gleiche Kräfte abwärts getrieben werden, so muss man eine bestimmte Gegend zu dieser Messung auswählen und dieser müssen dann die übrigen sogleich zu erklärenden Maasse angepasst werden. Es kommt hier gar nicht darauf an, welche Gegend wir aus-

wählen, wenn wir nur die Versuche, worauf die folgenden Maasse sich stützen, in derselben annehmen.

Hypothese 2.

§. 193. Die Masse eines jeden Körpers drücken wir aus durch das Gewicht, welches er haben würde, wenn er sich in der Nähe der Erde befände.

Erläuterung.

Der Grund dieser Messung beruht darauf, dass die Gewichte der Körper ihren Massen proportional sind, wesshalb man anzunehmen hat, dass das Gewicht eines jeden Körpers das richtige Maass seiner Masse darbieten werde. Wenn es sich aber um die Massen von Körpern handelt, welche sich ausserhalb der Erde befinden, so wird man sie wenigstens im Geiste nach der Erde und zwar nach derjenigen Gegend derselben, welcher wir die Maasse der Kräfte entnommen haben, übertragen müssen. Hiernach wird die Masse eines jeden Körpers gemessen durch das Gewicht, welches er haben würde, wenn er nach jener Gegend versetzt wäre. Handelte es sich um Körper, welche wegen ihrer Grösse von der erwähnten Gegend nicht genommen werden könnten, so müsste man sie theilweise betrachten; es wird daher alsdann hinreichend sein, das Verhältniss zu kennen, welches die Masse des vorliegenden Körpers zur Masse irgend eines gegebenen und in dieser Gegend befindlichen Körpers einhält. Auf diese Weise sind die Kräfte und Massen auf gleichartige Grössen zurückgeführt, da wir beide durch Gewichte ausdrücken werden. Weil ferner in unsern Formeln stets die Kräfte durch die Massen dividirt vorkommen, so ist es gleichgültig, welcher Einheit wir uns bei der Messung der Gewichte, ob Pfunde oder Unzen, bedienen. Stets wird nämlich der Quotient, welcher aus der Division irgend einer Kraft durch die Masse hervorgeht, durch eine absolute Zahl ausgedrückt werden. Im Fall der Schwere, wo so wohl die antreibende Kraft p, als auch die Masse des Körpers A durch sein Gewicht ausgedrückt wird, haben wir $\frac{p}{A} = 1$; daher steigt ein schwerer Körper während der Zeit t durch die Höhe

$$s = \tfrac{1}{2}\lambda t^2$$

herab und erlangt die Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t,$$

mit welcher gleichförmig fortgehend er in der Zeit t den Weg $\lambda t^2 = 2s$ durchlaufen würde.

Hypothese 3.

§. 194. **Bei der Messung der Zeiten wollen wir stets die Secunde als Einheit annehmen.**

Erläuterung.

§. 195. Dass die Secunde der 60.60.24ste Theil des natürlichen Tages ist, ist hinreichend bekannt, da man den Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten und die Minute in 60 Secunden einzutheilen pflegt. Als Tag nehme ich hier den mittleren Sonnentag an, in welchem die Sonne, nach mittlerer Zeit gerechnet, einen Umlauf um die Erde macht. Wenn diese Zeit etwa nicht für alle Jahrhunderte von derselben Dauer zu sein scheint, so ist es hinreichend, dieselbe für einen gewissen gegebenen Zeitpunkt und zwar denjenigen, um welchen man die Bestimmung der Massen durch die Gewichte der Körper zu erhalten strebt, zu kennen. Wenn wir daher irgend eine Zeit durch den Buchstaben t bezeichnen, so ist dieselbe eine absolute Zahl, welche angibt, wie viel Secunden in jener Zeit enthalten sind. Dieses Zeitmaass ist aber das bequemste, da man bei allen Versuchen die Zeiten in Secunden anzugeben pflegt; auch werden wir auf diese Weise zu häufige Brüche vermeiden, welche eintreten würden, wenn wir einen grössern Zeitraum als Einheit annähmen.

Hypothese 4.

§. 196. **Die Geschwindigkeit werden wir am bequemsten durch den Weg messen, welchen der mit derselben sich bewegende Körper in den einzelnen Secunden durchlaufen wird.**

Erläuterung.

Wir erkennen die Geschwindigkeit nicht deutlicher, als wenn wir den Weg anzugeben vermögen, welchen ein mit derselben gleichförmig sich bewegender Körper in einer Secunde zurücklegen wird. Wenn ich etwa sage, eine aus einem Geschütz abgeschossene Kugel habe eine so grosse Geschwindigkeit, dass sie mit derselben in einer Secunde einen Weg von 1000 Fuss durchlaufen würde; so hat jeder eine gleiche Idee von dieser Geschwindigkeit. Auf diese Weise werden daher die Geschwindigkeiten und die durchlaufenen Wege durch

gleichartige Grössen, nämlich Linien ausgedrückt, und da sowohl die Zeiten, als auch die Quotienten der Kräfte durch die Massen durch absolute Zahlen dargestellt werden; so bleiben in unsern Formeln nur Grössen von zweierlei Art übrig, nämlich geometrische Linien und absolute Zahlen.

Hypothese 5.

§. 197. Es bezeichne in der Folge der Buchstab g beständig die Höhe, durch welche ein schwerer Körper in Einer Secunde frei herabsteigt.

Erläuterung.

§. 198. Durch Beobachtungen und Versuche, welche zu diesem Ende mit der grössten Sorgfalt angestellt worden sind, hat man erfahren, dass ein von der Ruhe an frei herabsteigender Körper in der ersten Secunde eine Höhe von $15^5/_8$ Rheinländischen Fussen zurücklegt, so dass, wenn wir dieses Fussmaass anwenden, $g = 15^5/_8$ sein wird. Da man aber die Schwere nicht überall auf der Erde als dieselbe findet, so ist diese Grösse keine hinreichend feste. Ich habe desshalb schon oben daran erinnert, dass man eine bestimmte Gegend auf der Erde auszuwählen habe, auf welche die durch Gewichte auszudrückenden Kräfte und Massen bezogen werden; hat man diese Gegend aber festgestellt, so bestimme man daselbst durch genaue Versuche die Höhe g, aus welcher ein schwerer Körper in Einer Secunde frei herabsteigt. Man könnte die Epoche hinzufügen, welcher man zugleich das Maass der Secunden entnimmt, wenn man etwa glaubt, dass mit dem Verlaufe der Jahrhunderte die Dauer der mittlern Tage sich ändere. Es ist aber gleichgültig, welche Gegend man zu diesem Zweck auswählt und wenn man alle bisher erwähnten Maasse auf dieselbe zurückführt, werden die letzten Schlüsse übereinstimmen müssen. Hieraus erhellt, dass diese nach unserer Willkühr aufgestellten Maasse die Principien der Mechanik selbst nichts angehen und dass nichts Willkührliches dadurch eingeführt wird, indem wir durch dieselben nur zu Schlüssen gelangen, welche in bekannten Maassen ausgedrückt sind.

Lehrsatz 5.

§. 199. Wenn wir alle Grössen nach den eben aufgestellten Hypothesen auf Maasse zurückführen, muss man in den frühern Formeln statt λ den Werth $2g$, d. h. die doppelte Höhe

annehmen, aus welcher ein schwerer Körper in Einer Secunde herabsteigt.

Beweis.

(Figur 18.) Für den Fall schwerer Körper wird nämlich, wenn wir nach unsern Hypothesen die Kraft p und die Masse A ausdrücken, $\frac{p}{A} = 1$ und die Höhe, aus welcher ein Körper in der Zeit t herabsteigt, oder

$$AS = s = \tfrac{1}{2}\,\lambda t^2.$$

Hieraus muss ferner, wenn die Zeit t in Secunden ausgedrückt und $t = 1$ gesetzt wird, für s sich jene Höhe g ergeben, durch welche ein schwerer Körper nach der Annahme in Einer Secunde herabsteigt; offenbar haben wir daher $g = \frac{1}{2}\lambda$ und es muss $\lambda = 2g$ gesezt werden. Es wird nun ferner die am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit, oder

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t = \lambda = 2g.$$

Diese Geschwindigkeit ist also so gross, dass der Körper, wenn er sich mit derselben gleichförmig bewegte, in den einzelnen Secunden einen Weg $= 2g$ durchlaufen würde, ganz wie die von uns angenommene Weise, die Geschwindigkeit zu messen, es erfordert.

Zusatz 1.

§. 200. Es bezeichnet daher λ nicht eine Zahl, sondern eine Linie, welche mit dem durchlaufenen Wege s gleichartig ist, während die übrigen Grössen t und $\frac{p}{A}$ durch absolute Zahlen ausgedrückt werden.

Zusatz 2.

§. 201. Wird demnach ein ruhender kleiner Körper, dessen Masse $= A$ ist, durch eine Kraft p angetrieben, so legt er im Zeittheilchen dt den kleinen Weg

$$\frac{gpdt^2}{A}$$

zurück, wenn man nämlich beständig die vorgeschriebenen Maasse anwendet.

Zusatz 3.

§. 202. Wenn aber der kleine Körper A sich bereits bewegt und durch eine Kraft p angetrieben wird, so wird nach Zerlegung der Bewegung die Seitenbewegung, mit welcher er nach der Richtung der antreibenden Kraft fortgeht und im Zeit-

theilchen dt den kleinen Weg dx zurücklegt, so geändert, dass wir haben

$$ddx = \frac{2gpdt^2}{A} \text{ und } \frac{ddx}{dt} = \frac{2gpdt}{A}.$$

Hier ist $\frac{ddx}{dt}$ die Zunahme der Geschwindigkeit in dieser Richtung.

Zusatz 4.

§. 203. Wenn man ferner hieraus auf die Geschwindigkeit der Seitenbewegung in dieser Richtung d. h. $\frac{dx}{dt}$ schliesst, so wird diese nach unserm angenommenen Maasse so ausgedrückt werden, dass sie den Weg angibt, welchen der mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig sich bewegende Körper in Einer Secunde durchlaufen würde.

Anmerkung.

§. 204. Durch die Anwendung solcher Maasse und Einheiten, wie wir sie beschrieben haben, werden wir, wenn man $2g$ statt λ schreibt, mittelst unserer Formeln sehr leicht alle Bewegungen auf absolute Maasse zurückführen. Diese Weise scheint viel bequemer zu sein als diejenige, welche wir vor diesem angewandt haben, wo wir die Geschwindigkeiten mittelst der Quadratwurzel aus den Höhen, nach deren Zurücklegung der schwere Körper eben diese Geschwindigkeiten erlangen würde, ausgedrückt hatten und zu welchem Ende statt der Geschwindigkeiten die ihnen zukommenden Höhen in die Rechnung eingeführt waren. Aus der, der Geschwindigkeit zukommenden, Höhe erkennt man aber nicht so leicht die Geschwindigkeit selbst, sondern man bedarf noch einer gewissen Rechnung, um sie auf die gewöhnlichen Maasse zurückzuführen. Ferner erfordert auch das Verhältniss der Zeit eine besondere Rechnung, wonach in diese eine gewisse neue Einheit eingeführt werden muss, damit die Zeit in Secunden ausgedrückt werde. Diese Weitläufigkeit sowohl in Betreff der Geschwindigkeiten, als auch der Zeiten werden wir aber durchaus vermeiden, wenn wir uns der vorgeschriebenen Maasse bedienen; der ganze Unterschied besteht ferner darin, dass früher in den allgemeinen Formeln λ den absoluten Bruch $\frac{1}{2}$ bezeichnete, hier aber für λ die Linie $2g$ geschrieben wird. Wenn daher jemand, zur Bestimmung irgend einer Bewegung, nach der frühern Weise die

Rechnung angestellt hat, so wird diese sehr leicht auf unsere jetzige Weise zurückgeführt und man wird daraus sehr rasch alle absoluten Maasse erhalten. Hieraus ersieht man ferner auch leichter die Homogeneität in den Gleichungen, welche die Bewegung umfassen, da nur die durchlaufenen Wege und der Buchstab g lineare Grössen und gleichsam von Einer Dimension sind, und von derselben Art sind die Geschwindigkeiten, wenn sie etwa in die Rechnung eingeführt werden. Die Zeiten t hingegen und die Brüche $\frac{p}{A}$ werden durch absolute Zahlen ausgedrückt und sind daher als von der Dimension $= 0$ anzusehen.

In der nach der früher angenommenen Weise angestellten Rechnung wurden so wohl die Geschwindigkeiten, als auch die Zeiten durch Quadratwurzeln aus linearen Grössen ausgedrückt, sie konnten also nur als von der Dimension $\frac{1}{2}$ angenommen werden. Indem wir daher diese frühere Weise, zu absoluten Maassen zu gelangen, verwerfen, nehmen wir diese neue weit einfachere und leichtere Weise an und werden sie in der Folge stets beibehalten.

Kapitel V.

Von der absoluten Bewegung kleiner, durch beliebige Kräfte angetriebener Körper.

Aufgabe 13.

§. 205. Ein kleiner Körper wird durch Kräfte so angetrieben, dass er seine Bewegung in derselben Ebene ausführt; man soll sowohl den durchlaufenen Weg, als zu jeder Zeit seinen Ort und seine Geschwindigkeit bestimmen.

Auflösung.

(Figur 19.) Damit die Bewegung in derselben Ebene erfolge, müssen sowohl die Richtungen der Kräfte, welche den Körper beständig antreiben, als auch die Richtung der zuerst beigebrachten Bewegung nothwendig in derselben Ebene liegen und es werde diese durch das Papier selbst dargestellt. In derselben nehme man nach Belieben zwei Axen OA und OB, zur Bequemlichkeit der Rechnung auf einander normal an, es sei ESF der vom Körper beschriebene Weg, auf welchem er nach Verlauf der in Secunden ausgedrückten Zeit t zum Punkte S gelangt sei. Von diesem fälle man auf OA das Perpendikel SX und es seien alsdann die Coordinaten $OX = x$ und $XS = y$, so dass, wenn man den durchlaufenen Weg $ES = s$ setzt, man habe $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$
Es sei nun die Masse des kleinen Körpers $= A$, dieselbe würde nämlich sein Gewicht angeben, wenn er sich in der zu den absoluten Messungen ausgewählten Gegend befände; mag er nun durch beliebige Kräfte in S angetrieben werden, so kann man dieselben durch statische Zerlegung auf zwei zurückführen, welche längs der den Axen parallelen Richtungen SP

und SQ wirken. Es sei die Kraft $SP = P$ und die Kraft $SQ = Q$, beide in den ihnen gleichen Gewichten gegeben. Unter diesen Voraussetzungen nehmen wir das Zeitelement dt constant an und denken uns auf gleiche Weise die Bewegung nach den Richtungen SP und SQ zerlegt, alsdann wird die Bestimmung der Bewegung in den zwei Formeln

$$ddx = \frac{2gPdt^2}{A} \text{ und } ddy = \frac{2gQdt^2}{A}$$

enthalten sein. Hier bezeichnet, was stets festzuhalten ist, g die Höhe, aus welcher ein schwerer Körper in der erwähnten Gegend der Erde in Einer Secunde herabsteigt. Hieraus ergibt sich die Geschwindigkeit der Seitenbewegung längs SP

$$= \frac{dx}{dt} = \frac{2g}{A}\int Pdt$$

und längs SQ $$= \frac{dy}{dt} = \frac{2g}{A}\int Qdt.$$

Setzt man nun die wahre Geschwindigkeit in $S = v$, so erhält man, weil $v = \frac{ds}{dt}$ und $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist, hieraus die Gleichung

$$dx\,ddx + dy\,ddy = ds\,dds = \frac{2gdt^2}{A}\,(Pdx + Qdy).$$

Da nun ferner $ds = vdt$ und $dds = dv\,dt$ ist, so ergibt sich

$$vdv = \frac{2g}{A}\,(Pdx + Qdy) \text{ und } v^2 = \frac{4g}{A}\int[Pdx + Qdy].$$

Man setze ferner $dy = pdx$, so dass $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ wird, alsdann erhält man

$$ddy = pddx + dpdx = \frac{2gQdt^2}{A} = \frac{2gPpdt^2}{A} + dp\,dx$$

und $$dp = \frac{2gdt^2}{Adx}\,(Q - Pp) = \frac{2gdt^2}{Adx^2}\,(Qdx - Pdy).$$

Da aber $ds = vdt = dx\sqrt{1+p^2}$ so wird $\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{v}$

und so $$dp = \frac{2g\,(1+p^2)}{Av^2}\,(Qdx - Pdy).$$

Der Krümmungshalbmesser der Curve ESF, in so fern diese gegen OA concav ist, ist aber

$$= -\frac{dx\,(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{dp} = -\frac{ds\,(1+p^2)}{dp} = r,$$

also $$dp = -\frac{ds\,(1+p^2)}{r}$$

und wir erhalten so die Gleichung:

$$-\frac{ds}{r} = \frac{2g\,(Qdx - Pdy)}{Av^2} \text{ oder } \frac{Pdy - Qdx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr}.$$

Zusatz 1.

§. 206. Wenn man daher statt der Zeit t die Geschwindigkeit v einführt, so wird die Bewegung ausgedrückt durch die zwei Gleichungen:

$$Av\,dv = 2g\,(Pdx + Qdy) \text{ und } Av^2 ds = 2gr\,(Pdy - Qdx).$$

Dieselben sind bequemer zur Anwendung, wenn etwa die Kräfte P und Q von der Geschwindigkeit des Körpers abhängig sind.

Zusatz 2.

§. 207. Es muss hier bemerkt werden, dass die Formel $\frac{Pdx + Qdy}{ds}$ die tangentiale und $\frac{Pdy - Qdx}{ds}$ die normale Kraft ausdrückt uud wenn man jene $= T$, diese $= N$ setzt; so erhalten wir die Gleichungen

$$Av\,dv = 2gTds \text{ und } Av^2 = 2gNr,$$

welche mit den im frühern Theile aufgestellten übereinstimmen.

Zusatz 3.

§. 208. Hat man aber diese Maasse eingeführt, so besteht die Wirkung der tangentialen Kraft T darin, dass wir

$$T = \frac{Av\,dv}{2gds}$$

und die Wirkung der normalen Kraft N darin, dass wir

$$N = \frac{Av^2}{2gr}$$

haben. Da aber $dy = pdx$ und $r = -\frac{ds\,(1 + p^2)}{dp}$ ist, so erhalten wir

$$N = -\frac{Av^2\,dp}{2gds\,(1 + p^2)},$$

wenn wir nämlich annehmen, dass die normale Kraft nach der Axe OA hin gerichtet sei.

Beispiel.

§. 209. Es werde ein kleiner Körper beständig, längs der Richtung BO, durch eine constante und seinem Gewicht A gleiche Kraft angetrieben, so dass wir den Fall eines oberhalb der Erde geworfenen Körpers haben. Es wird also $P = 0$, $Q = -A$ und wir erhalten mithin die Gleichungen

$$ddx = 0 \text{ und } ddy = -2gdt^2.$$

Gesetzt der kleine Körper sei anfangs in O so fortgeworfen worden, dass seine Geschwindigkeit $= c$ gewesen und die Richtung mit der horizontal gedachten Linie OA einen Winkel $= \zeta$ gebildet habe; alsdann wird also anfangs seine Geschwindigkeit längs $OA = c\cos\zeta$ und längs $OB = c\sin\zeta$ gewesen sein. Unter diesen Voraussetzungen wird die erste der vorhergehenden Gleichungen ergeben

$$\frac{dx}{dt} = c\cos\zeta$$

und die zweite
$$\frac{dy}{dt} = c\sin\zeta - 2gt,$$

weil für $t = 0$ die Formeln $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Anfangsgeschwindigkeiten ergeben müssen. Wenn man nun diese zwei Gleichungen weiter integrirt, so wird

$$x = ct\cos\zeta \text{ und } y = ct\sin\zeta - gt^2$$

oder
$$-4gy = 4g^2t^2 - 4cgt\sin\zeta$$

und so

$$c^2\sin\zeta^2 - 4gy = (2gt - c\sin\zeta)^2 = \left(c\sin\zeta - \frac{2gx}{c\cos\zeta}\right)^2.$$

Hieraus geht hervor, dass die beschriebene Curve eine Parabel ist, deren Gleichung

$$\left(\frac{c^2\sin\zeta\cos\zeta}{2g} - x\right)^2 = \frac{c^2\cos\zeta^2}{g}\left(\frac{c^2\sin\zeta^2}{4g} - y\right),$$

deren Parameter $= \frac{c^2\cos\zeta^2}{g}$, deren vertikale Axe vom Punkt O um den Abstand $\frac{c^2\sin\zeta\cos\zeta}{2g}$ entfernt ist und deren Scheitelpunkt von OA in der Höhe $\frac{c^2\sin\zeta^2}{4g}$ liegt. Weil ferner

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{c^2 - 4cgt\sin\zeta + 4g^2t^2} = v,$$

so wird die Geschwindigkeit im Punkt S, nämlich

$$v = \sqrt{c^2 - 4gy}.$$

Setzt man endlich $y = 0$, so findet man die Weite des Wurfes
$$= \frac{c^2\sin\zeta\cos\zeta}{g}.$$

Anmerkung.

§. 210. Ich verweile hier nicht bei der Entwickelung anderer hierher gehöriger Fragen, da ich diesen ganzen Gegenstand schon ausführlich untersucht habe. Man bemerke aber, dass es sich hier um die absolute und freie Bewegung handelt.

Wenn ich nämlich auch die Bewegung schwerer Körper hieraus abgeleitet habe und diese, in so fern man sie auf die Erde bezieht, allerdings eine respective und von der absoluten Bewegung sehr abweichende ist, so werden wir doch in der Folge zeigen, dass man sie als eine absolute ansehen kann. Da nämlich alle irdischen Körper durch ähnliche Kräfte, wie die Erde selbst angetrieben werden, so wird hierdurch bewirkt, dass sie sich in Beziehung auf die Erde eben so bewegen, als ob diese ruhete und jene nicht da wären; diess werden wir im folgenden Kapitel deutlich zeigen. Ausserdem hat man die freie Bewegung so zu verstehen, dass von aussen her nichts den kleinen Körper verhindere, der Wirksamkeit der Kräfte Folge zu leisten und man muss diese Bewegung wohl unterscheiden von einer gezwungenen, bei welcher ein gleichsam in einen Kanal eingeschlossener Körper nur längs dieses Kanals sich bewegen kann; derartige Bewegungen habe ich im zweiten Theile betrachtet. Hier will ich nur eine einzige Aufgabe in Betreff eines in derselben Ebene gebildeten Kanales hinzufügen, wobei ich von aller Reibung abstrahire, damit man leichter einsehe, auf welche Weise derartige Aufgaben mittelst dieser neuen Methode aufgelöst und zugleich der Druck des kleinen Körpers gegen die Seiten der Röhre bestimmt werden kann.

Aufgabe 14.

§. 211. Ein kleiner Körper ist in einen, in derselben Ebene gebildeten, Kanal eingeschlossen und wird zugleich durch beliebige Kräfte angetrieben; man soll seine Bewegung im Kanale und den Druck, welchen er gegen diesen ausübt, bestimmen.

Auflösung.

(Figur 19.) Die Figur des Kanals ESF wird also als gegeben betrachtet und man beziehe dieselbe, wie vorhin, auf je zwei aufeinander normale Axen OA und OB. Wenn nämlich nach Verlauf der Zeit t der kleine Körper nach S gekommen ist, so sei $OX = x$, $XS = y$ und $ES = s$, ferner seien die auf dieselben Richtungen bezogenen antreibenden Kräfte $SP = P$, $SQ = Q$ und die Masse des Körpers $= A$. In so fern nun der Kanal die Richtung, welche der kleine Körper für sich verfolgen würde, verändert, übt er zu diesem Behuf Kräfte aus, welche zwar unbekannt, aber auf dieselben Richtungen reducirt, nämlich längs $SP = X$ und längs $SQ = Y$ seien; von diesen Kräften ist aber bekannt, dass sie die Be-

wegung des Körpers weder beschleunigen noch verzögern werden. Da nun die Kraft längs $SP = P + X$ und längs $SQ = Q + Y$ ist, so erhalten wir, wenn wir die Geschwindigkeit in $S = v$ und den Krümmungshalbmesser $= r$ setzen, nach §. 206. die folgenden Gleichungen:

$$Av\,dv = 2g\,[(P + X)\,dx + (Q + Y)\,dy]$$

und

$$Av^2\,ds = 2gr\,[(P + X)\,dy - (Q + Y)\,dx].$$

Da aber die Kräfte X und Y nichts zum Increment dv der Geschwindigkeit beitragen, so wird

$$Xdx + Ydy = 0$$

und wir erhalten aus der zweiten Gleichung zur Bestimmung dieser Kräfte

$$\frac{Xdy - Ydx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr} - \frac{Pdy - Qdx}{ds}.$$

Es wird demnach erstens die Bewegung längs des Kanals bestimmt durch die Gleichung

$$Av\,dv = 2g\,[Pdx + Qdy],$$

woraus man die Geschwindigkeit v des kleinen Körpers in jedem beliebigen Punkte kennen lernt. Zweitens übt der Kanal selbst derartige Kräfte X und Y, längs der Richtungen SP und SQ aus, dass wir haben:

$$\frac{Xdx + Ydy}{ds} = 0 \text{ und } \frac{Xdy - Ydx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr} - \frac{Pdy - Qdx}{ds}.$$

Wenn man nämlich diese Kräfte auf die Richtung des Kanals Ss und der Normalen SN reducirt, so entspringt in der ersten Richtung die Kraft $= 0$ und in der zweiten eine Kraft

$$= \frac{Av^2}{2gr} - \frac{Pdy - Qdx}{ds}.$$

Mit einer eben so grossen Kraft drückt umgekehrt der kleine Körper gegen den Kanal, nach der entgegengesetzten Richtung Sn und dieses ist der gesuchte Druck.

Zusatz 1.

§. 212. Wird daher der kleine Körper, während er sich längs des Kanals bewegt, durch keine äussern Kräfte P und Q angetrieben, so wird seine Bewegung gleichförmig, weil

$$Av\,dv = 0.$$

Er wird alsdann aber überall normal gegen den Kanal mit einer Kraft $= \frac{Av^2}{2gr}$ drücken, längs der Richtung Sn, welche die entgegengesetzte Lage des Krümmungshalbmessers hat.

Zusatz 2.

§. 213. Die Kraft $\frac{Av^2}{2gr}$, welche gegen den Kanal drückt, wird die Centrifugalkraft genannt und sie entspringt daraus, dass der kleine Körper dem Antrieb der Trägheit zuwider auf einer krummen Linie fortzuschreiten gezwungen wird. Dieselbe steht im zusammengesetzten directen Verhältniss der Masse A, des Quadrats der Geschwindigkeit v und dem umgekehrten Verhältniss des Krümmungshalbmessers r.

Zusatz 3.

§. 214. Wird der kleine Körper ausserdem durch eine tangentiale Kraft T längs Ss und eine normale N längs SN angetrieben, so haben wir

$$Av\,dv = 2g\,T ds$$

und es erleidet der Kanal in der Richtung Sn einen Druck durch die Kraft

$$\frac{Av^2}{2gr} - N.$$

Beispiel.

§. 215. (Fig. 20.) Ein kleiner Körper, welcher durch die Schwere angetrieben wird, ist gezwungen, längs des Kreisbogens OS, dessen Mittelpunkt B und Radius $OB = b$ ist, aufzusteigen. Es sei OB vertikal, OA horizontal, die Geschwindigkeit in O $= c$; alsdann wird $P = 0$, $Q = -A$, $r = b$ und zur Bestimmung der Bewegung des Körpers $Av\,dv = -2Ag\,dy$ oder $vdv = -2g\,dy$. Wir erhalten daher

$$v^2 = c^2 - 4gy$$

und es wird die Geschwindigkeit in einem Punkte D verschwinden, wo $y = \frac{c^2}{4g}$ ist. Die Kraft, welche längs SB gegen den Kanal drückt, wird

$$= -\frac{A(c^2 - 4gy)}{2gb} - \frac{Adx}{ds}.$$

Es wird aber, weil $x^2 + (b-y)^2 = b^2$ ist, $x = \sqrt{2by - y^2}$, $dx = \frac{(b-y)\,dy}{\sqrt{2by - y^2}}$ und $ds = \frac{bdy}{\sqrt{2by - y^2}}$; demnach der Druck längs SB

$$= -\frac{Ac^2}{2gb} + \frac{2Ay}{b} - \frac{A(b-y)}{b} = -A + \frac{3Ay}{b} - \frac{Ac^2}{2gb}.$$

Da derselbe negativ ist, so wird der Druck gegen den Ka-

nal in der Richtung SN wirken und $= A\left(1 + \frac{c^2}{2gb} - \frac{3y}{b}\right)$ sein.

Weil ferner $v = \sqrt{c^2 - 4gy}$, so wird das Element der Zeit oder

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{bdy}{\sqrt{(c^2 - 4gy)(2by - y^2)}},$$

und da $y = \frac{c^2 - v^2}{4g}$, $dy = -\frac{vdv}{2g}$ ist,

$$dt = -\frac{2bdv}{\sqrt{(c^2 - v^2)(8bg - c^2 + v^2)}}.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit c gewissermaassen unendlich klein im Vergleich mit b, so wird, weil v nicht grösser als c werden kann,

$$dt = -\frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} \cdot \sqrt{\frac{b}{2g}}$$

und wenn man integrirt

$$t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \text{arc.} \cos\left(\frac{v}{c}\right).$$

Ist demnach π die halbe Peripherie des Kreises, dessen Radius $= 1$, so wird die Zeit der ganzen aufsteigenden Bewegung bis D, wo die Geschwindigkeit $v = 0$ ist,

$$= \frac{\pi\sqrt{b}}{2\sqrt{2g}};$$

diese nennt man die halbe Schwingungszeit. Damit nun die Zeit einer ganzen Schwingung oder $\frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$ Eine Secunde sei, müssen wir den Radius

$$BO = b = \frac{2g}{\pi^2}$$

annehmen; diess ist die Länge eines einfachen Pendels, welches in jeder Secunde eine Schwingung macht. Ist nun $g = 15',625$ Rheinländisch, so wird die Länge dieses Pendels

$= 3',166287$ Rheinländisch.

Anmerkung.

§. 216. Es bedarf nicht der Erinnerung, dass wir hier nur desshalb einen Kanal angenommen haben, damit die Bewegung längs einer gegebenen Linie erfolgen müsse; diess kann aber auf mehrfache Weise, wie durch Pendel, bewirkt werden und es erschien uns angemessen, einen derartigen Fall in der vorhergehenden Aufgabe zu entwickeln. Uebrigens habe ich die hierher gehörigen Aufgaben im zweiten Theile der

Mechanik ausführlich behandelt, da aber dort zu wünschen übrig bleiben konnte, dass die Methode, nach welcher man jetzt die Bewegung der Himmelskörper zu berechnen pflegt und welche ich erst nachher vorzunehmen angefangen habe, auseinandergesetzt würde; so wird es der Mühe werth sein, dieselbe hier genauer darzustellen. Sie gehört übrigens zur Aufgabe 13 (§. 205.) und ist nur darin verschieden, dass die Bewegung nicht durch Coordinaten, sondern durch die Abstände von einem festen Punkte und die um denselben beschriebenen Winkel bestimmt wird. Soweit diese Bewegung in einer Ebene erfolgt, werde ich die Vorschriften geben, nach denen man dieselbe dieser Methode entsprechend zu erforschen hat, nachher werde ich dasselbe für eine, nicht in derselben Ebene erfolgende, Bewegung zeigen.

Aufgabe 15.

§. 217. (Figur 21.) Ein kleiner Körper bewegt sich frei in einer Ebene und wird in derselben stets durch zwei Kräfte angetrieben, von denen die eine nach einem gewissen festen Punkte O gerichtet ist, die andere eine auf jene normale Richtung hat; man soll für jede Zeit den Abstand des Körpers S vom Punkte O und den Winkel AOS bestimmen.

Auflösung.

Nach Verlauf der Zeit t sei der kleine Körper, dessen Masse $= A$ ist, von A nach S gelangt und man setze den Abstand $OS = u$ und den Winkel $AOS = \varphi$. In S werde er aber angetrieben: erstens durch eine längs SO gerichtete Kraft $= V$, zweitens durch eine längs SV, normal auf OS gerichtete Kraft $= S$. Um diesen Fall leichter auf die Aufgabe 13. zurückzuführen, fällen wir von S auf die feste Linie OA das Perpendikel SX und führen die Coordinaten $OX = x$ und $SX = y$ ein; es wird alsdann

$$x = u \cos\varphi \text{ und } y = u \sin\varphi.$$

Hierauf reduciren wir die Kräfte V und S auf dieselben Richtungen SP und SQ und erhalten so

die Kraft $SP = - V\cos\varphi - S\sin\varphi$

und - - $SQ = - V\sin\varphi + S\cos\varphi$;

beide haben wir oben respective P und Q genannt. Wir erhalten demnach diese zwei Gleichungen:

$$ddx = -\frac{2g\,dt^2}{A}\,[V\cos\varphi + S\sin\varphi]$$

und $$ddy = -\frac{2g\,dt^2}{A}\,[V\sin\varphi - S\cos\varphi],$$
durch deren Combination wir erhalten
$$ddx\cos\varphi + ddy\sin\varphi = -\frac{2g\,V dt^2}{A}$$
und $$ddx\sin\varphi - ddy\cos\varphi = -\frac{2g\,S dt^2}{A}.$$

Aus $x = u\cos\varphi$ und $y = u\sin\varphi$ erhalten wir aber
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = u \text{ und } x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0$$
und wenn wir diese Gleichungen differentiiren,
$$dx\cos\varphi + dy\sin\varphi = du \text{ und } dx\sin\varphi - dy\cos\varphi + ud\varphi = 0$$
oder $$dx\sin\varphi - dy\cos\varphi = -ud\varphi.$$

Differentiiren wir auf's neue, so erhalten wir:
$$ddx\cos\varphi + ddy\sin\varphi + ud\varphi^2 = ddu$$
und $$ddx\sin\varphi - ddy\cos\varphi + du\,d\varphi = -dud\varphi - uddd\varphi.$$

Substituiren wir diese Werthe in die obigen Gleichungen, so erhalten wir zur Bestimmung der Bewegung:
$$\text{I)}\ ddu - ud\varphi^2 + \frac{2g\,V dt^2}{A} = 0$$
$$\text{II)}\ udd\varphi + 2du\,d\varphi - \frac{2g\,S dt^2}{A} = 0.$$

Zusatz 1.

§. 218. Wenn man die zweite Gleichung mit u multiplicirt und hierauf integrirt, so ergibt sich
$$u^2 d\varphi = \frac{2g\,dt}{A}\int Sudt,$$
wobei man zu bemerken hat, dass $\frac{1}{2}u^2 d\varphi$ das Element der Fläche AOS ausdrückt; es wird daher diese Fläche selbst
$$= \frac{g}{A}\int dt \int Sudt.$$

Verschwindet demnach die Seitenkraft S, so wird die Fläche AOS der Zeit t proportional, wie auch immer die andere, gegen den Punkt O antreibende, Kraft V beschaffen sein mag.

Zusatz 2.

§. 219. Multiplicirt man die erste Gleichung mit du, die zweite mit $ud\varphi$ und addirt beide Producte, so erhält man
$$du\,ddu + u\,du\,d\varphi^2 + u^2\,d\varphi\,dd\varphi = -\frac{2g\,V dt^2 du}{A} + \frac{2g\,Su\,dt^2\,d\varphi}{A}$$
und wenn man integrirt
$$du^2 + u^2\,d\varphi^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\int [Sud\varphi - Vdu].$$

Hier drückt $\sqrt{du^2+u^2d\varphi^2}$ das Element des Bogens AS aus, so dass $\frac{du^2+u^2d\varphi^2}{dt^2}$ das Quadrat der Geschwindigkeit im Punkt S bezeichnet.

Zusatz 3.

§. 220. Multiplicirt man die zweite Gleichung mit $2u^3d\varphi$, so findet man, weil dt constant ist, das Integral

$$u^4d\varphi^2=\frac{4g\,dt^2}{A}\int Su^3\,d\varphi$$

und wir erhalten hieraus mittelst der letzten Gleichung (§. 219.)

$$u^2du^2=\frac{4g\,dt^2}{A}\{u^2\int Sud\varphi-\int Su^3\,d\varphi-u^2\int Vdu\},$$

$$=\frac{4g\,dt^2}{A}\{2\int udu\int Su\,d\varphi-u^2\int Vdu\}.$$

Hierbei hat man zu bemerken, dass das Element der Zeit dt sich ausserhalb der Integralzeichen befindet.

Zusatz 4.

§. 221. Hat man $S=0$, welches der Fall der Centripetalkräfte ist, so wird

$$u^2d\varphi=f^2dt \text{ und } ud\varphi=\frac{f^2dt}{u}.$$

Substituirt man diesen Werth in Zusatz 2., so erhält man

$$du^2=-\frac{f^4dt^2}{u^2}-\frac{4g\,dt^2}{A}\int Vdu+c^2dt^2,$$

also
$$dt=\frac{udu}{\sqrt{c^2u^2-f^4-4gu^2\int Vdu:A}}$$

und
$$d\varphi=\frac{f^2du}{u\sqrt{c^2u^2-f^4-4gu^2\int Vdu:A}}.$$

Anmerkung.

§. 222. Man pflegt diese Formeln sehr häufig in der Theorie der Astronomie anzuwenden und mittelst derselben die Länge, die Anomalie und den Abstand eines, gegen einen bestimmten Punkt getriebenen, Planeten zu bestimmen. Es ist hier nicht der Ort, diess weiter zu verfolgen, da es zur Astronomie gehört; es mag hier genügen, die Methode der Behandlung solcher Aufgaben im allgemeinen dargelegt zu haben. Wir gehen nun zur Betrachtung von Bewegungen über, welche nicht in derselben Ebene erfolgen.

Aufgabe 16.

§. 223. Ein kleiner Körper bewegt sich frei und wird durch

beliebige Kräfte angetrieben; man soll seine Bewegung, mittelst drei aufeinander normaler Coordinaten, bestimmen.

Auflösung.

(Figur 22.) Es sind die drei wechselseitig auf einander normalen Axen OA, OB und OC aufgestellt und es bewege sich ein kleiner Körper, dessen Masse $= A$ ist, auf der Linie ESF. Nach Verlauf der Zeit t sei er nach S gelangt und man fälle aus diesem Punkte auf die Ebene AOB das Perpendikel SY, aus Y auf OA die Normale YX, so dass man die drei auf einander normalen und den Axen parallelen Coordinaten $OA = x$, $XY = y$ und $YS = z$ erhält. Der bereits durchlaufene Weg ES sei $= s$, also $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ und die Geschwindigkeit in $S = \frac{ds}{dt} = v$. Mag nun der kleine Körper in S durch beliebige Kräfte angetrieben werden, so kann man sie doch auf dieselben drei Richtungen zurückführen. Er werde demnach durch die drei Kräfte $SP = P$, $SQ = Q$ und $SR = R$ angetrieben, deren Wirkungen nach dem Obigen durch die drei folgenden Gleichungen

$$ddx = \frac{2g\,P\,dt^2}{A}; \quad ddy = \frac{2g\,Q\,dt^2}{A} \text{ und } ddz = \frac{2g\,R\,dt^2}{A}$$

bestimmt werden, wo man das Element dt als constant angenommen hat. Je nachdem also die Kräfte P, Q und R von den Coordinaten x, y und z oder auch von der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v$ abhängig sind, hat man aus der Analysis die Hülfsmittel der Auflösung zu entnehmen. Inzwischen wird es angemessen sein, zu bemerken, dass wegen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ und } v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$$

also $$vdv = \frac{ds\,dds}{dt^2} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{dt^2},$$

wir haben werden:

$$v\,dv = \frac{2g}{A}(Pdx + Qdy + Rdz),$$

durch welche Gleichung die Beschleunigung des kleinen Körpers bestimmt wird. Um die Curve zu finden, setze man $dy = pdx$ und $dz = qdx$, so dass wir haben

$$ds = dx\sqrt{1 + p^2 + q^2} \text{ und } v = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Da nun $ddy = pddx + dpdx$ und $ddz = qddx + dqdx$, so findet man, indem man statt ddx seinen Werth $\frac{2gPdt^2}{A}$ substituirt:

$$dpdx = \frac{2g\,dt^2}{A}(Q - Pp) \text{ und } dq\,dx = \frac{2g\,dt^2}{A}(R - Pq).$$

Schreibt man nun für dt^2 seinen Werth $\frac{dx^2(1+p^2+q^2)}{v^2}$, so erhalten wir

$$dp = \frac{2g\,dx\,(1+p^2+q^2)}{Av^2}\,(Q - Pp)$$

und
$$dq = \frac{2g\,dx\,(1+p^2+q^2)}{Av^2}\,(R - Pq)$$

oder
$$Qdx - Pdy = \frac{Av^2\,dp}{2g(1+p^2+q^2)}$$

und
$$Rdx - Pdz = \frac{Av^2\,dq}{2g(1+p^2+q^2)}.$$

Substituirt man nun statt p und q die Werthe $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, so gehen diese zwei Gleichungen über in die folgenden:

$$Qdx - Pdy = \frac{Av^2(dx\,ddy - dy\,ddx)}{2g\,ds^2}$$

und
$$Rdx - Pdz = \frac{Av^2(dx\,ddz - dz\,ddx)}{2g\,ds^2},$$

und wenn man die eine durch die andere dividirt, endlich

$$P(dz\,ddy - dy\,ddz) + Q(dx\,ddz - dz\,ddx) + R(dy\,ddx - dx\,ddy) = 0.$$

Zusatz 1.

§. 224. Die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Curve wird bestimmt durch die Differentialgleichung

$$Av\,dv = 2g(Pdx + Qdy + Rdz),$$

wo $\frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$ die aus den antreibenden Kräften entsprungene Tangentialkraft bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 225. Zur Bestimmung der Curve sind je zwei Gleichungen von den dreien:

$$2g\,ds^2(Qdx - Pdy) = Av^2(dx\,ddy - dy\,ddx) = Av^2dx^2\,d.\frac{dy}{dx},$$

$$2g\,ds^2(Pdz - Rdx) = Av^2(dz\,ddx - dx\,ddz) = Av^2dz^2\,d.\frac{dx}{dz},$$

$$2g\,ds^2(Rdy - Qdz) = Av^2(dy\,ddz - dz\,ddy) = Av^2dy^2\,d.\frac{dz}{dy}$$

ausreichend; indem je zwei von ihnen zugleich die dritte ent-

halten. Alsdann fällt aber die Betrachtung des constanten Differentials fort.

Zusatz 3.

§. 226. Die letzte von der Geschwindigkeit freie Gleichung ist, obgleich sie Differentiale zweiten Grades enthält, doch an das als constant angenommene Differential dt nicht gebunden, indem sie folgendermaassen dargestellt werden kann:

$$Pdz^2 d.\frac{dy}{dz} + Qdx^2 d\cdot\frac{dz}{dx} + Rdy^2 d\cdot\frac{dx}{dy} = 0.$$

Anmerkung.

§. 227. Die drei Kräfte P, Q und R, welche nach der Voraussetzung den kleinen Körper in S antreiben, werden auf Eine zurückgeführt, welche

$$= \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

ist. Setzen wir diese $= V$, so bildet ihre Richtung mit den drei Linien SP, SQ und SR Winkel, deren Cosinus respective $= \frac{P}{V}$, $\frac{Q}{V}$ und $= \frac{R}{V}$ ist. Bildet ferner die Richtung dieser Kraft V mit der Richtung der Bewegung Ss einen Winkel $= \omega$, so wird die beschleunigende oder längs Ss antreibende Kraft $= V\cos\omega$ und da dieselbe auch $= \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$ ist; erhalten wir

$$\cos\omega = \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{Vds},$$

woraus wir schliessen, dass die normale Kraft $= V\sin\omega$ ist. Die Lage der letztern wird am bequemsten mittelst der sphärischen Trigonometrie dargestellt. Man denke sich S (Figur 23.) als den Mittelpunkt einer Kugel, von wo nach der Oberfläche die geraden Linien SP, SQ und SR gezogen werden, so dass PQ, PR und QR Quadranten sind. Die Richtung der Bewegung gehe durch s und die mittlere Richtung der Kräfte durch V; alsdann erhalten wir

$$\cos Ps = \frac{dx}{ds}, \quad \cos Qs = \frac{dy}{ds}, \quad \cos Rs = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos PV = \frac{P}{V}, \quad \cos QV = \frac{Q}{V}, \quad \cos RV = \frac{R}{V}$$

und ausserdem $Vs = \omega$ oder $\cos\omega = \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{Vds}$.

Ist nun der Winkel ω bekannt, so nehme man $sVN = 90°$ an und es wird alsdann die aus dem Mittelpunkt S durch N gezogene gerade Linie die Richtung der normalen Kraft sein.

Die Lage des Punktes N wird so durch seine Abstände von den Punkten P, Q und R bestimmt, dass wir haben

$$\cos PN = \frac{P}{V\sin\omega} - \frac{dx.\cos\omega}{ds.\sin\omega},\quad \cos QN = \frac{Q}{V\sin\omega} - \frac{dy.\cos\omega}{ds\sin\omega}$$

und
$$\cos RN = \frac{R}{V\sin\omega} - \frac{dz.\cos\omega}{ds.\sin\omega}.$$

Da es also hiernach unendlich viele gerade Linien gibt, welche auf die Richtung der Bewegung Ss normal sind, so wird diejenige unter ihnen bestimmt, längs welcher die normale Kraft wirkt und welche die Richtung der Bewegung so krümmt, dass der Krümmungshalbmesser auf die gerade Linie SN fällt. Derselbe wird alsdann $= \frac{Av^2}{2gV\sin\omega}$ (§. 207.).

Aufgabe 17.

§. 228. Ein kleiner Körper, dessen Masse $= A$ ist, bewegt sich in einer Röhre oder einem Kanale und wird durch keine Kräfte angetrieben; man soll seine Bewegung und den Druck bestimmen, welchen er überall gegen die Röhre ausübt.

Auflösung.

(Figur 22.) Es sei ESF die Figur der Röhre, in welcher der Körper sich bewegt und nach Verlauf der Zeit t zum Punkt S gelangt ist, nachdem er den Weg $ES = s$ zurückgelegt hat. Der Ort S werde wie vorher auf drei feste, unter sich normale Axen OA, OB, OC bezogen und man setze die, ihnen parallel gezogenen Ordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YS = z$. Da nun der kleine Körper gezwungen ist, überall die Richtung der Röhre zu verfolgen, muss diese nothwendig Kräfte auf ihn ausüben, welche jedoch so beschaffen sind, dass die Geschwindigkeit keine Aenderung dadurch erleide. Es wird daher die Geschwindigkeit constant und man setze sie $= c$, wodurch also $\frac{ds}{dt} = c$ und $s = ct$ wird. Man beziehe die Krafte, welche die Röhre ausübt, auf dieselben drei Axen und es sei $SP = X$, $SQ = Y$ und $SR = Z$; alsdann haben wir, weil die Geschwindigkeit unveränderlich ist, $Xdx + Ydy + Zdz = 0$.

Da ferner $dt = \frac{ds}{c}$, so wird statt dt das Element ds constant sein und wir erhalten so die Hauptformeln:

$$Ac^2ddx = 2gXds^2,\ Ac^2ddy = 2gYds^2 \text{ und } Ac^2ddz = 2gZds^2,$$

wobei $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist. Die ganze Kraft, welche die Röhre auf den kleinen Körper ausübt, wird demnach

$$= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{Ac^2 \sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}{2g\,ds^2} = V,$$

und ihre Richtung ist gegen die Linien SP, SQ und SR um Winkel geneigt, deren Cosinus respective

$$= \frac{X}{V} = \frac{ddx}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}},$$

$$= \frac{Y}{V} = \frac{ddy}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}},$$

$$= \frac{Z}{V} = \frac{ddz}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}$$

ist. Dieser Kraft ist aber der Druck, welchen umgekehrt der kleine Körper auf die Röhre ausübt, gleich und entgegengesetzt.

Zusatz 1.

§. 229. Setzt man den Krümmungshalbmesser der Curve im Punkte $S = r$, so hat man, weil die normale Kraft $= V$ und die Geschwindigkeit $= c$ ist,

$$r = \frac{Ac^2}{2gV} = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}},$$

wo ds als constant angenommen ist.

Zusatz 2.

§. 230. Die Lage des Krümmungshalbmessers stimmt aber mit der Richtung der Kraft V überein und bildet daher mit den geraden Linien SP, SQ und SR Winkel, deren Cosinus respective

$$= \frac{ddx}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}, \quad = \frac{ddy}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}$$

und

$$= \frac{ddz}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}$$

ist.

Anmerkung.

§. 231. Wir könnten hier auch die Bewegung untersuchen, wenn der kleine Körper nicht auf einer gegebenen Linie, sondern nur auf einer gegebenen Oberfläche fortzuschreiten gezwungen ist, weil aber dieser Gegenstand im zweiten Theile der Mechanik bereits ausführlich behandelt worden ist, werde ich ihn, um nicht zu weitläufig zu sein, hier nicht berühren; besonders auch weil offenbar die ganze Sache darauf hinaus kommt

dass die Richtung der Kraft, welche die Oberfläche auf den kleinen Körper ausübt, auf dieser normal stehen muss. Man bestimme daher mittelst der vorausgesetzten Gleichung der Oberfläche die Lage der Normalen oder ihre Neigung gegen die drei Richtungen SP, SQ und SR, welche mit der vorhin bestimmten Lage der Kraft V wird übereinstimmen müssen. Hieraus erhält man eine neue Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z und verbindet man diese mit der ersten, so wird man den auf der Oberfläche durchlaufenen Weg bestimmen; dass dieser die kürzeste Linie zwischen seinen Endpunkten sei, ist von selbst klar.

Ich kehre nun zur freien Bewegung zurück und werde zeigen, wie man die nicht in derselben Ebene erfolgenden Bewegungen angemessen durch Winkel zu bestimmen habe, welche sich auf einen bestimmten festen Punkt beziehen, nämlich auf die Weise, welche ich oben in Aufgabe 5. (§. 70.) aus einander gesetzt habe. Da diese Weise in der theoretischen Astronomie von grösstem Nutzen und diese Entwickelung der Bewegung in den vorhergehenden Theilen nicht dargestellt worden ist, bestimmen wir für sie die folgende Aufgabe.

Aufgabe 18.

§. 232. (Figur 24.) Ein kleiner Körper wird theils nach einem festen Punkte O hin, theils durch andere beliebige Kräfte angetrieben; man soll seine Bewegung in Bezug auf diesen Punkt bestimmen.

Auflösung.

Man denke sich eine Ebene, nämlich die des Papiers, welche durch den festen Punkt O geht und auf welche wir die Bewegung beziehen, nehme in ihr die feste Axe OA an und es sei nach Verlauf der Zeit t der kleine Körper nach S gelangt. Von diesem fällen wir zuerst auf die Ebene das Perpendikel SY und von Y auf die gerade Linie OA das Perpendikel YX, so dass wir die drei rechtwinkligen Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YS = z$ haben. Da nun der kleine Körper in S zuerst durch eine Kraft längs SO angetrieben wird, so zerlege man dieselbe nach den Richtungen YO und SY; die übrigen Kräfte aber beziehe man so wohl auf dieselben Richtungen als auch auf die, in der Ebene des Papiers auf OY normale, Linie YV. Wir haben daher im ganzen drei Kräfte, die erste längs YO gerichtete $= V$, die zweite längs $YV = S$ und die

dritte längs SR gerichtete $= R$. Da diese Kräfte bekannt sind, reducire man sie auf die Richtungen der Coordinaten und wenn man daher den Winkel $AOY = \varphi$ setzt; so erhält man folgende Kräfte:

längs XO die Kraft $V\cos\varphi + S\sin\varphi = -P$
- YX - - $V\sin\varphi - S\cos\varphi = -Q$
- SR - - R.

Die Wirkungen derselben werden durch die drei folgenden Formeln ausgedrückt:

$$A\,ddx = -\,2g\,dt^2(V\cos\varphi + S\sin\varphi),$$
$$A\,ddy = -\,2g\,dt^2(V\sin\varphi - S\cos\varphi)$$

und $$A\,ddz = 2g\,R\,dt^2,$$

wobei die Masse des kleinen Körpers $= A$ gesetzt ist.

Setzt man ferner den Abstand $OY = u$, so werden, weil $x = u\cos\varphi$ und $y = u\sin\varphi$ ist, die zwei ersten Gleichungen wie oben (§. 217) zurückgeführt auf die folgenden:

$$\text{I.}\quad ddu - ud\varphi^2 + \frac{2g\,Vdt^2}{A} = 0$$

$$\text{II.}\quad u\,dd\varphi + 2du\,d\varphi - \frac{2g\,Sdt^2}{A} = 0.$$

Setzt man nun den Winkel $SOY = \psi$, welcher die Breite des kleinen Körpers genannt wird, während der Winkel $AOY = \varphi$ seine Länge heisst; so wird $SY = z = u\,\text{tg}\,\psi$. Um aber diesen Winkel ψ bequemer zu bestimmen, sei OT die Linie der Knoten, der Winkel $AOT = \omega$ und die Neigung der durch O und die Richtung der Bewegung in S gelegten Ebene gegen die angenommene Ebene $= \varrho$, alsdann wird $TOY = \varphi - \omega$. Zieht man nun YN und SN auf OT normal, so wird $ON = u \times \cos(\varphi - \omega)$ und $YN = u\sin(\varphi - \omega)$; also

$$YS = u\sin(\varphi - \omega)\,\text{tg}\,\varrho = z \text{ und } \text{tg}\,\psi = \sin(\varphi - \omega)\,\text{tg}\,\varrho.$$

Wie oben (§. 70) folgt hieraus

$$\frac{d\omega}{\text{tg}(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin\varrho\cos\varrho} = d.\log(\text{tg}\,\varrho),$$

da also $$d\varrho = \frac{d\omega\sin\varrho\cos\varrho}{\text{tg}(\varphi - \omega)}$$ ist, so wird

$$dz = du\sin(\varphi - \omega)\,\text{tg}\,\varrho + u(d\varphi - d\omega)\cos(\varphi - \omega)\,\text{tg}\,\varrho$$
$$+ u\sin(\varphi - \omega)\frac{d\omega\,\text{tg}\,\varrho}{\text{tg}(\varphi - \omega)}$$

oder $$dz = [du\sin(\varphi - \omega) + ud\varphi\cos(\varphi - \omega)]\,\text{tg}\,\varrho.$$

Differentiirt man diese Gleichung auf's neue, so erhält man

$$ddz = [ddu \sin(\varphi - \omega) + du(2d\varphi - d\omega)\cos(\varphi - \omega) + udd\varphi\cos(\varphi - \omega) - ud\varphi(d\varphi - d\omega)\sin(\varphi - \omega)]\operatorname{tg}\varrho + [du\sin(\varphi - \omega) + ud\varphi\cos(\varphi - \omega)]\frac{d\omega\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}$$

oder

$$ddz = [ddu\sin(\varphi - \omega) + 2du\,d\varphi\cos(\varphi - \omega) + udd\varphi\cos(\varphi - \omega) - ud\varphi^2\sin(\varphi - \omega) + \frac{ud\varphi\,d\omega}{\sin(\varphi - \omega)}]\operatorname{tg}\varrho.$$

Mittelst I. und II. erhält man also

$$ddz = \left[-\frac{2gVdt^2}{A}\sin(\varphi - \omega) + \frac{2gSdt^2}{A}\cos(\varphi - \omega) + \frac{ud\varphi\,d\omega}{\sin(\varphi - \omega)}\right]\operatorname{tg}\varrho,$$

da aber auch $$ddz = \frac{2gRdt^2}{A};$$

so wird

$$\frac{ud\varphi\,d\omega}{\sin(\varphi - \omega)} = \frac{2gdt^2}{A}[V\sin(\varphi - \omega) - S\cos(\varphi - \omega) + R\operatorname{cotg}\varrho]$$

oder

$$\text{III.}\quad d\omega = \frac{2g\,dt^2\sin(\varphi - \omega)}{Au\,d\varphi}[V\sin(\varphi - \omega) - S\cos(\varphi - \omega) + R\operatorname{cotg}\varrho]$$

und

$$\text{IV.}\quad d.\log(\operatorname{tg}\varrho) = \frac{2g\,dt^2\cos(\varphi - \omega)}{Aud\varphi}[V\sin(\varphi - \omega) - S\cos(\varphi - \omega) + R\operatorname{cotg}\varrho].$$

Wir haben daher vier Gleichungen gefunden, in denen die Auflösung der Aufgabe enthalten ist.

Zusatz 1.

§. 233. Da wir also für eine gegebene Zeit t die vier Grössen u, φ, ω und ϱ angeben müssen, so haben wir zuerst die Differentialgleichungen zweiten Grades I. und II., ferner die zwei einfachen Differentiale III. und

$$d.\log(\operatorname{tg}\varrho) = \frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)} \quad \text{oder} \quad d.\operatorname{tg}\varrho = \frac{d\omega.\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}$$

erhalten.

Zusatz 2.

§. 234. Hat man diese Werthe gefunden, so ergibt sich sowohl der Winkel $SOY = \psi$, die Breite, als auch der wahre Abstand SO mittelst der Formeln

$$\operatorname{tg}\psi = \sin(\varphi - \omega)\operatorname{tg}\varrho \quad \text{und} \quad OS = \frac{u}{\cos\psi}.$$

Man pflegt u den curtirten Abstand zu nennen.

Zusatz 3.

§. 235. Wenn $\sin(\varphi - \omega) = 0$ ist, d. h. wenn der kleine Körper durch die angenommene Ebene geht, so wird, wie wir

schon gesehen haben, $d\omega = 0$. Jetzt aber ist es klar, dass so wohl die Knotenlinie, als auch die Neigung keine Aenderung erleiden, wenn wir haben

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) + R \cot g \varrho = 0.$$

Zusatz 4.

§. 236. Es ist aber $V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) = -Q \cos \omega + P \sin \omega$ und wenn wir daher die ursprünglichen Kräfte P, Q und R einführen, so erhalten wir

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) + R \cot g \varrho = P \sin \omega - Q \cos \omega + R \cot g \varrho.$$

Diess ist gewissermaassen eine Kraft, welche so wohl den Ort der Knotenlinie, als auch die Neigung verändert.

Anmerkung.

§. 237. Es verdient hier besonders bemerkt zu werden, dass die augenblickliche Aenderung in der Lage der Knotenlinie und in der Neigung nach dieser ziemlich geschickten Methode ausgedrückt werden kann, woraus sich für die theoretische Astronomie ausgezeichnete Vortheile ergeben. Aus dieser Quelle hat Tobias Mayer mit unglaublichem Fleisse die vorzüglichen Mondtafeln abgeleitet, welche die Astronomie zum höchsten Gipfel gefördert zu haben scheinen. Da aber die Bewegung des Mondes, welche man nach dieser Methode bestimmt, keineswegs eine absolute, sondern eine auf den Mittelpunkt der Erde sich beziehende ist, so muss man bei dieser Untersuchung zugleich auf die Bewegung der Erde Rücksicht nehmen. Damit wir nun diese Methode benutzen können, müssen wir die Lehren vortragen, mittelst deren man die respectiven Bewegungen in Rechnung ziehen kann; sobald nämlich die Bewegung desjenigen Körpers, in Bezug auf welchen man die Bewegungen der andern Körper abschätzt, bekannt ist. Da dieser Gegenstand in den frühern Theilen der Mechanik nicht deutlich genug dargestellt worden ist, werde ich ihn hier mit grösserer Sorgfalt behandeln; nachdem dies geschehen ist, werden wir zu den Bewegungen endlicher Körper, welche ich dort noch nicht berührt hatte, mit grösserm Erfolge fortschreiten können.

Kapitel VI.

Von der respectiven Bewegung kleiner, durch beliebige Kräfte angetriebener Körper.

Lehrsatz 6.

§. 238. (Figur 25.) **Wenn ein kleiner Körper *A* durch beliebige Kräfte angetrieben wird, so wird seine Bewegung in Bezug auf den Punkt *O*, welcher sich gleichförmig und geradlinig bewegt, durch dieselben Kräfte bestimmt werden.**

Beweis.

Im Zeittheilchen dt werde der kleine Körper A, in Folge der ihm beigebrachten Bewegung, über den Weg Aa fortgeführt, durch die antreibenden Kräfte aber längs des kleinen Weges ab abgelenkt, so dass dieser die, während des Zeittheilchens dt im kleinen Körper A hervorgebrachte, Wirkung der Kräfte darstellt. Inzwischen schreite aber der Punkt O über den Weg Oo fort, so dass nach Verlauf des Zeittheilchens dt dieser Punkt sich in o befinde, während er sich vorher in O befand, der kleine Körper aber jetzt in b und vorher in A. Nun ziehe man aus O die Linie $O\alpha =$ und $\#\ oa$, eben so $\alpha\beta =$ und $\#\ ab$ und es wird der Körper in Bezug auf den Punkt O in demselben Zeittheilchen dt von A nach b gelangt zu sein scheinen; diese Bewegung wird sich alsdann so verhalten, als ob er in Folge der beigebrachten Bewegung den Weg $A\alpha$ beschrieben hätte und zugleich aus α über den kleinen Weg $\alpha\beta$ abgelenkt worden wäre. Wenn nämlich der Körper, durch keine Kräfte

angetrieben, sich längs Aa gleichförmig und geradlinig bewegte, so würde auch, wie wir oben gezeigt haben, die respective Bewegung längs $A\alpha$ gleichförmig und geradlinig sein. Jetzt aber bringen die antreibenden Kräfte in der absoluten Bewegung den kleinen Weg ab, in der respectiven den kleinen Weg $\alpha\beta$ hervor und da $ab =$ und $\# \alpha\beta$, so wird die respective Bewegung durch dieselben Kräfte, als die absolute gestört. Bewegt sich daher der Punkt O gleichförmig und geradlinig, so wird in Bezug auf ihn die Bewegung des kleinen Körpers A, durch welche Kräfte dieser auch angetrieben werden mag, sich eben so verhalten, als ob der Punkt O sich in Ruhe befände und der Körper durch dieselben Kräfte angetrieben würde.

Zusatz 1.

§. 239. Kennen wir demnach die Kräfte, welche den kleinen Körper A antreiben, so können wir mittelst derselben, nach den oben gegebenen Vorschriften, nicht nur seine absolute, sondern auch seine respective Bewegung in Bezug auf den Punkt O bestimmen, welcher letztere sich gleichförmig in gerader Linie bewegt.

Zusatz 2.

§. 240. Es werden auch selbst dieselben Differentialformeln zweiter Ordnung so wohl die absolute als auch die respective Bewegung bestimmen, der Unterschied beschränkt sich nur auf die Integration, welche in beiden Fällen dem anfänglichen Zustande gehörig angepasst werden muss.

Zusatz 3.

§. 241. Mag nun der Punkt O, in Bezug auf welchen man die Bewegung abschätzt, ruhen oder sich gleichförmig und geradlinig bewegen, so wird die Untersuchung sich auf gleiche Weise verhalten. Wie nämlich in diesem Falle die Wirkung der Trägheit sich nicht ändert, wird auch die Wirkung der Kräfte dieselbe bleiben.

Erläuterung 1.

§. 242. Während der Punkt und der kleine Körper im Geiste von o und b nach O und β übertragen werden, müssen wir bewirken, dass β in Bezug auf O dieselbe Lage beibehalte,

als b in Bezug auf o; da wir nun O und o als Punkte ansehen, so scheint hierdurch die Sache keinesweges bestimmt zu sein, insofern als nach unserer obigen Andeutung die Abstände ob und $O\beta$ allein ihre respective Lage beibehalten. Ist aber der absolute Weg schon festgestellt, so kann man die festen Richtungen dergestalt annehmen, dass $O\beta$ nicht nur gleich ob, sondern auch nach derselben Seite gerichtet sein muss; diess geschieht, wenn man $O\beta =$ und $\#\, ob$ annimmt. Die Sache kommt auf dasselbe hinaus, wenn wir nach den ersten Vorschriften statt des Punktes O einen ausgedehnten Körper annehmen, in welchem man sich drei oder vier feste Punkte denken kann. Alsdann muss man aber annehmen, dass dieser Körper O, in Bezug auf welchen wir die Bewegung des andern abschätzen, sich so längs Oo bewege, dass seine einzelnen Punkte mit gleichen Geschwindigkeiten längs einander paralleler Richtungen fortgeführt werden. Welche Lage nämlich der kleine Körper b in Bezug auf die vier im Körper o angenommenen Punkte einhalten mag, so wird alsdann der nach β übertragene kleine Körper in Bezug auf dieselben vier Punkte dieselbe Lage beibehalten, während der Körper sich noch in O befindet. Durch diese Bemerkungen wird es klar, dass die absolute Bewegung des kleinen Körpers, vermöge welcher er von A nach b übertragen wird, während der Punkt O nach o fortschreitet, mit der respectiven Bewegung übereinstimmt, vermöge welcher er von A nach β übertragen wird. Ist dies auch nur in Betreff des Zeitelements dt gezeigt worden, so können wir doch, weil es sich auf ähnliche Weise in Betreff aller Zeitelemente zeigen lässt, mit Recht allgemein behaupten, dass die ganze hier bestimmte respective Bewegung der absoluten entspreche.

Anmerkung.

§. 243. Das, was wir hier über die respective Bewegung des kleinen Körpers A in Bezug auf den Punkt O gelehrt haben und ferner lehren werden, pflegt sonst und besonders in der Astronomie unter der Benennung der **scheinbaren Bewegung** aufgestellt zu werden. Im Punkt O nämlich, in Bezug auf welchen man die Bewegung des kleinen Körpers A abschätzt, befindet sich der Beobachter und es wird die Frage so vorgelegt, auf welche Weise diesem Beobachter die Bewegung des Körpers erscheinen wird. Wie nämlich auch der Punkt O, der Standpunkt des Beobachters sich bewegen mag, so nimmt man an, dass der letztere seine Bewegung nicht

merke und beständig an demselben Orte zu verharren glaube. Da er nun zuerst den Körper in A, nach Verlauf des Zeittheilchens dt aber in β erblickt, so wird er glauben, der Körper sei inzwischen von A nach β übertragen, da er doch in der Wirklichkeit von A nach b gelangt ist. Diese Uebertragung von A nach β heisst die scheinbare Bewegung. In dem Falle unseres Lehrsatzes nehmen wir an, dass der Beobachter sich gleichförmig in gerader Linie bewege und haben bewiesen, dass die scheinbare Bewegung des kleinen Körpers A nach den Lehren der Mechanik bestimmt werden wird, wenn man sich vorstellt, dass er durch dieselben Kräfte angetrieben werde, welche in der That auf ihn wirken. Dieselben Differentialformeln zweiter Ordnung drücken nämlich sowohl die scheinbare, als die wahre Bewegung aus; für die erstere müssen sie aber so integrirt werden, dass sie im Anfange oder zu irgend einer gegebenen Zeit mit der scheinbaren Bewegung übereinstimmen. Der ganze Unterschied zeigt sich daher erst bei der Integration.

Erläuterung 2.

§. 244. Die Kräfte, welche die respective Bewegung stören, müssen daher denjenigen gleich sein, welche auf die absolute Bewegung einwirkten, weil wir finden, dass ihre Wirkungen oder die kleinen Wege ab und $\alpha\beta$ einander gleich sind. Diese Gleichheit der Kräfte nimmt man leicht in der Rechnung wahr, wenn sie zu der Art der absoluten Kräfte gehören, welche auf gleiche Weise auf einen sich bewegenden, wie auf einen ruhenden kleinen Körper wirken. Wird aber der Körper A durch Kräfte angetrieben, welche von seiner Geschwindigkeit abhängen, wozu der Widerstand der Flüssigkeiten gehört; so hat man die Grösse dieser Kräfte aus der wahren Geschwindigkeit, welche der kleine Körper bei der absoluten Bewegung hat, abzuleiten und dieselbe bei der respectiven Bewegung anzuwenden. Bewegt sich der kleine Körper A etwa in einer Flüssigkeit, so wird der Widerstand oder die Kraft, welche er durch sie erleidet, von seiner absoluten Geschwindigkeit, womit er den kleinen Weg Aa durchläuft, abhängig sein und dieselbe Kraft muss man in die Rechnung für die respective Bewegung einführen. Man würde einen grossen Irrthum begehen, wenn man den Widerstand durch die Geschwindigkeit der respectiven Bewegung, womit der kleine Weg $A\alpha$ zurückgelegt wird, bestimmen wollte. Um diesen Irrthum zu vermeiden, müssen wir die Flüssigkeit, in so

fern sie absolut ruhet, ansehen, als ob sie mit einer derjenigen des Punktes O gleichen und entgegengesetzten Bewegung fortgeführt würde. Alsdann wird nämlich die mit dieser Bewegung begabte Flüssigkeit eben so auf den, mit respectiver Bewegung längs $A\alpha$ fortschreitenden, kleinen Körper wirken, als die ruhende Flüssigkeit auf den mit absoluter Bewegung über Aa fortgeführten Körper. Stets aber, so oft von einer respectiven Bewegung die Rede ist, muss man sich vorstellen, dass nicht nur der kleine Körper A, sondern gleichsam der ganze Raum mit allen Körpern, welche auf jenen einzuwirken im Stande sind, mit einer, der des Punktes O gleichen und engegengesetzten, Bewegung fortschreite, indem durch diese erdachte Bewegung der Punkt O zur Ruhe gebracht wird.

Lehrsatz 7.

§. 245. Wenn zwei Körper A und B sich beliebig bewegen, indem sie durch beliebige Kräfte angetrieben und ihnen ausserdem in demselben Augenblick gleiche Bewegung nach derselben Richtung beigebracht worden ist; so werden sie unter sich dieselbe Bewegung beibehalten.

Beweis.

(Figur 26.) Es drücke die gerade Linie Aa die Bewegung des Körpers A aus oder es sei dieselbe der von ihm im Zeittheilchen dt beschriebene Weg, auf ähnliche Weise habe der Körper B eine Geschwindigkeit, mit welcher er in demselben Zeittheilchen dt den Weg Bb beschreiben würde. Durch die antreibenden Kräfte werde jener von a nach m, dieser aber von b nach n abgelenkt, so dass nach Verlauf der Zeit dt die gerade Linie mn die relative Lage beider Körper darstellt, welche vorher durch die gerade Linie AB dargestellt wurde. Im Anfang des Zeittheilchens dt werde aber ferner beiden Körpern plötzlich eine gleiche Bewegung nach derselben Richtung eingeflösst, vermöge welcher allein der Körper A nach p und B nach q im Zeittheilchen dt geführt werden würde, so dass $Ap =$ und $\#$ Bq wird. Tritt aber die bereits inwohnende Bewegung hinzu, so werden, wenn man die Parallelogramme $Aa\alpha p$ und $Bb\beta q$ vollendet, die Diagonalen $A\alpha$ und $B\beta$ die Wege darstellen, welche die Körper in Folge beider Bewegungen während des Zeittheilchens dt zurücklegen würden.

Da nun $a\alpha =$ und $\#\ b\beta$, so wird auch $ab =$ und $\#\ \alpha\beta$, so dass die relative Lage $\alpha\beta$ nach beigebrachter neuer Bewegung mit der relativen Lage ab übereinstimmt. Man nehme ferner $\alpha\mu =$ und $\#\ am$, und $\beta\nu =$ und $\#\ bn$ an, da nun μ und ν die Oerter der Körper sind, wenn die antreibenden Kräfte hinzutreten; so wird auch $\mu\nu =$ und $\#\ mn$. Wenn daher die antreibenden Kräfte dieselben bleiben, wird eine beigebrachte Bewegung nichts in der relativen Lage und Bewegung beider Körper ändern.

Zusatz 1.

§. 246. Dies gilt auch für mehrere Körper, wieviel nämlich derselben auch da sein mögen, so wird, wenn ihnen einzeln zugleich gleiche und parallele Bewegungen eingeflösst werden, ihre relative Bewegung unter sich nicht geändert werden, welche einzelnen Kräfte sie auch immer antreiben mögen.

Zusatz 2.

§. 247. Diese auf's neue eingeflösste Bewegung kommt auf dasselbe hinaus, als wenn der ganze Raum mit den Körpern durch jene neue Bewegung gleichförmig in gerader Linie fortgeführt würde. Die hier angewandte zusammengesetzte Bewegung stimmt mit einer Fortführung des Raumes überein.

Anmerkung 1.

§. 248. Es ist hier nicht sowohl von einer wirklichen Einflössung der Bewegung die Rede, welche allerdings nicht ohne einen bemerkbaren Stoss geschehen könnte, als von einer Bewegung, welche wir uns nur im Geiste den Körpern beigebracht denken. Die in diesem Kapitel vorgetragenen Lehren sind nämlich nicht auf wirkliche, in der Bewegung erfolgende Veränderungen zu beziehen, da unsere Aufgabe hier ist, beliebige absolute Bewegungen auf respective zu reduciren, so dass die Formeln nur die respective Bewegung angeben, während die absolute durchaus keine Aenderung erleidet. Ferner kann man hiernach diesen Lehrsatz, dem vorhergehenden entsprechend, auch folgendermaassen beweisen. Man denke sich ausser den Körpern A und B den Punkt O, welcher nach der Richtung Oo parallel derjenigen, nach welcher den Körpern eine neue Bewegung beigebracht wird, sich gleichförmig mit derselben Geschwindigkeit bewegt, so dass er im Zeittheilchen dt den Weg $Oo = Ap = Bq$, den letztern parallel aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen würde. Da wir nun vorher bewiesen

haben, dass die respective Bewegung der Körper A und B in Bezug auf den Punkt O durch dieselben Kräfte, wie die absolute bestimmt wird, so wird man offenbar diese respective Bewegung erhalten, wenn man dem ganzen Raume nebst den Körpern eine gleiche und derjenigen, womit der Punkt O sich bewegt, entgegengesetzte Bewegung beilegt. Auf diese Weise wird der Punkt O zur Ruhe gebracht, den Körpern A und B aber jene Bewegung längs Ap und Bq beigelegt und weil sie in Bezug auf den Punkt O dieselbe Bewegung beibehalten, behalten sie auch dieselbe relative Bewegung unter sich.

Anmerkung 2.

§. 249. Die Frage in Betreff der Bestimmung einer beliebigen respectiven oder scheinbaren Bewegung durch Rechnung kommt darauf zurück, dass man zuerst bestimmt, was für eine Bewegung man ausserdem dem Körper wenigstens in Gedanken beizulegen habe, ferner durch was für Kräfte ausser denen, welche wirklich auf ihn wirken, man ihn angetrieben denken muss, damit, wenn man diese Bewegung als eine absolute behandelt und durch die oben dargestellten Formeln ausdrückt, eben die verlangte respective Bewegung sich ergebe. Es ist nämlich einleuchtend, dass wir stets so wohl in der inwohnenden Bewegung, als auch in den antreibenden Kräften eine derartige Veränderung uns denken können, dass die auf diese Weise veränderte Bewegung mit der gesuchten respectiven übereinstimme. Diese ganze Arbeit wird daher durch eine doppelte Aenderung, die eine in der inwohnenden Bewegung, die andere in den antreibenden Kräften ausgeführt, beide aber nur im Geiste angestellt; es kann aber hierbei keine Schwierigkeit daraus entstehen, wie wir den Körpern A und B jene Bewegungen längs Ap und Bq ausser den Bewegungen, durch welche sie bereits fortgeführt werden, einflössen sollen. Es ist nämlich hinreichend, wenn wir erklären, diese Einflössung sei so zu verstehen, dass der mit der Geschwindigkeit Aa sich bewegende Körper, wenn ihm ausserdem die Geschwindigkeit Ap beigelegt wird, als mit der durch die Diagonale $A\alpha$ ausgedrückten Geschwindigkeit fortgehend angesehen werden muss. Diese Einflössung oder vielmehr Zugabe der Bewegung ist gleicher Form mit den oben gegebenen Regeln in Betreff der Zerlegung einer Bewegung in zwei oder drei Seitenbewegungen, indem diese auch nur in Gedanken angestellt wird. Man pflegt eine solche Einflössung von Bewe-

gung auch so darzustellen, dass man sich denkt, es werde der ganze Raum nebst den in ihm enthaltenen Körpern durch eine gewisse Bewegung fortgeführt. Im frühern Lehrsatz haben wir gesehen, dass, wenn der Punkt, in Bezug auf welchen man die Bewegung abzuschätzen hat, gleichförmig und geradlinig fortschreitet, zur Bestimmung der respectiven Bewegung nichts in den antreibenden Kräften geändert werden muss. Man hat vielmehr die inwohnende Bewegung nur so abzuändern, dass man ausserdem eine Bewegung einflösst, welche der jenes Punktes gleich und entgegengesetzt ist.

Lehrsatz 8.

§. 250. (Fig.27). Wenn die kleinen Körper $A, B,$ und C sich unter dem Antrieb beliebiger Kräfte irgendwie bewegen und dieselben ausserdem längs paralleler Richtungen durch Kräfte angetrieben werden, welche ihren Massen proportional sind; so erleidet ihre relative Lage keine Störung.

Beweis.

Es mögen sich jetzt die Körper in A, B, und C befinden und sowohl in Folge der ihnen inwohnenden Bewegung, als auch der antreibenden Kräfte während des Zeittheilchens dt nach a, b und c gelangen, alsdann bestimmen diese Punkte ihre relative Lage. Denken wir uns nun, dass dieselben ausser durch diese Kräfte einzeln durch Kräfte, welche ihren Massen proportional sind und längs der parallelen Richtungen $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$ angetrieben werden; so werden sie sich nicht mehr in a, b und c, sondern in α, β und γ befinden, dergestalt dass die kleinen Wege $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$ einander parallel und gleich sein werden. Es ist alsdann einleuchtend, dass die relative Lage der Punkte α, β und γ unter sich dieselbe sein wird, als die der Punkte a, b und c, in welchen sie sich befinden würden, wenn diese neuen Kräfte nicht hinzugetreten wären.

Zusatz 1.

§. 251. Wenn daher die kleinen Körper A, B und C in jedem Augenblick ausser durch die Kräfte, welche in der Wirklichkeit sie forttreiben, durch ihren Massen proportionale Kräfte längs einander paralleler Richtungen angetrieben werden; so werden sie in jedem Augenblick dieselbe relative Lage unter sich behalten, als ob diese neuen Kräfte nicht da wären.

Zusatz 2.

§. 252. Die relative Bewegung der Sonne und Planeten unter sich erleidet daher keine Aenderung, wenn man sich denkt, dass diese einzelnen Körper ausser durch die Kräfte, welche sie wirklich forttreiben, durch neue ihren Massen proportionale Kräfte längs unter sich paralleler Richtungen angestossen werden.

Zusatz 3.

§. 253. Nimmt man diese hinzugefügten Kräfte so an, dass die, welche auf den Körper A wirkt, derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, durch welche er wirklich angetrieben wird, so wird seine Bewegung nicht geändert werden. Denken wir uns, dass diess in den einzelnen Augenblicken geschehe, so wird der kleine Körper A in seinem Zustande verharren und gleichförmig sich in gerader Linie bewegen.

Erläuterung.

§. 254. Es kann hieraus ein Zweifel entspringen, ob auch die Punkte α und β dieselbe Lage unter sich behalten, wie a und b und ob sich nicht eine andere relative Lage ergeben werde. Um diesen Zweifel zu heben, lassen wir zuerst die Kräfte zur Seite, welche wirklich diese kleinen Körper antreiben und indem wir auch die Kräfte entfernen, welche hinzugefügt worden sind, mögen jene im folgenden Zeittheilchen nach a' und b' gelangen, so dass

$$aa' = Aa \text{ und } bb' = Bb$$

wird. Wenn man aber diese Kräfte im vorhergehenden Zeittheilchen dt zulässt, werden die Kräfte nach α' und β' gelangen, so dass

$$\alpha\alpha' = A\alpha \text{ und } \beta\beta' = B\beta, \text{ also } b'\beta' = \text{und} \# a'\alpha'$$

und die relative Lage der Punkte α' und β' dieselbe ist, als die der Punkte a' und b'. Mit Recht würde man hier zwar einwerfen, dass die kleinen Wege $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ fälschlich denen $A\alpha$ und $B\beta$ gleich angenommen werden, da in Folge der Wirksamkeit der Kräfte die Geschwindigkeiten verändert worden sind. Weil aber die beiderseitige Aenderung einander ähnlich ist, werden nichts desto weniger die kleinen Wege $a'\alpha'$ und $b'\beta'$ unter sich gleich und parallel bleiben, was hinreichend ist,

wenn sie auch nicht genau doppelt so gross als $a\alpha$ und $b\beta$ sind. Was aber auch immer für Kräfte während dieses zweiten Zeittheilchens dt auf beide kleine Körper wirken mögen, so wird der erste A eben so stark aus α' als aus a', und der zweite B eben so stark aus β' als aus b' abgelenkt werden; es wird demnach, mögen neue den Massen proportionale Kräfte hinzugetreten sein oder nicht, doch dieselbe relative Lage beibehalten werden. Setzen wir nämlich voraus, dass durch eigenthümliche Kräfte der kleine Körper A von a' nach m übertragen werde, so würde derselbe auch von α' nach μ versetzt werden, so dass $a'm =$ und $\#\ \alpha'\mu$ wäre; auf ähnliche Weise würde, wenn der kleine Körper B durch eigenthümliche Kräfte von b' nach n übertragen wäre, derselbe von β' nach ν versetzt werden, so dass $\beta'\nu =$ und $\#\ b'n$ wäre. Da also μ und ν dieselbe relative Lage wie m und n beibehalten, so wird offenbar auch im Verlaufe der Zeit durch jene ausserdem hinzugefügten Kräfte die relative Lage nicht verändert werden.

Aufgabe 19.

§. 255. (Figur 26.) Der kleine Körper B bewegt sich, indem er irgendwie durch Kräfte angetrieben wird; man soll in Bezug auf ihn die respective Bewegung des Körpers A bestimmen, welcher ebenfalls, unter Antrieb von irgend welchen Kräften, sich beliebig bewegt.

Auflösung.

Es werde im Anfange beiden Körpern eine Bewegung beigebracht, welche derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, womit der kleine Körper B fortgeführt wird, alsdann wird, wenigstens im ersten Augenblick, dieser Körper zur Ruhe gebracht werden. Beide Körper werden ferner mit relativer Bewegung eben so fortschreiten, als ob diese gemeinschaftliche Bewegung ihnen nicht beigebracht worden wäre und da diese Veränderung nur im anfänglichen Zustande geschehen ist, wird die darauf folgende Bewegung beider Körper durch dieselben Formeln ausgedrückt werden. Der Körper B wird sich, in so weit er der Wirksamkeit der Kräfte unterworfen ist, hierauf zwar bewegen; wird er aber ausserdem beständig durch Kräfte angetrieben, welche jenen gleich und entgegengesetzt sind, so begreifen wir, dass die Wirkung der letztern aufgehoben

und der Körper beständig in Ruhe verharren wird. Damit aber die relative Bewegung nicht gestört werde, wollen wir uns denken, dass auch an dem kleinen Körper A in den einzelnen Augenblicken ähnliche Kräfte angebracht werden, welche jenen, den Körper B antreibenden, entgegengesetzt sind und sich zu ihnen verhalten, wie die Masse A zur Masse B. Auf diese Weise wird der Körper B ganz zur Ruhe gebracht, indem die Bewegung des andern Körpers A in Bezug auf diesen nicht verändert wird, es wird daher diese Bewegung, welche A hat, seine respective sein, wie sie dem in B befindlichen Beobachter erscheinen würde. Um diese respective Bewegung durch Rechnung zu bestimmen, müssen wir den Körper A als durch Kräfte von zweifacher Art angetrieben betrachten, zuerst nämlich durch eben die Kräfte, welche ihn wirklich antreiben, zweitens müssen die Kräfte, durch welche der Körper B angetrieben wird, im Verhältniss der Massen $B:A$ vermehrt oder vermindert und nach den entgegengesetzten Richtungen ausserdem am Körper A angebracht gedacht werden. Mittelst dieser Kräfte wird man die Bewegung des kleinen Körpers A, als ob sie eine absolute wäre, nach den vorher auseinander gesetzten Vorschriften bestimmen und seine gesuchte respective Bewegung erhalten.

Zusatz 1.

§. 256. Wird daher nach Verlauf der Zeit t der Körper A durch eine Kraft $= P$, der Körper B durch eine Kraft $= Q$ angetrieben, so nehme man die Kraft $= \frac{A.Q}{B}$ und bringe dieselbe ausserdem an dem kleinen Körper A an, und zwar in der entgegengesetzten Richtung, nach welcher Q auf B wirkt.

Zusatz 2.

§. 257. Wenn man von diesen Kräften, welche zu jeder Zeit am kleinen Körper A angebracht werden, auf Differentialformeln zweiter Ordnung schliesst, welche seine Bewegung bestimmen; so ist die Integration dem als bekannt betrachteten Anfangszustande anzupassen, indem man nämlich die, durch die Integration eintretenden, Constanten diesem Zustande entsprechend bestimmt.

Anmerkung 1.

§. 258. Nach dieser Regel pflegt man die Bewegung des

Mondes, wie sie aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen werden würde, zu bestimmen. Obgleich zwar die Himmelskörper wegen ihrer ungeheuern Grösse hier ausgeschlossen zu sein scheinen, wird doch unten gezeigt werden, dass dieselben sich eben so bewegen, als ob die Masse eines jeden in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre, so dass man sie als Punkte betrachten kann. Um diese scheinbare Bewegung des Mondes zu bestimmen, reicht es daher nicht hin, die Kräfte zu kennen, welche den Mond beständig antreiben; sondern man muss auch sorgfältig diejenigen Kräfte erforschen, deren Wirksamkeit die Erde selbst unterworfen ist. Diese Kräfte muss man hierauf im Verhältniss der Erd- zur Mondmasse vermindern und sie ausserdem in Richtungen, entgegengesetzt denen, wonach sie auf die Erde wirken, am Monde angebracht denken. Durch diese Kräfte zusammengenommen muss die respective Bewegung des Mondes, wie sie einem im Mittelpunkte der Erde befindlichen Beobachter erscheinen würde, bestimmt werden. Auf ähnliche Weise müssen, wenn der Mittelpunkt der Sonne nicht ruhet und die Bewegung der Planeten in Bezug auf diesen Mittelpunkt zu bestimmen ist, alle Kräfte, denen die Sonne unterworfen ist, nach vorgeschriebener Weise ausserdem auf die Planeten übertragen werden. Hieraus geht hervor, dass diese Aufgabe in der gesammten theoretischen Astronomie die ausgedehnteste Anwendung findet; allein auch für die Erforschung anderer Bewegungen, wo es oft von Nutzen ist, die respectiven Bewegungen zu kennen, ergeben sich hieraus die grössten Hülfsmittel.

Anmerkung 2.

§. 259. Durch das Bisherige habe ich dasjenige, was in den frühern Theilen über die Bewegung der Punkte auseinander gesetzt worden ist, theils zu erläutern, theils zu ergänzen geglaubt und es scheint mir, dass ich hierdurch nicht nur die Principien der Bewegung deutlicher auseinander gesetzt und bestätigt habe, sondern ich habe auch ihre Anwendung auf beliebige Fälle und die Reduction auf absolute Maasse nicht wenig erleichtert. Ferner habe ich auch die Lehre von der respectiven Bewegung, welche in jenen Theilen fast ganz vernachlässigt worden war, hier sorgfältiger auseinander zu setzen für nothwendig gehalten, weil dieselbe in der Folge den grössten Nutzen verschaffen wird. Ich gehe nun zu den Abschnitten

der Mechanik über, welche ich in jenen Theilen gar nicht berührt hatte und hier stossen uns zuerst starre Körper auf, deren Gestalt gar keiner Veränderung fähig ist und deren Bewegung wir entwickeln müssen, sowohl wenn sie sich selbst überlassen sind, als auch wenn sie durch Kräfte angetrieben werden. Hierauf erst werden wir diese Untersuchungen auf die Bewegungen biegsamer, elastischer und flüssiger Körper ausdehnen können, wohin wir auch die Bewegungen zu zählen haben, welche aus dem Zusammentreffen mehrerer Körper jeder Art entspringen. Wenn wir diese verschiedenen Arten erwägen, werden wir einsehen, dass sich in der Mechanik ein sehr weites Feld für unsere Studien eröffnet, dessen Bebauung die reichste Erndte verspricht.

Abhandlung

über

die Bewegung starrer Körper.

Kapitel I.

Von der fortschreitenden Bewegung starrer Körper.

Erklärung 1.

§. 260. Ein starrer Körper wird ein solcher genannt, dessen Gestalt keine Aenderung erleidet oder dessen einzelne Elemente beständig dieselben gegenseitigen Abstände beibehalten.

Zusatz 1.

§. 261. Kennt man daher den Ort von je vier Punkten eines starren Körpers, so wird seine Lage bekannt, indem man hierdurch die Orte aller übrigen Punkte kennen lernen wird, wenn nur jene vier nicht in derselben Ebene liegen.

Zusatz 2.

§. 262. Meistentheils genügt zur Bestimmung der Lage eines starren Körpers die Kenntniss von drei Punkten desselben, wenn diese nur nicht auf einer geraden Linie liegen; obgleich nämlich auf diese Weise eine zweifache Lage übrig bleibt, so weiss man doch sehr oft von andern Seiten her, welche von beiden stattfindet.

Erläuterung.

§. 263. Für starre Körper gebe ich nicht die Erklärung, dass ihre Gestalt durchaus gar keine Aenderung erleiden könne, indem es bekannt ist, dass es keine so harte Körper in der Welt gibt, zu deren Formänderung gar keine hinreichenden Kräfte existiren, da ja selbst der sehr harte Diamant zerbrochen werden kann. Zur Klasse der starren Körper zähle ich demnach alle diejenigen, welche während ihrer Bewegung wirklich

keine Veränderung ihrer Gestalt erleiden oder welche Kräfte, deren Einwirkung sie wirklich unterworfen sind, ohne irgend eine Veränderung ihrer Gestalt auszuhalten vermögen, wenn sie auch grössern Kräften nicht widerstehen würden. So setze ich in den Körpern, deren Bewegung ich hier zu betrachten gedenke, einen derartigen Bau oder eine solche Verbindung ihrer Theile voraus, dass dieselbe durch die wirklich antreibenden Kräfte nicht gestört werden kann; ich kümmere mich dabei aber gar nicht darum, ob etwa andere Kräfte darauf einwirken. Man hat daher am meisten diejenigen Kräfte zu beachten, in Bezug auf welche solche Körper für starr gehalten werden müssen, deren Zusammenhang der Theile der Einwirkung jener hinreichend widersteht, wenn dieselben auch in Bezug auf andere Kräfte keinesweges für starr zu halten sind. Es ist daher möglich, dass sehr weiche und zerbrechliche Körper für uns starre sind, andere aber an sich weit härtere hiervon ausgeschlossen werden müssen. Während wir daher die Bewegung derartiger Körper erforschen, ist es angemessen, eifrig diejenigen Kräfte zu untersuchen, welche auf ihren Zusammenhang und die Verbindung ihrer Theile wirken, um so zu erfahren, eine wie grosse Festigkeit erforderlich sei, damit sie ihre Gestalt beibehalten. Wir werden daher einen Körper als einen starren betrachten, wenn die Verbindung seiner Theile hinreichend fest ist, so dass nicht einmal zwei Elemente durch die Kräfte, welche er wirklich auszuhalten hat, einander genähert oder von einander entfernt werden können.

Anmerkung.

§. 264. Ein starrer Körper kann demnach nur eine solche Bewegung annehmen, bei welcher alle seine Punkte beständig dieselben gegenseitigen Abstände beibehalten; nichts desto weniger ist aber ein solcher Körper unendlich vieler Bewegungen fähig, während selbst ein einziger seiner Punkte sich in Ruhe befindet, kann ein anderer auf dem Umfange einer Kugel herumgeführt werden und wie dieser sich auch immer bewegen mag, irgend ein dritter Punkt sich schneller oder langsamer bewegen, so dass er jedoch von jenen zweien die richtigen Abstände beibehält. Man ersieht hieraus, dass, wenn kein Punkt sich in Ruhe befindet, noch weit mannigfaltigere Bewegungen innerhalb des Körpers stattfinden können; kennt man aber die Bewegung dreier Punkte, welche nicht in gerader

Linie liegen, so wird auch die Bewegung aller übrigen, d. h. die des ganzen Körpers bekannt. Unter allen diesen Bewegungen ist aber diejenige die einfachste, bei welcher die einzelnen Punkte des Körpers längs einander paralleler Richtungen und mit gleichen Geschwindigkeiten in jedem Augenblick fortrücken; durch eine solche Bewegung wird nämlich die relative Lage aller Theilchen durchaus nicht gestört. Diese Art der Bewegung, welche allen Körpern zukommt, wollen wir genauer betrachten.

Erklärung 2.

§. 265. Eine fortschreitende Bewegung ist diejenige, bei welcher die einzelnen Punkte eines Körpers mit gleichen Geschwindigkeiten nach unter sich parallelen Richtungen in jedem Augenblik fortrücken.

Zusatz 1.

§. 266. Ist daher die Bewegung eines einzigen Punktes bekannt, so kennt man auch die ihr gleiche Bewegung aller Punkte, indem diese nämlich einzeln in jedem Augenblick nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit, wie jener Punkt fortgeführt werden.

Zusatz 2.

§. 267. Es mag nun irgend ein Punkt eine gerade oder krumme Linie mit beliebiger Bewegung beschreiben, so werden durchaus alle Punkte sich längs gleicher gerader oder krummer Linien auf ähnliche Weise bewegen.

Zusatz 3.

§. 268. Durch eine solche Bewegung, sei dieselbe gerad- oder krummlinig, werden die gegenseitigen Abstände je zwei beliebiger Punkte des Körpers nicht verändert; es werden auch selbst die geraden Linien, welche je zwei beliebige Punkte mit einander verbinden, einander stets parallel bleiben.

Anmerkung.

269. Diese Bewegung als die einfachste und welche alle Körper annehmen können, bietet sich zuerst der Betrachtung dar und wir nehmen sie auch zuerst bei den Bewegungen der Himmelskörper wahr. Indem wir diese nämlich als Punkte betrachten, stellen wir die Rechnung so an, als ob sie nur mit fortschreitender Bewegung durch die Himmelsräume geführt

würden und hierauf legen wir ihnen erst ausserdem eine drehende Bewegung bei; die erste pflegt man die periodische, die zweite die Bewegung der Axendrehung zu nennen. Wenn wir aber dem Körper nur eine fortschreitende Bewegung beilegen und keine drehende hinzufügen, fassen wir die Sache so auf, dass die geraden Linien, welche je zwei Punkte des Körpers verbinden, beständig einander parallel oder nach denselben Stellen des Himmels gerichtet bleiben. So oft aber diese Bedingung bei irgend einer Bewegung nicht stattfindet, muss man annehmen, dass jener Körper nicht bloss mit reiner fortschreitender Bewegung fortrücke, sondern dass ausserdem eine gewisse drehende Bewegung beigemischt sei; wie eine derartige Mischung erfolge, werden wir unten ausführlich auseinander setzen. Uebrigens ergibt sich hieraus sogleich, dass der Mond, weil er der Erde immer fast dieselbe Seite zuwendet, nicht mit reiner fortschreitender Bewegung fortrückt, sondern dass derselben eine gewisse drehende Bewegung beigemischt ist. Dasjenige, was in diesem Kapitel vorgetragen werden wird, ist von der reinen fortschreitenden Bewegung zu verstehen, wenn auch das Wort rein nicht hinzugefügt wird, denn wenn man ausserdem eine gewisse Drehung zugibt, geht die Bewegung in eine andere Art über.

Lehrsatz 1.

§. 270. Ein Körper, welchem einmal eine fortschreitende Bewegung beigebracht worden ist, wird in Folge der Trägheit mit dieser Bewegung stets gleichförmig und geradlinig fortschreiten, wenn er nicht durch äussere Ursachen gestört wird.

Beweis.

Man denke sich den Körper in die kleinsten Elemente zertheilt, alsdann werden dieselben, da sie einzeln gleiche Geschwindigkeiten nach parallelen Richtungen empfangen haben, während sie in ihrem Zustande zu verharren streben, ihre relative Lage unter sich nicht verändern. Sie können daher alle zugleich ihre Bewegung gleichförmig in gerader Linie fortsetzen, ohne irgend eine Gefahr der Durchdringung und es entspringt hieraus keine Kraft, welche den Zustand irgend eines Elements zu verändern strebt. Die einzelnen Elemente werden daher ihre Bewegung eben so fortsetzen, als ob sie wechselseitig von einander getrennt wären und durch kein gegenseitiges Band zusammenhingen. Wenn daher keine äussern Ursachen

hinzutreten, wird der Körper, welcher einmal eine fortschreitende Bewegung empfangen hat, mit dieser beständig gleichförmig in gerader Linie weiter zu gehen fortfahren.

Zusatz 1.

§. 271. So wie also ein endlicher Körper, wenn er einmal ruhet, zu ruhen fortfährt, behält er, wenn er einmal eine fortschreitende Bewegung empfangen hat, diese beständig bei. Es gilt demnach das Verharren in demselben Zustande auch für Körper von endlicher Grösse, wenn nur die Bewegung eine fortschreitende ist.

Zusatz 2.

§. 272. Weil durch die Fortsetzung dieses Zustandes der Theile der Zusammenhang des Körpers keine Kraft zu erleiden hat, ist auch zur Erhaltung seiner Gestalt keine Festigkeit erforderlich; in Bezug auf eine solche Bewegung können daher alle Körper als starre angesehen werden.

Zusatz 3.

§. 273. Die Trägheit ist daher die Ursache, wesshalb alle Körper, die flüssigen, deren Theilchen durch kein Band mit einander zusammenhängen, nicht einmal ausgenommen, in demselben Zustande der Ruhe oder der fortschreitenden Bewegung verharren.

Erläuterung.

§. 274. Die Wahrheit des Lehrsatzes stützt sich auf die Grundlage, dass die einzelnen Elemente ihre Bewegung frei verfolgen können und kein einziges die übrigen verhindert, in ihrem Zustande zu verharren. Der Grund hiervon wird noch deutlicher aufgefasst werden, wenn wir den Fall betrachten, in welchem dem Körper anfangs eine gewisse drehende Bewegung beigebracht worden ist, so dass die einen Elemente geschwinder, die andern langsamer sich zu bewegen begonnen haben. Wenn alsdann jedes einzelne Element seine Bewegung fortsetzte, würden sie bald von einander getrennt und zerstreut und so der Zusammenhang des Körpers aufgelöst werden. In diesem Falle würde also die Verbindung der Theilchen widerstehen, so dass die einzelnen Elemente die ihnen beigebrachte Bewegung nicht fortsetzen könnten. Da diess sich nicht ereignet, wenn den einzelnen Elementen gleiche Bewegungen längs paralleler Richtungen beigebracht worden sind, was nämlich die Bedingung der fortschreitenden Bewegung ist, so ist auch

keine Ursache vorhanden, durch welche der Zustand irgend eines Elements verändert werden sollte. Es kann kein Element in seiner Bewegung eine Veränderung erleiden, ohne dass zugleich der Zustand der übrigen gestört würde. Hieraus folgt nothwendig, dass ein Körper, welcher einmal eine derartige fortschreitende Bewegung angenommen hat, mit derselben beständig gleichförmig in gerader Linie fortschreiten muss. Hierbei ist besonders zu bemerken, dass bei einer solchen Bewegung der Zusammenhang der Theile keine Kraft auszuhalten hat, so dass dieselben, wenn sie auch jedes Bandes entbehrten, doch beständig dieselben gegenseitigen Abstände beibehalten würden. Da also hierdurch keine Kraft erzeugt wird, welche die Gestalt des Körpers zu verändern strebt, und welcher die Starrheit des letztern widerstehen müsste; so kann man, in Beziehung auf eine solche Bewegung, alle Körper als starre ansehen.

Lehrsatz 2.

§. 275. Wenn die einzelnen Elemente eines mit fortschreitender Bewegung fortrückenden Körpers durch ihren Massen proportionale Kräfte, nach einander parallelen Richtungen angetrieben werden, so wird ihre relative Lage sich nicht ändern und jedes der einzelnen Elemente seine Bewegung frei fortsetzen.

Beweis.

Da wir die Kräfte, welche die einzelnen Elemente antreiben, als ihren Massen proportional voraussetzen, so werden die in demselben Zeittheilchen hervorgebrachten Wirkungen einander gleich sein und da die Richtungen der Kräfte einander parallel sind, wird durch ihre Wirksamkeit die relative Lage der Theile nicht verändert und es werden die einzelnen Elemente, indem jedes seiner Kraft Folge leistet, sich eben so bewegen, als ob sie von einander getrennt wären. Alle Elemente werden sich nämlich in jedem Augenblick auf gleiche Weise bewegen, so dass die Bewegung des ganzen Körpers derjenigen gleich sein wird, womit jedes seiner Elemente, wenn es vereinzelt wäre, fortrücken würde; daher wird die Bewegung des Körpers eine fortschreitende sein.

Zusatz 1.

§. 276. In diesem Falle hat daher, wenn auch antreibende Kräfte da sind, der Zusammenhang der Theile keine Kraft auszuhalten. Wäre daher der Körper flüssig und hingen seine

Theile durch kein wechselseitiges Band zusammen, so würde er doch seine Gestalt beibehalten und für einen starren gehalten werden können.

Zusatz 2.

§. 277. Wie daher auch die antreibenden Kräfte in den einzelnen Zeitmomenten beschaffen sein mögen, so werden die einzelnen Elemente des Körpers sich auf geraden oder krummen Linien bewegen, und wenn die Bewegung eines einzigen von ihnen bestimmt ist, wird zugleich die Bewegung des ganzen Körpers bekannt.

Zusatz 3.

§. 278. Nach der Voraussetzung wird aber der Körper durch Kräfte angetrieben, welche derartig auf seine einzelnen Elemente wirken, dass sie ihren Massen proportional sind und einander parallele Richtungen haben. Ferner ist erforderlich, dass der Körper sich anfangs entweder in Ruhe befunden oder eine reine fortschreitende Bewegung empfangen habe, mit welcher seine einzelnen Elemente gleich geschwind und nach derselben Richtung fortzurücken angefangen haben.

Anmerkung.

§. 279. Wenn jemand daran zweifelte, ob es derartige Kräfte gebe, welche auf die einzelnen Elemente eines Körpers so wirken, dass sie den Massen derselben proportional werden und zugleich dieselbe Richtung haben; so kann man das Beispiel der Schwere anführen, welche nach unserer frühern Bemerkung auf die einzelnen Elemente der Körper im Verhältniss ihrer Massen wirkt. Man kann aber diese Eigenschaft nur bei Körpern von so geringer Ausdehnung zugeben, dass diese im Vergleich mit dem Abstande vom Mittelpunkte der Erde für nichts gehalten werden darf. Hat nämlich ein Körper eine bedeutende Ausdehnung, so werden seine, in grösserer oder geringerer Entfernung vom Mittelpunkte der Erde sich befindenden Elemente ungleiche Einwirkungen der Schwere erleiden; ferner werden auch die Richtungen der einzelnen Kräfte, welche nach dem Mittelpunkte der Erde hin convergiren, nicht mehr für parallel gehalten werden können. Es handelt sich hier aber keinesweges um die Frage, ob derartige Kräfte, wie wir sie im Lehrsatze angenommen haben, in der Welt existiren; es ist vollkommen genügend, wenn wir seine Wahrheit für solche, vielleicht erdichtete Kräfte erkannt haben. Das, was wir aber in Betreff dieser Kräfte bewiesen haben, wird auch für andere ihnen gleichgeltende Kräfte Gültigkeit

haben, und von hier müssen wir den Ausgang nehmen, wenn wir die Wirkungen beliebiger Kräfte auf starre Körper erforschen wollen. Was für Kräfte aber den hier angenommenen gleichgeltend sind, vorausgesetzt, dass der Körper ein starrer sei, wird in der Statik gelehrt, aus welcher die Aufsuchung einer einzigen, jenen gleichgeltenden Kraft zu entnehmen ist. Die Reduction aller dieser unendlich vielen Kräfte auf eine einzige hat aber nur insofern statt, als der Körper ein starrer ist und der Aenderung seiner Gestalt widersteht; wären nämlich alle seine Elemente gänzlich von einander getrennt, so dürfte man statt dieser Kräfte keine andern ihnen vollkommen gleichgeltenden substituiren. Es tritt daher jetzt das Verhältniss der Starrheit oder der Festigkeit, mit welcher die Theile des Körpers unter einander verbunden sind, in die Rechnung ein.

Aufgabe 1.

§. 280. Die einzelnen Elemente eines starren Körpers werden nach unter sich parallelen Richtungen durch Kräfte angetrieben, welche ihren Massen proportional sind; man soll eine einzige Kraft finden, welche ihnen allen zusammengenommen gleichgeltend ist.

Auflösung.

(Figur 28.) Man beziehe den starren Körper auf je drei Axen OA, OB und OC, welche auf einander normal stehen und es befinde sich in Z ein beliebiges Element desselben, dessen Masse wir $= dM$ setzen, wenn die Masse des ganzen Körpers $= M$ gesetzt wird. Zur Bestimmung der Lage des Punktes Z nehme man die drei Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ an. Es werden nun die einzelnen Elemente des Körpers durch Kräfte angetrieben, welche ihren Massen proportional und nach Richtungen, welche der Axe OC parallel sind, so dass das Element dM in Z, nach der Richtung Zv, durch eine Kraft $= \lambda . dM$ angetrieben werde. Da alle diese Kräfte einander parallel sind, wird auch die ihnen gleichgeltende Kraft dieselbe Richtung einhalten und gleich der Summe aller einzelnen, d. h. $= \lambda . M$ sein. Es bezeichne nun die OC parallele Linie GV diese jenen gleichgeltende Kraft $= \lambda . M$, deren Lage durch den Durchschnittspunkt G mit der Ebene AOB bekannt wird. Zieht man nun die Linie $GE \# OB$ und $GF \# OA$ und setzt man $OE = e$ und $OF = f$, so muss nach

den Lehren der Statik das Moment der Kraft GV, in Bezug auf jede Axe, den Momenten der einzelnen Kräfte, in Bezug auf dieselbe Axe, zusammengenommen gleich sein. Nun ist das Moment der Kraft $Zv = \lambda . dM$ in Bezug auf die Axe $OA = \lambda y dM$, die Summe aller Momente $= \lambda \int y dM$ und es muss diese dem Moment der Kraft GV, d. h. λMf gleich sein, wesshalb wir haben $f = OF = GE = \frac{\int y dM}{M}$.

Auf ähnliche Weise ist das Moment der Kraft Zv in Bezug auf die Axe $OB = \lambda x dM$, sein Integral $= \lambda \int x dM$, welches dem Moment der Kraft GV in Bezug auf dieselbe Axe, d. h. λMe gleich sein muss; wir haben daher

$$e = OE = FG = \frac{\int x dM}{M}.$$

Durch diese Formeln wird die wahre Lage der gleichgeltenden Kraft $GV = \lambda M$ bestimmt, deren Richtung parallel der Axe OC ist und welche von der Ebene AOC um $GE = \frac{\int y dM}{M}$, von der Ebene BOC um $GF = \frac{\int x dM}{M}$ absteht. Auf diese Weise erhält man Eine Kraft $GV = \lambda M$, welche allen elementaren Kräften Zv gleichgeltend ist, wenn nur der Körper, wie in der Statik angenommen wird, ein starrer ist.

Zusatz 1.

§. 281. Während daher die elementaren Kräfte Zv den kleinen Massen proportional und unter sich parallel sind, hat die allen gleichgeltende Kraft GV dieselbe Lage, jene Kräfte mögen nun grössere oder kleinere Werthe haben, denn der Buchstab λ befindet sich nicht in den Ausdrücken der Abstände GE und GF.

Zusatz 2.

§. 282. Da die Richtung der gleichgeltenden Kraft $GV = \lambda M$ der geraden Linie OC parallel ist, so würde ihre Lage vollkommen bestimmt sein, wenn man nur einen einzigen Punkt etwa I kennte, durch welchen sie geht. Aus den für GE und GF gefundenen Formeln geht übrigens hervor, dass die Richtung GV durch den Schwerpunkt des Körpers gehen wird.

Zusatz 3.

§. 283. Die Kraft $GV = \lambda M$ wird daher auf den ganzen

Körper, wenn er nur mit einer reinen fortschreitenden Bewegung fortrückt, eben so wirken, als jede beliebige elementare Kraft $Zv = \lambda dM$ auf das Element des Körpers $= dM$. Die Bewegung des ganzen Körpers wird daher eine fortschreitende bleiben, während die einzelnen Elemente mit einer gleichen Bewegung fortrücken.

Anmerkung.

§. 284. Sind die einzelnen elementaren Kräfte der Axe OC parallel, so ist die mittlere Richtung GV von der Ebene AOC um den Abstand $GE = \frac{\int ydM}{M}$ und von der Ebene BOC um $GF = \frac{\int xdM}{M}$ entfernt. Eben so wird, wenn die elementaren Kräfte ebenfalls den kleinen Massen der Elemente proportional und der Axe OB parallel sind, auch ihre mittlere Richtung derselben Axe parallel, von der Ebene BOC um einen Abstand $= \frac{\int xdM}{M}$ und von der Ebene AOB um einen Abstand $= \frac{\int zdM}{M}$ entfernt sein. Auf ähnliche Weise würde ferner, wenn die elementaren Kräfte der Axe OA parallel wären, auch ihre mittlere Richtung derselben parallel und von der Ebene AOB um den Abstand $= \frac{\int zdM}{M}$, wie auch von der Ebene AOC um einen Abstand $= \frac{\int ydM}{M}$ entfernt sein. Da nun diese mittlern Richtungen so wohl von der Ebene AOB, als auch von AOC und BOC gleich weit entfernt sind, so werden sie sich in einem gemeinschaftlichen Punkte schneiden und wenn I derselbe ist, wird derselbe so liegen, dass wir haben:

$$OE = \frac{\int xdM}{M}, \quad EG = \frac{\int ydM}{M} \quad \text{und} \quad GI = \frac{\int zdM}{M}.$$

Ist daher dieser Punkt I einmal gefunden, so wird, wenn die einzelnen Elemente des Körpers durch Kräfte, welche ihren Massen proportional sind, längs irgend einer gemeinschaftlichen Richtung angetrieben werden, die ihnen allen gleichgeltende Kraft durch eben diesen Punkt I gehen. Da ferner diese gleichgeltende Kraft der Summe aller elementaren Kräfte gleich ist und dieselbe Richtung einhält, so wird ihre Lage durch den

Punkt I vollkommen bestimmt. Derselbe stimmt mit demjenigen Punkte überein, welchen man gewöhnlich den Schwerpunkt nennt und der Grund dieser Uebereinstimmung ist offenbar, weil die einzelnen Elemente als ihren Massen proportional schwer und die Richtungen der Schwere als einander parallel angenommen werden. Da aber diese Voraussetzung der Wahrheit zuwider ist und der Punkt I keinesweges von der Schwere abhängt, sondern in allen Körpern stattfindet, so ist es angemessen, ihm einen andern Namen beizulegen.

Erklärung 3.

§. 285. Der **Mittelpunkt der Masse** oder **Mittelpunkt der Trägheit** ist derjenige Punkt in jedem Körper, um welchen seine Masse oder seine Trägheit nach jeder Richtung, der Gleichheit der Momente entsprechend, gleich vertheilt ist.

Erläuterung.

§. 286. Der Mittelpunkt der Masse oder der Trägheit ist derselbe, welchen man gewöhnlich den Schwerpunkt nennt, da aber jener allen Körpern so eigenthümlich ist, dass er ihnen bloss in Folge der Trägheit zukommt, die Schwere hingegen für eine ausserhalb des Körpers wirkende Kraft zu halten ist: so habe ich es vorgezogen, ihm den Namen „Mittelpunkt der Masse oder der Trägheit" beizulegen, damit man einsehe, dass er durch die Trägheit allein bestimmt wird. Was ich aber über die gleiche Vertheilung der Masse um diesen Mittelpunkt angeführt habe, wird weniger leicht erläutert. Die beste Erläuterung ist ohne Zweifel aus der Regel, nach welcher man diesen Mittelpunkt findet, zu entnehmen. Man beziehe nämlich den Körper auf je drei, auf einander normale, Axen OA, OB und OC, denen man die Coordinaten so wohl für jedes Element des Körpers, als auch für den gesuchten Mittelpunkt der Trägheit I parallel annimmt. Es sei die Masse des ganzen Körpers $= M$, ein beliebiges Element desselben, dessen Masse wir $= dM$ setzen, befinde sich in Z und man setze die Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$; alsdann wird der Mittelpunkt der Trägheit I so bestimmt, dass man hat

$$OE = \frac{\int x dM}{M},\; EG = \frac{\int y dM}{M} \text{ und } GI = \frac{\int z dM}{M},$$

indem man diese Integrale über den ganzen Körper ausdehnt.

Nehmen wir daher den Punkt O im Mittelpunkte der Träg-

heit I an, so werden die drei Integrale $\int x dM$, $\int y dM$ und $\int z dM$ verschwinden, wodurch wir folgende Eigenschaft des Mittelpunkts der Trägheit kennen lernen. Schneidet man einen Körper durch eine beliebige, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Ebene, so bringen die einzelnen Elemente des Körpers, multiplicirt in ihre Abstände von dieser Ebene, beiderseits dieselbe Summe hervor. Eben so ist das zu verstehen, was wir über die gleiche Vertheilung der Materie um den Mittelpunkt der Masse oder der Trägheit, nach der Gleichheit der Momente, gesagt haben.

Zusatz 1.

§. 287. Wenn daher die einzelnen Elemente des Körpers nach derselben Richtung durch Kräfte, welche ihren kleinen Massen proportional sind, angetrieben werden; so wird eine einzige Kraft, welche der Summe aller jener gleich, ihnen parallel im Mittelpunkte der Trägheit angebracht ist, allen gleichgeltend sein, wenn nämlich der Körper ein starrer ist.

Zusatz 2.

§. 288. Wenn umgekehrt im Mittelpunkte der Trägheit eines starren Körpers irgend eine Kraft angebracht ist, so kann man dieselbe betrachten, als ob sie über alle Elemente des Körpers, ihren Massen proportional, vertheilt wäre. Wegen der gleichen Geltung werden die Wirkungen, in Betreff der Störung der Bewegung, einander gleich sein.

Anmerkung.

§. 289. Wird demnach ein starrer Körper durch eine Kraft angetrieben, deren Richtung durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht, so wird demselben, wenn er sich in Ruhe befindet, eine fortschreitende Bewegung beigebracht, wenn er sich aber bereits fortschreitend bewegt, wird seine Geschwindigkeit oder Richtung oder beide zugleich verändert werden, jedoch so, dass die Bewegung eine fortschreitende bleibt. Diess ist so zu verstehen, dass beliebige gerade Linien, welche wir uns im Körper gezogen denken, während der Dauer der Bewegung beständig einander parallel bleiben, was das Kennzeichen einer fortschreitenden Bewegung ist. Wie daher eine derartige Bewegung eines starren Körpers angemessen bestimmt werden könne, wollen wir in der folgenden Aufgabe sehen. Man muss sich inzwischen davor hüten, dass man die hier bewiesene

gleiche Geltung der Kräfte nicht auf Körper ausdehne, welche keine starre sind, indem ihre Grundlage, welche auf dem Gleichgewichte eines Hebels beruht, zusammenstürzen würde, wenn der Hebel durch Kräfte gekrümmt werden könnte. Ich nehme daher hier so starre Körper an, dass sie durch die antreibenden Kräfte keine Aenderung ihrer Gestalt erleiden; hierauf werde ich ferner untersuchen, wie fest ihr Zusammenhang sein müsse, damit sie die Einwirkung der Kräfte ohne irgend eine Veränderung ihrer Gestalt auszuhalten vermögen.

Aufgabe 2.

§. 290. Ein starrer Körper, welcher sich im Anfange entweder in Ruhe befunden oder eine fortschreitende Bewegung empfangen hat, wird beständig durch Kräfte angetrieben, deren mittlere Richtung durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht; man soll seine Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Da die Kraft, welche den Körper antreibt, oder wenn deren mehrere vorhanden sind, ihre mittlere Richtung beständig durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht, so wird die Bewegung, wie sie sich auch immer so wohl in Bezug auf ihre Geschwindigkeit, als auch ihre Richtung ändern mag, doch stets eine fortschreitende bleiben. Um dieselbe daher kennen zu lernen, ist es hinreichend, die Bewegung eines einzigen beliebigen Punktes des Körpers zu bestimmen. Welche Lage nämlich der letztere anfangs in Bezug auf diesen Punkt auch eingehalten haben mag, so wird er dieselbe hernach beständig beibehalten, wenn nämlich der Körper, wie wir angenommen haben, sich anfangs in Ruhe befunden oder eine reine fortschreitende Bewegung empfangen hat. Es ist daher am angemessensten, die Bewegung seines Mittelpunkts der Trägheit zu erforschen, weil wir uns die antreibende Kraft gleichsam an diesem angebracht denken können. Es sei also die Masse des Körpers $= M$ und er werde nach Verlauf der Zeit t durch eine Kraft $= V$ angetrieben, oder wenn mehrere antreibende Kräfte da sind, sei V die ihnen allen gleichgeltende, welche eine durch den Mittelpunkt der Trägkeit gehende Richtung hat. Denken wir uns nun in diesem Mittelpunkte ein Element des Körpers, dessen kleine Masse $= iM$ sei, wo i einen unendlich kleinen Bruch bezeichnet, so haben wir dasselbe anzusehen, als ob es durch einen ähnlichen kleinen Theil iV der ganzen Kraft angetrieben würde.

Nach der oben aufgestellten Lehre der antreibenden Kräfte ist es aber einleuchtend, dass die Masse iM durch die Kraft iV eben so angetrieben werden wird, als die Masse M durch die Kraft V, weil nur das Verhältniss der Masse zur Kraft in die Rechnung eintritt. Wir können daher die Sache so auffassen, als ob die ganze Masse M des Körpers in seinem Mittelpunkte der Trägheit befindlich und hieran die ganze Kraft V angebracht wäre; hiernach wird die Auflösung dieser Aufgabe sich von den frühern, welche wir über die Bewegung eines Punktes gegeben haben, nicht unterscheiden. Um nämlich die Sache ganz allgemein aufzufassen, beziehen wir die Bewegung auf die drei, auf einander normale Axen OA, OB und OC (Figur 22) und es sei nach Verlauf der Zeit t der Mittelpunkt der Trägheit nach S gelangt, dessen Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YS = z$ sind. Hierauf zerlege man auf gleiche Weise die antreibende Kraft V nach diesen drei Richtungen, woraus die respective längs SP, SQ und SR wirkenden Kräfte P, Q und R entspringen werden. Nimmt man nun das Zeitelement dt als constant an, so wird die ganze Bewegung bestimmt durch die drei Formeln:

$$Mddx = 2gPdt^2, \quad Mddy = 2gQdt^2 \text{ und } Mddz = 2gRdt^2.$$

Wie diese in jedem Falle behandelt werden müssen, ist oben bereits auseinandergesetzt worden.

Zusatz 1.

§. 291. Im Fall, dass ein starrer Körper mit fortschreitender Bewegung fortrückt, also die mittlere Richtung der antreibenden Kräfte durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht, können wir uns seine ganze Masse als in diesem Mittelpunkte vereinigt und die gleichgeltende Kraft daran angebracht denken.

Zusatz 2.

§. 292. Ist für eine gegebene Zeit der Ort des Mittelpunktes der Trägheit gefunden, so wird auch die Lage des ganzen Körpers bekannt werden, indem diese in Bezug auf jenen Mittelpunkt stets dieselbe, wie im Anfange bleiben wird; es werden nämlich dieselben Theile des Körpers beständig nach denselben Weltgegenden gerichtet sein.

Zusatz 3.

§. 293. Ist ferner für eine beliebige Zeit die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit gefunden, so werden sich

zugleich alle Punkte des Körpers mit gleicher Geschwindigkeit bewegen und die Richtungen aller einander parallel sein; so dass man die Bewegung des ganzen Körpers aus der Bewegung seines Mittelpunktes der Trägkeit erkennen wird.

Anmerkung 1.

§. 294. Alles dasjenige, was wir über die freien Bewegungen von Punkten oder unendlich kleinen Körpern in den frühern Theilen gelehrt haben, gilt daher auch von der fortschreitenden Bewegung starrer Körper und während dasselbe an sich gar unfruchtbar erschien, wird es nun die häufigste Anwendung finden, da man es auf das ganze Geschlecht der fortschreitenden Bewegungen zu beziehen haben wird. So oft nämlich starre Körper mit fortschreitender Bewegung einhergehen, was geschieht, wenn die mittlere Richtung der antreibenden Kräfte durch ihren Mittelpunkt der Trägheit geht, mögen dieselben anfangs sich in Ruhe befunden haben oder durch eine fortschreitende Bewegung angetrieben worden sein; wird man ihre Bewegung nach der ausführlich dargestellten Theorie der Bewegung von Punkten bestimmen können. Es würde daher überflüssig sein, diese Behandlung weiter zu verfolgen. Hiernach haben wir aber sogleich ausgesprochen, dass, wenn die mittlere Richtung der die Himmelskörper antreibenden Kräfte durch ihren Mittelpunkt der Trägheit ginge, jene einmal mit einer reinen fortschreitenden Bewegung fortzurücken angefangen haben, dass sie dieselbe beständig beibehalten und niemals eine drehende Bewegung annehmen würden. Da man nun wahrnimmt, dass dieselben sich um ihre Axe drehen, so muss ihnen nothwendigerweise eine solche Bewegung von Anfang an beigebracht worden sein oder die mittlere Richtung nicht beständig durch ihren Mittelpunkt der Trägheit gehen und dass dieses beim Mond der Fall sei, vermuthen wir mit Recht.

Anmerkung 2.

§. 295. Damit aber, während die durch solche Kräfte angetriebenen Körper sich bewegen, sie in ihrer Figur keine Aenderung erleiden, muss ihr Zusammenhang hinreichend fest sein und es wird daher bestimmt werden müssen, eine wie grosse Kraft er auszuhalten hat. Zunächst haben wir schon bemerkt, dass, wenn an den einzelnen Elementen des Körpers ihren Massen proportionale Kräfte nach derselben Richtung angebracht wären, der Zusammenhang des Körpers durchaus gar keine Kraft auszuhalten

habe, sondern er seine Figur auch beibehalten würde, selbst wenn seine Theile ganz von einander gelöst wären. Dass diese Kräfte aber nach unserm jetzigen Beweise jenen gleichgeltend sind, ist nur in Bezug auf die Bewegung zu verstehen und in so weit als sie von jenen verschieden sind, werden sie auch die Figur zu verändern streben; damit diess nicht eintrete, muss der Zusammenhang hinreichend fest sein. Hieraus ersieht man, dass das Urtheil, wie gross die Festigkeit des Zusammenhanges sein müsse, darauf zurückgeführt wird, dass man die den Körper wirklich antreibenden Kräfte mit jenen elementaren Kräften, denen sie gleichgeltend sind, vergleiche, weil sie desto mehr zur Zerstörung des Zusammenhanges beitragen würden, je mehr sie von ihnen verschieden wären. Um daher diesen Gegenstand noch deutlicher entwickeln zu können, wird es angemessen sein, jene Kräfte, wenn sie auch in Bezug auf die Bewegung gleichvermögend sind, sorgfältig von einander zu unterscheiden, zu welchem Ende ich die folgende Erklärung vorausschicke.

Erklärung 4.

§. 296. **Elementare Kräfte** sind diejenigen, welche an den einzelnen Elementen des Körpers, jede für sich angebracht, in ihnen eben die Aenderung des Zustandes hervorbringen würden, welche sie bei der Bewegung des Körpers wirklich erleiden.

Erläuterung.

§. 297. Es ist angemessen, diese elementaren Kräfte sorgfältig von denjenigen zu unterscheiden, welche wirklich den Körper antreiben. Haben wir nämlich die Bewegung eines Körpers erkannt, welche durch antreibende Kräfte hervorgebracht worden ist, so muss man zu bestimmen suchen, wie sehr der Zustand eines jeden Elementes gestört werde. Hierauf betrachte man die einzelnen Elemente, als ob jedes für sich existirte und wird dann leicht nach dem Vorhergehenden die Kräfte bestimmen, welche in ihnen dieselbe Veränderung des Zustandes hervorbringen würden; diese Kräfte zusammengenommen sind diejenigen, welche ich in der Folge unter der Benennung elementarer Kräfte begreifen werde. Hieraus ergibt sich sogleich, dass diese elementaren Kräfte zusammengenommen denjenigen gleichgeltend sind, welche wirklich den Körper antreiben, weil beide in der Bewegung des Körpers dieselbe Veränderung hervorbringen. Wird nämlich

ein Element des Körpers, dessen Masse $= dM$ ist, bei einer entweder wirklichen oder nach einer gewissen Richtung zerlegten Bewegung, vermöge welcher es in dem Zeittheilchen dt den kleinen Weg dx beschreibt, so beschleunigt, dass für ein constant angenommenes dt sich das Increment von dx gleich ddx ergibt; so wird die nach derselben Richtung antreibende Kraft $= \frac{dM.ddx}{2gdt^2}$. Ist daher die Bewegung des Elements nach je zwei oder je drei Richtungen zerlegt worden, so schliesst man auf die elementare Kraft, welche seinen Zustand stört und es werden so die elementaren Kräfte für jede beliebige Veränderung der Bewegung bekannt.

Zusatz 1.

§. 298. Die elementaren Kräfte zusammengenommen sind daher den wirklich antreibenden Kräften gleichgeltend und ausserdem so beschaffen, dass der Zusammenhang des Körpers keine Einwirkung von ihnen erleidet; weil nämlich die einzelnen Elemente von ihnen eben so afficirt werden, als ob sie allein da wären.

Zusatz 2.

§. 299. Bei der fortschreitenden Bewegung sind daher die elementaren Kräfte diejenigen, welche in den einzelnen Elementen dieselbe Veränderung der Bewegung hervorbringen, die der ganze Körper von den antreibenden Kräften erleidet.

Aufgabe 3.

§. 300. Ein Körper, angetrieben durch beliebige Kräfte, deren mittlere Richtung durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht, bewegt sich frei mit fortschreitender Bewegung; man soll die Kräfte bestimmen, welche sein Zusammenhang auszuhalten hat, damit er nicht aufgelöst werde.

Auflösung.

(Figur 29.) Zu einer gegebenen Zeit werde der Körper durch die Kräfte EP und FQ angetrieben, denen die durch den Mittelpunkt der Trägheit I gehende Kraft $IV = V$ gleichgeltend ist. Diese wird daher, wenn die Masse des ganzen Körpers $= M$ ist, im ganzen Körper eben die Wirkung hervorbringen, welche in seinem beliebigen Elemente M, dessen Masse $= dM$ ist, eine Kraft $Mm = \frac{V.dM}{M}$ hervorbringen würde,

wobei die Richtung Mm jener IV parallel ist. Es wird daher Mm die elementare Kraft darstellen. Da man nun fragt, eine wie grosse Kraft die Verbindung des Körpers von den wirklich antreibenden Kräften EP und FQ auszuhalten habe, oder wie stark jene Verbindung sein müsse, damit die Figur des Körpers keine Aenderung erleide; so muss man, weil der Körper sich in Bewegung befindet, seinen Zustand der Ruhe oder des Gleichgewichts angeben, in welchem die Figur des Körpers einer gleichen Einwirkung der Kräfte unterworfen ist. Zu einem solchen Zustande werden wir aber gelangen, wenn wir dem Körper wenigstens im Geiste eine derartige Bewegung und derartige Kräfte beilegen, dass sein Zusammenhang gar keine Kraft auszuhalten habe, der Körper selbst aber zur Ruhe gebracht werde. Wass für eine Bewegung aber der Körper auch erhalten haben möge, so bringe man ihm eine dieser ersten gleiche und entgegengesetzte bei, damit er wenigstens in diesem Augenblick sich in Ruhe befinde; diese erdachte Bewegung übt aber keine Kraft auf den Zusammenhang des Körpers aus. Nun muss ferner die von den antreibenden Kräften herrührende Bewegung aufgehoben werden und zwar durch solche Kräfte, welche auf den Zusammenhang des Körpers nicht einwirken, was geschieht, wenn man sich an den einzelnen Elementen den elementaren gleiche und entgegengesetzte Kräfte angebracht denkt. Man muss sich nämlich vorstellen, dass an dem in M befindlichen Elemente dM die Kraft $Mv = \frac{V.dM}{M}$ und derartige Kräfte an allen einzelnen Elementen angebracht seien; alsdann wird auf diese Weise der Körper in den Zustand der Ruhe gebracht werden. Der Körper, angetrieben durch die Kräfte EP und FQ, denen die durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Kraft $IV = V$ gleichgeltend ist, wonach also der Körper mit einer beliebigen fortschreitenden Bewegung fortrückt, wird in Bezug auf den Zusammenhang seiner Theile eben so afficirt, als ob er ruhete und ausser den wirklich antreibenden Kräften EP und FQ an seinen einzelnen Elementen den elementaren gleiche und entgegengesetzte Kräfte angebracht wären. In diesem Zustande des Gleichgewichts wird es nicht schwer sein, zu beurtheilen, wie stark die Theile des Körpers an einander haften müssen, damit ihr Zusammenhang durch diese Kräfte nicht gestört werde.

Zusatz 1.

§. 301. Die Kräfte also, denen der Zusammenhang des Körpers widerstehen muss, sind 1. die den Körper wirklich antreibenden Kräfte und 2. die in entgegengesetzter Weise angebrachten elementaren Kräfte. Drückt man diese entgegengesetzte Anbringung durch das negative Zeichen aus, so ergeben die antreibenden Kräfte, nach Subtraction der elementaren, die auf den Zusammenhang der Theile wirkenden Kräfte.

Zusatz 2.

§. 302. Da hier von der Bewegung starrer Körper die Rede ist, so muss ihr Bau so fest sein, dass er den Kräften, welche auf den Zusammenhang der Theile einwirken, zu widerstehen vermöge. Hätte er keine hinreichende Festigkeit, so würde die Bewegung nicht hierher gehören.

Anmerkung 1.

§. 303. Die Regel, welche wir hier zur Bestimmung der, auf den Zusammenhang des Körpers einwirkenden, Kräfte gefunden haben, erstreckt sich sehr weit und hätte auch aus dem metaphysischen Princip, dass die Ursache immer der vollständigen Wirkung gleich ist, abgeleitet werden können, wenn man nur dieses Princip richtig verstände. Meistentheils pflegt man es nämlich zu unbestimmt aufzustellen, als dass man irgend etwas mit Sicherheit daraus schliessen könnte. Hier aber vertreten die wirklich antreibenden Kräfte die Stelle der Ursache, welche wir mit V bezeichnen, die Wirkung ist aber eine zweifache. Durch die eine wird die Bewegung des Körpers afficirt, statt ihrer müssen wir die elementaren Kräfte annehmen, welche unmittelbar die Veränderung der Bewegung hervorbringen und welche Kräfte wir mit T bezeichnen wollen. Die andere Wirkung besteht in dem Bestreben, den Bau des Körpers zu zerstören und an ihre Stelle müssen wir Kräfte setzen, welche auf den Zusammenhang wirken und welche wir mit S bezeichnen wollen. Da also die Ursache V die Wirkung $T + S$ hervorbringt, so müssen wir annehmen, dass $V = T + S$ sei, woraus man, ganz wie wir gefunden haben, schliesst, dass

$$S = V - T$$

ist. Bei dem so grossen Mangel an Klarheit in der Metaphysik zog ich es vor, den angeführten Beweis zur Beleuchtung des metaphysischen Grundsatzes anzuwenden.

Anmerkung 2.

§. 304. Für uns möge es hier hinreichend sein, die Kräfte angegeben zu haben, welche der Zusammenhang starrer Körper aushalten muss, wie nämlich ein Körper diesen Kräften widersteht, hängt von seinem Bau ab und von der Weise, nach welcher seine Theile unter sich zusammenhängen und gleichsam mittelst einer Art von Leim mit einander verbunden sind. Da dieses Verhältniss der Cohäsion in verschiedenen Arten von Körpern sehr von einander abweicht, so scheint dasselbe mehr zur Physik, als zur Mechanik zu gehören. Man muss indessen gestehen, dass dieser Gegenstand noch zu wenig behandelt worden ist und die Principien, worauf die Festigkeit der Körper sich stützt, uns meistentheils durchaus unbekannt sind; diese Lehre verdient aber allerdings mit allem Eifer erforscht zu werden. Zu unserm gegenwärtigen Vorhaben gehört diess aber durchaus nicht, indem wir hier nur annehmen, dass die Körper, deren Bewegung wir betrachten, mit einem hinreichenden Grade von Starrheit ausgestattet seien, damit sie durch die auf sie einwirkenden Kräfte keine Aenderung der Figur erleiden, wobei wir uns gar nicht darum bekümmern, wie der Bau und die Cohäsion der Körper beschaffen ist. Uebrigens ist es ziemlich wahrscheinlich, dass keine Verbindung der Theile so stark sei, um der wenn auch so geringen Einwirkung solcher Kräfte nicht ein wenig nachzugeben; so wie kein Zweifel stattfindet, dass auch die härtesten Körper beim wechselseitigen Zusammentreffen gewisse Eindrücke auf einander hervorbringen, wenn dieselben auch meistentheils unsern Sinnen entzogen werden. Wenn diese Meinung richtig sein sollte, so würde man durchaus nur solche Körper für starre zu halten haben, welche gar keinen Kräften, die ihren Zusammenhang zu stören streben, unterworfen sind; indem nämlich auch durch die geringsten Kräfte eine gewisse Veränderung der Figur hervorgebracht werden würde. Ob aber so starre Körper, wie ich sie hier annehme, in der Welt existiren oder nicht? diese Frage berührt unsere gegenwärtige Abhandlung nicht, da es in allen Wissenschaften gestattet ist, nicht vorhandene Gegenstände zu betrachten, damit hierauf der Uebergang zu vorhandenen sich um so leichter darstelle. Man darf nämlich in der Mechanik nur dann erst die Bewegung nicht starrer Körper untersuchen,

nachdem vorher die Bewegung starrer Körper aufgestellt worden ist. Inzwischen kann man nicht leugnen, dass Körper existiren, welche den Kräften so sehr widerstehen, dass die in ihrer Figur entstandene Aenderung durchaus unbemerkbar ist und diess reicht meistentheils hin, um solche Körper für vollkommen starr halten zu können.

Aufgabe 4.

§. 305. Ein ruhender starrer Körper wird durch eine Kraft, deren Richtung durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht, angetrieben; man soll den kleinen Weg bestimmen, über welchen er in einem sehr kleinen Zeittheilchen fortgetrieben wird und zugleich die Geschwindigkeit, welche er erlangt.

Auflösung.

(Figur 29.) Da die Zeit als sehr klein angenommen wird, so kann man die Kraft während derselben als constant und dieselbe Richtung beibehaltend betrachten. Es sei demnach die Masse des starren Körpers $= M$, die angebrachte Kraft, deren Richtung IV durch den Mittelpunkt der Trägheit I geht, $= V$. In dieser Richtung IV wird der Punkt I fortrücken und der ganze Körper eine ähnliche fortschreitende Bewegung annehmen. Gesetzt, er sei nach Verlauf der als sehr klein angesehenen Zeit t über den Weg $Ii = x$ fortgeführt und habe in i die Geschwindigkeit $= v$ erlangt; alsdann wird für $dt =$ constans

$$Mddx = 2gVdt^2 \text{ oder } \frac{ddx}{dt} = \frac{2gVdt}{M},$$

und hieraus, weil die Kraft V constant ist, $\frac{dx}{dt} = \frac{2gVt}{M}$. Da nun $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit v ausdrückt und diese, nach der Voraussetzung, für $t = 0$ verschwindet, so bedarf es nicht der Hinzufügung einer Constanten. Wir haben demnach nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit

$$v = \frac{2gVt}{M};$$

ferner da $dx = \frac{2gVtdt}{M}$ ist, den in der kleinen Zeit t zurückgelegten kleinen Weg

$$Ii = x = \frac{gVt^2}{M}.$$

Zusatz 1.

§. 306. Es ist demnach der kleine Weg Ii, welchen der Körper in der kurzen Zeit t zurücklegt, dem Quadrat der letztern, die erlangte Geschwindigkeit v aber der Zeit selbst proportional. Ferner haben wir

$$2x = vt,$$

oder es kann mit der erlangten Geschwindigkeit v in derselben Zeit t der doppelte Weg $2x$ durchlaufen werden.

Zusatz 2.

§. 307. Eben diess gilt auch für eine beliebig grosse Zeit t, wenn nur während derselben die Kraft V stets dieselbe Grösse und Richtung behält und der Körper sich anfangs in Ruhe befunden hat.

Anmerkung.

§. 308. Die Bewegung starrer Körper muss eben so, wie die unendlich kleiner Körper auf doppelte Weise behandelt werden, je nachdem sie eine freie oder in Folge äusserer Hindernisse gebundene ist. Dieses Kapitel hat es nur mit der freien Bewegung zu thun, indem wir annehmen, dass kein äusseres Hinderniss den Körper abhalte, den antreibenden Kräften Folge zu leisten; es umfasst aber doch nur einen sehr kleinen Theil derselben, da ein sich frei bewegender Körper ausser der hier betrachteten reinen fortschreitenden, auf vielfache Weise drehende Bewegungen annehmen kann. Von der Entwickelung einer derartigen complicirten Bewegung und wie dieselbe durch beliebige Kräfte gestört wird, sind wir noch sehr weit entfernt. Wir können auch diese Untersuchung nicht unternehmen, bevor wir nicht die drehenden Bewegungen um feste Axen betrachtet haben; von hier aus können wir erst zu den drehenden Bewegungen um bewegliche Axen und weiter zu den freien Bewegungen im allgemeinen übergehen. Indem wir daher gewissermaassen die Ordnung der Natur verlassen, wollen wir jetzt starre Körper betrachten, welche von aussen her so gebunden sind, dass sie nur eine bestimmte Art von Bewegung annehmen können, was der Fall ist, wenn zwei feste Punkte desselben durch irgend eine äussere Ursache festgehalten werden. Man sieht nämlich leicht ein, dass, wenn drei Punkte eines starren Körpers, welche nicht in gerader Linie liegen, fest oder unbeweglich bleiben, der ganze Körper

keine Bewegung wird annehmen können. Werden aber nur zwei Punkte festgehalten, so kann um sie, wie um eine Axe, eine drehende Bewegung erfolgen; wie aber diese Bewegung beschaffen und durch antreibende Kräfte afficirt werde, wollen wir nun erforschen. Hierbei wird es ausserdem angemessen sein zu bestimmen, so wohl eine wie grosse Kraft jene festen Punkte auszuhalten haben, als auch welche Einwirkung der Zusammenhang des Körpers zu erleiden hat.

Kapitel II.

Von der durch keine Kräfte gestörten drehenden Bewegung um eine feste Axe.

Erklärung 5.

§. 309. Eine drehende Bewegung heisst diejenige, bei welcher ein starrer Körper sich um eine fest mit ihm verbundene gerade Linie, die sogenannte Drehungsaxe bewegt.

Zusatz 1.

§. 310. Bei der drehenden Bewegung befindet sich die Drehungsaxe in Ruhe, oder es bleiben die einzelnen auf ihr befindlichen Punkte unbewegt, die übrigen Punkte des Körpers bewegen sich aber desto geschwinder, je weiter sie von der Drehungsaxe entfernt sind.

Zusatz 2.

§. 311. Weil die einzelnen Punkte des Körpers beständig dieselben Abstände von der Axe beibehalten, können sie sich nur auf Kreisbogen bewegen, deren Mittelpunkte auf der Drehungsaxe liegen. Die von jedem Punkte des Körpers normal auf die Axe gezogene gerade Linie wird nämlich der Radius des Kreises sein, auf dessen Peripherie jener Punkt sich bewegt.

Zusatz 3.

§. 312. Da alle Punkte des Körpers so wohl unter sich, als auch von der Axe stets dieselben Abstände beibehalten, müssen sie nothwendig in derselben Zeit durch ähnliche Bogen fortgehen; ihre Geschwindigkeiten werden daher zu derselben Zeit ihren Abständen von der Axe proportional sein.

Zusatz 4.

§. 313. Da die Drehungsaxe in Ruhe bleibt, so wird man, wenn ausserdem die Lage eines einzigen Punktes des Körpers bekannt ist, seine ganze Lage kennen; wenn wir ferner die Geschwindigkeit eines einzigen Punktes kennen, wird man die Geschwindigkeit aller Punkte angeben können.

Erläuterung.

§. 314. (Figur 30.) Bei der Drehung ist die Bewegung des Körpers so gebunden, dass zwei gewisse Punkte desselben unbewegt bleiben. Man denke sich nämlich in den zwei Punkten E und F des Körpers $ABCD$ zwei Stiele eingefügt und so fest gehalten, dass sich dieselben durchaus nicht bewegen können; alsdann wird der Körper sich, ohne dass diese Stiele im Wege stehen, noch auf doppelte Weise bewegen können, je nachdem nämlich in der Figur die Punkte A, B und C auf- oder abwärts getrieben werden. Diese Verschiedenheit pflegt man sehr bequem anzudeuten, indem man sagt, der Körper drehe sich in diesem oder im entgegengesetzten Sinne. Ausserdem kann die im beiderseitigen Sinne erfolgende Bewegung auf unendlich vielfache Weise, nach Verhältniss der Geschwindigkeit, verändert werden; ist die Geschwindigkeit aber bekannt, so kennt man noch nicht die Bewegung, wenn nicht zugleich angegeben wird, in welchem Sinne dieselbe erfolgt. Sobald aber die Punkte E und F in Ruhe erhalten werden, werden auch die einzelnen zwischen ihnen in gerader Linie liegenden Punkte ebenfalls ruhen und es wird daher die gerade Linie EF die Drehungsaxe sein. Wenn nun m ein beliebiges Theilchen des Körpers ist und von demselben auf die Axe EF die Normale mn gezogen wird, mit welcher als Radius wir uns in der auf EF normalen Ebene einen Kreis beschrieben denken; so kann sich dieses Theilchen m nicht anders, als auf der Peripherie dieses Kreises bewegen und es wird immer die Geschwindigkeit des Punktes m dem Abstande mn proportional sein.

Anmerkung.

§. 315. Ich gebrauche hier das Wort Sinn (sensus), indem ich die französische Bezeichnung nachahme, weil das Wort Gegend (plaga), dessen andere sich zu bedienen pflegen, den Unterschied nicht genügend anzugeben scheint. (Fig. 31.) Man denke sich nämlich die Drehungsaxe normal auf der Ebene des Papiers in O aufstehend, auf welche aus den Punkten des

Körpers A, B und C die Perpendikel AO, BO und CO gefällt sind; alsdann kann dem Körper eine zweifache Bewegung beigebracht werden, die eine, bei welcher die Punkte A, B und C längs der Bogen Aa, Bb und Cc, die andere, bei welcher sie längs $A\alpha$, $B\beta$ und $C\gamma$ fortgehen. Im erstern Falle kann man angemessener Weise nicht sagen, dass die Bewegung nach der Gegend Aa erfolge, weil diess nämlich hinsichtlich der Punkte B und C, deren Bewegung nach andern Gegenden gerichtet ist, nicht wahr sein würde. Gegend deutet nämlich eine gewisse feste Richtung an, welche bei einer kreisförmigen Bewegung nicht stattfindet. Wegen des Mangels eines passendern Wortes stellen wir also bei einer solchen Bewegung gleichsam zwei einander entgegengesetzte Sinne auf, so dass die kreisförmige Bewegung längs der Bogen Aa, Bb, Cc als in dem einen, die längs der Bogen $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ als im entgegengesetzten Sinne erfolgend angesehen werden muss.

Erklärung 6.

§. 316. Die Winkelgeschwindigkeit ist bei der drehenden Bewegung die Geschwindigkeit desjenigen Punktes, dessen Entfernung von der Drehungsaxe durch die Einheit ausgedrückt wird.

Zusatz 1.

§. 317. Aus der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes erkennt man daher die Winkelgeschwindigkeit, indem man dieselbe durch den Abstand jenes Punktes von der Drehungsaxe dividirt, weil bei einer drehenden Bewegung die Geschwindigkeiten den Abständen von der Axe proportional sind.

Zusatz 2.

§. 318. Wenn daher die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher von der Drehungsaxe den Abstand $= x$ hat, $= v$ ist, so wird die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{v}{x}$. Für einen andern Abstand y würde nämlich die Geschwindigkeit $= \frac{yv}{x}$ sein und nimmt man $y = 1$ an, so wird dieselbe $= \frac{v}{x}$, d. h. gleich der Winkelgeschwindigkeit.

Zusatz 3.

§. 319. Ist daher umgekehrt die Winkelgeschwindigkeit

bekannt und $=\alpha$, so wird die Geschwindigkeit, mit welcher die Drehung in einem beliebigen Abstande x erfolgt, $=\alpha x$. Die Winkelgeschwindigkeit, multiplicirt durch irgend einen Abstand von der Drehungsaxe, ergibt nämlich die wahre Geschwindigkeit für eben diesen Abstand.

Erläuterung.

§. 320. Da bei einer drehenden Bewegung die Punkte des Körpers, nach ihrer verschiedenen Entfernung von der Axe, mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortgeführt werden, so führen wir, um alle diese verschiedenen Geschwindigkeiten zugleich in der Rechnung umfassen zu können, statt ihrer die Winkelgeschwindigkeit ein, welche für alle Abstände dieselbe ist. Sie ergibt sich nämlich, wenn wir den in einem gewissen Zeittheilchen beschriebenen Winkel durch eben dieses Zeittheilchen dividiren, so dass dieselbe allen Abständen gemeinschaftlich sein wird. Ist nämlich im Abstande x von der Axe die Geschwindigkeit $= v$, so wird im Zeittheilchen dt der kleine Bogen vdt zurückgelegt werden und dividiren wir diesen durch den Radius x, so erhalten wir den inzwischen beschriebenen Winkel $=\frac{vdt}{x}$. Dividiren wir diesen aber wieder durch die Zeit dt, so erhalten wir die Winkelgeschwindigkeit $=\frac{v}{x}$. Es ist daher gleichgültig, auf welche Weise wir die Winkelgeschwindigkeit erklären wollen, mag sie die dem Abstande $=1$ zukommende Geschwindigkeit, oder die einem jeden Abstande zukommende Geschwindigkeit dividirt durch eben diesen Abstand, oder mag sie der Elementarwinkel dividirt durch das Zeittheilchen, in welchem er beschrieben wird, sein; alle drei Weisen stimmen nämlich unter sich überein. Die erste ist zwar der Natur der Sache am meisten entsprechend, da auf diese Weise die wahre Geschwindigkeit angegeben wird und wir den festen Abstand, welchem sie entspricht, aus einem ähnlichen Grunde durch die Einheit bezeichnen, als wir bei der Messung der Winkel den Radius des Kreises, auf welchen wir sie beziehen, durch die Einheit auszudrücken pflegen; damit nämlich Winkel und Bogen auf ein gemeinschaftliches Maass zurückgeführt werden.

Lehrsatz 3.

§. 321. Wenn ein starrer Körper angefangen hat, sich um

eine feste Axe zu bewegen, so wird er seine drehende Bewegung beständig mit derselben Geschwindigkeit fortsetzen, wenn er nicht durch äussere Kräfte gestört wird.

Beweis.

(Figur 30.) Es sei EF die Drehungsaxe, um welche ein starrer Körper sich zu bewegen angefangen hat und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit $= c$, welche nämlich dem Abstande $= 1$ von der Axe entspricht. Ein jedes Theilchen m, welches von der Axe um den Zwischenraum $mn = x$ entfernt ist, hat daher die Geschwindigkeit $= cx$ in demselben Sinne. Da nun der Körper mit der Axe gleichsam Einen starren Körper bildet, so muss man sich das Theilchen m so mit der Axe EF verbunden vorstellen, dass es stets denselben Abstand $mn = x$ von derselben beibehält. Betrachten wir nun dieses Theilchen allein, wie mittelst eines Fadens mn mit der Axe verbunden, so haben wir oben gesehen, dass dasselbe mit der empfangenen Bewegung sich gleichförmig auf der Peripherie eines Kreises drehen wird. Da dieses nun von allen für sich genommenen Elementen gilt, so muss man sehen, ob sie einzeln ihre Bewegung verfolgen können, ohne sich wechselseitig hinderlich zu sein. Es ist aber einleuchtend, dass, wenn sie auch einzeln von einander getrennt, aber mit der Axe mittelst Fäden verbunden wären, sie doch alle in ihrer Bewegung verharren könnten, so dass sie beständig dieselben gegenseitigen Abstände beibehielten und die Figur des Körpers unverändert bliebe. Es wird daher auch ihre wechselseitige Verbindung nicht verhindern, dass die einzelnen Elemente ihre Bewegung verfolgen; folglich wird der ganze Körper die ihm beigebrachte drehende Bewegung so fortsetzen, dass er sich gleichförmig um die Axe, stets mit derselben Winkelgeschwindigkeit umwälzen wird.

Zusatz 1.

§. 322. Setzen wir daher die Winkelgeschwindigkeit $= c$, so dass im Abstande $= x$ von der Axe die Geschwindigkeit $= cx$ wird, so haben wir, indem wir die letztere $= v$ setzen, $c = \frac{v}{x}$. Da nun x und v Linien sind, wird die Winkelgeschwindigkeit c durch eine absolute Zahl ausgedrückt.

Zusatz 2.

§. 323. Aus der Winkelgeschwindigkeit c schliesst man

auf die Zeit t, in welcher die Drehung durch einen gewissen Winkel φ folgt. Da nämlich die Bewegung gleichförmig ist, haben wir $c = \frac{\varphi}{t}$ und daher $t = \frac{\varphi}{c}$; es gibt also offenbar die Winkelgeschwindigkeit c den Winkel an, welcher in Einer Secunde zurückgelegt wird.

Zusatz 3.

§. 324. Bezeichnet daher $1 : \pi$ das Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie, so dass 2π die Peripherie des Kreises ist, dessen Radius $= 1$; so ist die Zeit Einer Umwälzung, nach welcher der Körper in seine frühere Lage zurückkehrt, $= \frac{2\pi}{c}$ Secunden.

Zusatz 4.

§. 325. Da wir festgesetzt haben, dass wir die Zeiten stets in Secunden ausdrücken wollen, so wird ein Körper, wenn die Winkelgeschwindigkeit $= c$ ist, bei drehender Bewegung in der Zeit t den Winkel ct zurücklegen.

Anmerkung.

§. 326. Wir haben daher für absolute Maasse eine bestimmte Bezeichnung der Winkelgeschwindigkeit, sie wird nämlich durch den Winkel ausgedrückt, welcher in einer Secunde beschrieben werden würde, wenn die drehende Bewegung gleichförmig wäre. Es stimmt diess mit der oben festgesetzten Weise, alles die Bewegung Betreffende auf absolute Maasse zurückzuführen, überein, deren Grundlage darin besteht, dass wir die Zeiten stets in Secunden ausdrücken. Alsdann bezeichnen wir aber jede Geschwindigkeit durch den Weg, welchen ein mit derselben fortgeführter Körper innerhalb Einer Secunde durchlaufen würde, wodurch wir eine sehr deutliche Idee der Geschwindigkeit erhalten. So wie also die Geschwindigkeit im allgemeinen der in Einer Secunde zurückgelegte Weg ist, ist die Winkelgeschwindigkeit der in Einer Secunde beschriebene Winkel, wenn nämlich die Bewegung gleichförmig ist. Ist die drehende Bewegung nicht gleichförmig, so dass in jedem Augenblick die Winkelgeschwindigkeit eine andere wird; so wird sie auf ähnliche Weise zu jeder Zeit durch den Winkel ausgedrückt, welchen der Körper, wenn er sich mit dieser drehenden Bewegung gleichförmig umwälzte, in Einer Secunde beschreiben würde. Aus diesem Lehrsatze erkennt man die

gleichförmige drehende Bewegung vollkommen, mit welcher jeder starre Körper, wenn er nicht durch äussere Kräfte angetrieben wird, nothwendig sich bewegt. Hieraus geht hervor, dass das Princip der gleichförmigen Bewegung, welches sich auf die Trägheit stützt, auch auf die drehende Bewegung starrer Körper ausgedehnt wird, wenn nur die Drehungsaxe fest ist. Es ist daher angemessen, zu erforschen, einer wie grossen Kraft es bedarf, um die Axe in ihrer festen Lage zu erhalten.

Aufgabe 5.

§. 327. *Ein starrer Körper dreht sich gleichförmig um eine feste Axe; man soll die Kräfte bestimmen, welche diese auszuhalten hat oder welche angebracht werden müssen, damit die Axe in ihrer Lage erhalten werde.*

Auflösung.

(Figur 30.) Man betrachte den Körper wieder als in seine Elemente zerlegt, welche einzeln mit der Drehungsaxe verbunden seien und da nun das beliebige Element m sich auf einem Kreise bewegt, dessen Radius sein Abstand mn von der Axe EF ist; so wird es, in Folge der oben (§. 213.) erklärten Centrifugalkraft, den Faden anspannen und mit einer eben so grossen Kraft die Axe in der Richtung nm antreiben. Um dieselbe durch Rechnung auszudrücken, sei dM die kleine Masse dieses Elementes, sein Abstand von der Axe EF oder $nm = x$ und die Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$, so dass γ der in den einzelnen Secunden beschriebene Winkel ist; alsdann ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Element m sich auf seinem Kreise bewegt, $= \gamma x$. Bezeichnet nun g die Höhe, aus welcher ein durch die Schwere angetriebener Körper in Einer Secunde herabsinkt, so ist (§. 213.) die Centrifugalkraft dieses Elementes

$$= \frac{\gamma^2 x^2 dM}{2gx} = \frac{\gamma^2}{2g}\, x dM,$$

wo dM das kleine Gewicht ist, welches das Element des Körpers in der, zu den absoluten Messungen ausgewählten, Gegend der Erde haben würde. In Folge der Bewegung dieses Elementes, während es sich in m befindet, hat die Axe die Kraft $\frac{\gamma^2}{2g}\, x dM$ auszuhalten, durch welche sie in der Richtung nm angetrieben wird. Da sie nun von den einzelnen Elementen ähnliche Kräfte auszuhalten hat, kann man hieraus auf die

ganze Kraft schliessen, welche der gesammte Körper auf die Axe ausübt.

Zusatz 1.

§. 328. Die aus den einzelnen Elementen entspringenden Kräfte stehen daher bei derselben Winkelbewegung im zusammengesetzten Verhältniss der Massen und der Abstände von der Axe; die der letztern näher liegenden Elemente bringen also eine geringere, die entferntern eine grössere Wirkung hervor.

Zusatz 2.

§. 329. Bei demselben Elemente aber steht ferner die Kraft, welche die Axe durch dasselbe erleidet, im doppelten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit; ist diese doppelt so gross, so wird jene viermal grösser werden.

Zusatz 3.

§. 330. Weil das Element m auf der Peripherie eines Kreises mit gleichmässiger Bewegung herumgeführt wird, bleibt die Kraft zwar immer von derselben Grösse und an demselben Punkte n der Axe angebracht, aber ihre Richtung ändert sich beständig, weil sie stets nach dem Elemente hin geht.

Anmerkung.

§. 331. Oben (§. 213.) haben wir nämlich gefunden, dass zur Bewegung eines kleinen Körpers von der Masse $= A$, mit der Geschwindigkeit $= v$ und auf der Peripherie eines Kreises vom Radius $= r$ eine, nach des letztern Mittelpunkt gerichtete Kraft $= \frac{Av^2}{2gr}$ erforderlich ist. Da nun in unserm Falle die Masse $A = dM$, die Geschwindigkeit $v = \gamma x$ und der Radius $r = x$ ist, so wird diese Kraft $= \frac{\gamma^2 x dM}{2g}$. Dieselbe spannt den Faden, welcher das Element an die Axe bindet und treibt desshalb diese in der Richtung nm an. Aehnliche Kräfte dieser Art wirken auf die einzelnen Punkte der Axe ein und will man die Kräfte kennen, welche der Punkt n auszuhalten hat, so denke man sich einen ebenen Schnitt durch den letztern, normal gegen die Axe EF. Alsdann werden alle in dieser Ebene liegenden Elemente ihre Kräfte auf den Punkt n ausüben und da sie alle an demselben Punkte angebracht sind, lassen sie sich nach den Lehren der Statik leicht auf eine einzige Kraft zurückführen. Diess wird der Fall sein, wenn der ganze

Körper gleichsam in eine, auf die Axe normale Ebene zusammengefügt ist und diesen wollen wir, ehe wir zu drei Dimensionen übergehen, entwickeln.

Aufgabe 6.

§. 332. Der Körper ist eine sehr dünne ebene Scheibe, welche auf der Drehungsaxe normal steht und sich mit gegebener Geschwindigkeit um diese dreht; man soll die Kraft bestimmen, welche die Axe auszuhalten hat.

Auflösung.

(Figur 32.) Es sei $AEaF$ diese sehr dünne Scheibe von beliebiger Form, ihre Masse $= M$ und man denke sich im Punkte O die auf ihr normal stehende Drehungsaxe, da nun die von den einzelnen Elementen der Scheibe nach O gezogenen geraden Linien zugleich ihre Abstände von der Drehungsaxe vorstellen, so werden sie alle ihre Kräfte auf den Punkt O ausüben. Man betrachte daher ein beliebiges Element der Scheibe als in M befindlich, seine Masse sei $= dM$, sein Abstand von der Drehungsaxe $OM = r$; alsdann wird, wenn man die Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$ setzt, die Kraft, welche den Punkt O in der Richtung OM antreibt, $= \frac{\gamma^2 r dM}{2g}$. Um diese aus den einzelnen Elementen entspringenden Kräfte leichter auf eine einzige zurückzuführen, denke man sich durch den Punkt O zwei auf einander normale Axen OA und OB in der Ebene der Scheibe und beziehe auf dieselben die Coordinaten $OP = x$ und $PM = y$ für den Punkt M. Vollendet man nun das Rechteck $OPMQ$, so wird jene Kraft OM in zwei längs der Axen wirkende zerlegt, und zwar wird die längs OA wirkende $= \frac{\gamma^2 x dM}{2g}$ und die längs OB wirkende $= \frac{\gamma^2 y dM}{2g}$. Aus der ganzen Scheibe entspringt daher die antreibende Kraft in der Richtung $OA = \frac{\gamma^2}{2g} \int x dM$ und in der Richtung $OB = \frac{\gamma^2}{2g} \int y dM$. Diese Integrale werden aber durch die Lage des Mittelpunktes der Trägheit auf dieser Scheibe bekannt, setzt man denselben in I und fällt man von hier auf die Axen die Perpendikel IK und IL, so wird $\int x dM = M.OK$ und $\int y dM = M.OL$. Da nun also die längs OA wirkende Kraft $=$

$\frac{\gamma^2}{2g} M.OK$ und die längs OB wirkende Kraft $= \frac{\gamma^2}{2g} M.OL$ ist, so wird diesen zwei Kräften eine einzige, in der Richtung OI antreibende, Kraft gleichgeltend sein, welche $= \frac{\gamma^2}{2g} M.OI$ ist. Diess ist die Kraft, welche die Drehungsaxe im Punkte O, in Folge der Bewegung der Scheibe, auszuhalten hat.

Zusatz 1.

§. 333. Die Richtung der Kraft, welche die Axe in Folge der Bewegung der Scheibe auszuhalten hat, geht daher vom Punkte O nach dem Mittelpunkte der Trägheit der Scheibe I hin und es ist die Kraft selbst dem Abstande dieses Mittelpunktes I von der Axe proportional.

Zusatz 2.

§. 334. Wäre die ganze Masse M der Scheibe in ihrem Mittelpunkte der Trägheit vereinigt und drehte sich dieselbe mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die Axe, so würde die letztere eine Kraft $= \frac{\gamma^2}{2g} M.OI$ in derselben Richtung OI aus zuhalten haben.

Zusatz 3.

§. 335. Die Axe hat daher von der Scheibe dieselbe Kraft auszuhalten, als ob die ganze Masse der Scheibe in ihrem Mittelpunkte der Trägheit vereinigt wäre und sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die Axe dreh'te. Diese neue Eigenschaft des Mittelpunktes der Trägheit ist sehr bemerkenswerth.

Zusatz 4.

§. 336. Ginge daher die Axe durch den Mittelpunkt der Trägheit der Scheibe und stände sie auf dieser senkrecht, so würde, weil alsdann $OI = 0$ wäre, die Axe in Folge der Bewegung der Scheibe gar keine Kraft verspüren und es würde daher auch keine Kraft erforderlich sein, um die Axe unbewegt festzuhalten.

Anmerkung.

§. 337. Geht die Axe nicht durch den Mittelpunkt der Trägheit, so muss dieselbe so fest innerhalb ihrer Angeln gehalten werden, dass sie der angegebenen Kraft zu widerstehen vermag und niemals aus ihrer Lage gebracht werden kann. Da aber eben die Richtung dieser Kraft im Kreise herumgetrieben

wird, muss die Axe nach jeder Richtung hin durch eine ausreichende Kraft in ihrer Lage festgehalten werden; ferner ist es einleuchtend, dass eine desto grössere Kraft zur Festhaltung der Axe erforderlich sein wird, je weiter der Mittelpunkt der Trägheit von ihr entfernt ist. Ausserdem ist aber diese Kraft der Masse der Scheibe und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit proportional. Uebrigens führt uns dieser Fall, in welchem wir den Körper wie eine unendlich dünne Scheibe betrachtet haben, zu beliebigen Körpern, weil man, indem man einen Körper durch auf die Axe normale Schnitte in unendlich viele Scheiben zertheilt, hieraus leicht auf die Kräfte schliesst, welche die Axe in ihren einzelnen Punkten antreiben. Die ganze Arbeit wird nämlich darauf zurückgeführt, den Mittelpunkt der Trägheit einer jeden Scheibe zu finden; wir wollen aber auf eine andere Weise diese Bestimmung versuchen.

Aufgabe 7.

§. 338. (Figur 33.) Ein starrer Körper dreht sich gleichförmig um die Axe OA, man soll die Kräfte, welche die letztere auszuhalten hat, in eine Summe vereinigen oder auf zwei Kräfte zurückführen, durch welche die Axe angetrieben wird.

Auflösung.

Mit der Drehungsaxe OA conjugire man in O die zwei normalen Axen OB und OC, welchen man für das Element des Körpers in Z, dessen Masse $= dM$ ist, wenn M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet, die drei Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ parallel ziehe. Setzt man nun die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper sich um die Axe OA dreht, $= \gamma$ und den Abstand des Elementes von der Axe oder $XZ = r$; so wird in Folge der Bewegung dieses Elementes die Axe im Punkte X in der Richtung XZ angetrieben durch eine Kraft $= \frac{\gamma^2 r dM}{2g}$. Zieht man nun $XV \# YZ \# OC$, so zerlege man diese Kraft nach den Richtungen XY und XV, und es werden die nach diesen beiden Richtungen wirkenden Kräfte respective $= \frac{\gamma^2 y dM}{2g}$ und $= \frac{\gamma^2 z dM}{2g}$; es hat daher die Axe von den einzelnen Elementen Kräfte auszuhalten, deren Richtungen OB und OC parallel sind. Man kann demnach alle, welche nach beiden Richtungen wirksam sind, für sich in eine Summe vereinigen. Es stelle also Ee die Kraft vor,

welche allen Kräften XY und Ff die Kraft, welche allen Kräften XV gleichgeltend ist; alsdann ist zuerst jede von beiden der Summe aller Kräfte, denen sie gleichgeltend ist, gleich. Es wird daher

$$\text{die Kraft } Ee = \frac{\gamma^2}{2g}\int y\,dM \text{ und die Kraft } Ff = \frac{\gamma^2}{2g}\int z\,dM.$$

Zweitens müssen die Momente dieser Kräfte in Bezug auf den Punkt O gleich sein der Summe aller elementaren Momente zusammengenommen, wodurch wir erhalten:

$$\frac{\gamma^2}{2g}.OE.\int y\,dM = \frac{\gamma^2}{2g}\int xy\,dM \text{ oder } OE = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM}$$

$$\text{und} \quad \frac{\gamma^2}{2g}.OF\int z\,dM = \frac{\gamma^2}{2g}\int xz\,dM \text{ oder } OF = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}.$$

Auf diese Weise sind alle Kräfte, welche die Axe auszuhalten hat, auf zwei Ee und Ff zurückgeführt, deren Grösse, Richtung und Angriffspunkt man kennt.

Zusatz 1.

§. 339. Befindet sich der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers in I und entsprechen demselben die Coordinaten OG, GK und KI, so wird, wie wir oben gesehen haben,

$$OG = \frac{\int x\,dM}{M}, \quad GK = \frac{\int y\,dM}{M} \text{ und } KI = \frac{\int z\,dM}{M}.$$

Wir haben daher für die vorhergehenden Formeln

$$\int y\,dM = M.GK \text{ nnd } \int z\,dM = M.KI.$$

Zusatz 2.

§. 340. Befände sich die ganze Masse des Körpers M im Mittelpunkte der Trägheit I, so würde er sich mit gleicher Geschwindigkeit herumdrehen und es würde die Axe im Punkte G, nach der Richtung GI, eine Kraft $= \frac{\gamma^2}{2g} M.GI$ auszuhalten haben. Hieraus entspringen die zwei Kräfte

$$\text{längs } GK = \frac{\gamma^2}{2g}\int y\,dM \text{ und längs } GL = \frac{\gamma^2}{2g}\int z\,dM,$$

welchen jene längs Ee und Ff wirkenden Kräfte gleich sind.

Zusatz 3.

§. 341. Nimmt man die Ebene AOB, welche unserer Willkühr überlassen ist, als durch den Mittelpunkt der Trägheit I des Körpers gelegt an, dass also $KI = 0$ und $\int z\,dM = 0$ wird; so ergibt sich zwar

die Kraft $Ff = 0$ und der Abstand $OF = \infty$,
jedoch so, dass ihr Moment endlich, nämlich

$$Ff.OF = \frac{\gamma^2}{2g} \int xz dM$$

wird.

Anmerkung.

§. 342. Diese zwei Kräfte Ee und Ff kann man nur dann weiter auf eine einzige zurückführen, wenn der Zwischenraum EF verschwindet; denn zwei in verschiedenen Punkten einer geraden Linie angebrachte Kräfte lassen sich nur dann auf eine einzige reduciren, wenn ihre Richtungen in derselben Ebene liegen. Man kann aber diese zwei Kräfte Ee und Ff auf unzählige Weise auf zwei andere reduciren, wie es der Fall ist, wenn wir die Lage der Axen OB und OC verändern. So haben wir gesehen, dass in dem Falle, wo die Ebene AOB durch den Mittelpunkt der Trägheit gelegt wird, die Kraft Ff verschwindet und der Abstand $OF = \infty$ wird. Hat man aber je zwei derartige Kräfte Ee und Ff, welche die Axe auszuhalten hat, gefunden, so muss diese, damit sie nicht aus ihrer Lage gebracht werde, nothwendig durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte festgehalten werden. Ist nämlich die Axe in E und F an festen Ringen, innerhalb deren sie sich frei drehen kann, aufgehängt, so wird der Ring in E eine Kraft Ee und der Ring in F eine Kraft Ff auszuhalten haben, woraus man auf die Festigkeit dieser Ringe schliessen kann. Soll aber die Axe in zwei gegebenen beliebigen Punkten unterstützt werden, so wird man die in jenen Punkten anzubringenden Kräfte angeben können, damit die Axe unbewegt erhalten werde; diese Bestimmung wollen wir in der folgenden Aufgabe unternehmen.

Aufgabe 8.

§. 343. (Figur 33.) Die Axe, um welche ein starrer Körper sich mit gleichförmiger Bewegung dreht, wird in zwei gegebenen Punkten O und A festgehalten; man soll die Kräfte bestimmen, welche die Axe in diesen zwei Punkten auszuhalten hat.

Auflösung.

Es bleibt alles, was wir in der vorhergehenden Aufgabe vorausgesetzt haben, unverändert und es sind alle die Axe antreibenden Kräfte auf die zwei Ee und Ff zurückgeführt, jene parallel der Axe OB, diese parallel der Axe OC, so dass wir haben

die Kraft $Ee = \frac{\gamma^2}{2g} \int y dM$ und die Kraft $Ff = \frac{\gamma^2}{2g} \int z dM$,

ferner $$OE = \frac{\int xy dM}{\int y dM} \text{ und } OF = \frac{\int xz dM}{\int z dM}.$$

Man soll nun die Kräfte suchen, welche in den Punkten O und A angebracht diesen gleichgeltend sind. Es sei demnach der Abstand $OA = a$ und man habe in O und A die Kräfte Ob und $A\beta$ angebracht, welche der Kraft Ee gleichgeltend sind. Diess geschieht, wenn $Ob + A\beta = Ee$ und $Ob . OE = A\beta . AE$ ist; hieraus entspringt

$$Ob = \frac{AE.Ee}{a} = Ee - \frac{OE.Ee}{a} \text{ und } A\beta = \frac{OE.Ee}{a}.$$

Auf ähnliche Weise bringe man in O und A die Kräfte Oc und $A\gamma$ an, welche der Kraft Ff gleichgeltend sind, und es wird alsdann

$$Oc = \frac{AF.Ff}{a} = Ff - \frac{OF.Ff}{a} \text{ und } A\gamma = \frac{OF.Ff}{a}.$$

Wir haben daher in beiden Punkten O und A je zwei Kräfte, welche die Axe dort auszuhalten hat, nämlich im Punkte O die Kräfte

$$Ob = \frac{\gamma^2}{2g} \left[\int y dM - \frac{1}{a} \int xy dM\right] \text{ und } Oc = \frac{\gamma^2}{2g} \left[\int z dM - \frac{1}{a} \int xz dM\right],$$

ferner im Punkte A die Kräfte

$$A\beta = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot \frac{1}{a} \int xy dM \text{ und } A\gamma = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot \frac{1}{a} \int xz dM.$$

Führen wir aber die Linien, welche sich auf das in Z gelegene Element dM beziehen, ein, so werden die Kräfte

$$Ob = \frac{\gamma^2}{2ag} \int AX.XY dM, \quad Oc = \frac{\gamma^2}{2ag} \int AX.YZ dM,$$

$$A\beta = \frac{\gamma^2}{2ag} \int OX.XY dM \text{ und } A\gamma = \frac{\gamma^2}{2ag} \int OX.YZ dM.$$

Setzen wir nun $OG = b$, $AG = c$, so dass $a = b + c$ wird, ferner $GX = u$, so dass $AX = c - u$ und $OX = b + u$ wird; so erhalten wir die Kräfte

$$Ob = \frac{\gamma^2}{2ag} \left[c \int y dM - \int uy dM\right], \quad Oc = \frac{\gamma^2}{2ag} \left[c \int z dM - \int uz dM\right],$$

$$A\beta = \frac{\gamma^2}{2ag} \left[b \int y dM + \int uy dM\right] \text{ und } A\gamma = \frac{\gamma^2}{2ag} \left[b \int z dM + \int uz dM\right].$$

Nehmen wir die Ebene AOB so an, dass sie durch den Mittelpunkt der Trägheit I geht, so wird $\int z dM = 0$ und setzen wir ferner die Integrale

$$\int ydM = D, \; \int uydM = E \text{ und } \int uzdM = F;$$

so werden die Kräfte

$$Ob = \frac{\gamma^2}{2ag}[Dc - E], \; Oc = -\frac{\gamma^2}{2ag}\cdot F,$$

$$A\beta = \frac{\gamma^2}{2ag}[Db + E] \text{ und } A\gamma = \frac{\gamma^2}{2ag}\cdot F.$$

Nun lassen sich leicht sowohl in O die zwei Kräfte Ob und Oc, als auch in A die zwei $A\beta$ und $A\gamma$ auf Eine reduciren, so dass in beiden Endpunkten O und A die dort gegen die Axe drückende Kraft bekannt wird.

Zusatz 1.

§. 344. Setzt man daher voraus, dass die Ebene AOB durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers oder I gehe, so werden die Kräfte Oc und $A\gamma$ einander gleich und entgegengesetzt, so dass die eine den negativen Werth der andern hat; oder es wird $Oc + A\gamma = 0$,
weil $KI = 0$ und daher auch die Kraft $GL = 0$ ist.

Zusatz 2.

§. 345. Geht die Drehungsaxe OA durch den Mittelpunkt der Trägheit I, so wird auch $\int ydM = D = 0$ und wir erhalten daher die Kräfte, welche die Axe in den Punkten O und A auszuhalten hat, nämlich

die Kraft $Ob = -\frac{\gamma^2}{2ag}\cdot E$, die Kraft $Oc = -\frac{\gamma^2}{2ag}\cdot F$,

$$A\beta = \frac{\gamma^2}{2ag}\cdot E, \text{ uud } \qquad A\gamma = \frac{\gamma^2}{2ag}\cdot F.$$

Zusatz 3.

§. 346. Damit die Axe gar keine Kräfte auszuhalten habe und der Körper sich frei um sie drehen könne, müssen nothwendig die vier Integrale zugleich verschwinden, es muss also

$$\int ydM = 0, \; \int zdM = 0, \; \int xydM = 0 \text{ und } \int xzdM = 0$$

sein. Den zwei ersten geschieht Genüge, wenn die Drehungsaxe durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers geht.

Anmerkung.

§. 347. Hier haben wir die zwei Punkte O und A, an welchen die Axe gewissermaassen aufgehängt ist, nach Belieben angenommen; es ist ferner im Allgemeinen klar, dass die Kräfte, welche zur Festhaltung der Axe in diesen Punkten erforderlich sind, desto kleiner sein werden, je grösser man den

Abstand OA annimmt. Hierüber darf man sich nicht wundern, da diese Wirkung von den Momenten der Kräfte abhängt. Treffen aber die Punkte O und A zusammen, so dass

$$OA = a = 0$$

wird, so werden jene Kräfte selbst unendlich gross, woraus man ersieht, dass die Axe in einem einzigen Punkte keinesweges hinreichend festgehalten werden kann, um unbeweglich zu bleiben. Es sind daher hierzu zum wenigsten zwei, an verschiedenen Punkten der Axe anzubringende, Kräfte erforderlich, wenn nicht etwa die zwei ursprünglichen Kräfte Ee und Ff bereits in demselben Punkte angebracht sind. Diess kann aber, nach der vorhergehenden Aufgabe, nur geschehen, wenn

$$\int xydM : \int xzdM = \int ydM : \int zdM.$$

Nimmt man daher die Ebene AOB so an, dass sie durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers I geht, also $\int zdM = 0$ wird; so tritt jenes ein, wenn man

$$\int xzdM = 0$$

hat. Dies folgt auch aus der vorliegenden Aufgabe, weil alsdann die Kräfte Oc und $A\gamma$ verschwinden und allein die Kräfte Ob und $A\beta$ übrig bleiben, denen die einzige Kraft Ee gleichgeltend ist; so dass alsdann die Axe in dem einzigen Punkte E unterstützt werden kann, nämlich durch die Ee gleiche und entgegengesetzte Kraft. Es wird demnach hinreichend sein, die Axe in dem einzigen Punkte E zu unterstützen, wenn die Ebene AOB durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gelegt und $\int xzdM = 0$ ist, in welchem Falle

die Kraft $Ee = \frac{\gamma^2}{2g}\int ydM$ und der Abstand $OE = \frac{\int xydM}{\int ydM}$

wird. In allen übrigen Fällen muss die Axe in zwei Punkten festgehalten werden und wie man diese auch immer annehmen mag, müssen die zur Festhaltung der Axe erforderlichen Kräfte den hier bestimmten gleich und entgegengesetzt sein.

Nachdem wir diese angegeben, bleibt noch übrig, die Kräfte zu bestimmen, welche der Zusammenhang des Körpers in Folge der drehenden Bewegung auszuhalten hat.

Aufgabe 9.

§. 348. Wenn ein starrer Körper sich gleichförmig um eine feste Axe dreht, soll man die Kräfte bestimmen, welche sein Zusammenhang oder die wechselseitige Verbindung seiner Theile auszuhalten hat.

Auflösung.

(Figur 33.) Es drehe sich der Körper um die Axe OA mit der Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$, so dass er in den einzelnen Secunden einen Winkel γ zurücklegt; alsdann haben wir gesehen, dass das in Z befindliche Körpertheilchen, dessen kleine Masse $= dM$ und Abstand von der Axe OA, d. h. $XZ = r$ ist, die Centrifugalkraft $= \frac{\gamma^2 r dM}{2g}$ haben wird, in Folge welcher dieses Theilchen sich in der Richtung Zz von der Axe zu entfernen strebt. Auf ähnliche Weise werden die Elemente des Körpers das Bestreben haben, von der Axe zurückzuweichen und damit diess nicht geschehe, muss der Zusammenhang des Körpers hinreichende Festigkeit haben. Um diess leichter einzusehen, betrachten wir den Körper als ruhend und suchen die Kräfte, welche an ihm angebracht werden müssen, um auf seinen Zusammenhang eben so einzuwirken, als diess jetzt, wo der Körper in Bewegung ist, geschieht. Wir haben uns daher an den einzelnen, in Z befindlichen Elementen dM Kräfte $Zz = \frac{\gamma^2 r dM}{2g}$ angebracht zu denken, welche dieselben von der Axe OA abziehen. Damit aber nicht der ganze Körper durch diese Kräfte zur Bewegung angetrieben werde, denken wir uns ausserdem in den Punkten E und F Kräfte angebracht, welche den Kräften Ee und Ff gleich und entgegengesetzt sind und erhalten so alle Kräfte, welche der als ruhend angesehene Körper auszuhalten hat und dessen Theile so fest zusammenhängen müssen, dass diese Kräfte keine Aenderung der Figur hervorbringen. Alsdann wird aber der, durch alle diese Kräfte angetriebene, Körper im Gleichgewicht erhalten werden.

Zusatz 1.

§. 349. Ist Z irgend ein äusserster Punkt des Körpers, so muss das Theilchen dM so fest mit dem übrigen Körper verbunden sein, dass es nicht durch die Kraft $Zz = \frac{\gamma^2 r dM}{2g}$ davon getrennt werden könne. Da die Richtung der letztern von der Axe abgewandt ist, ist es nicht nöthig, dass das Theilchen an den Seiten befestigt sei.

Zusatz 2.

§. 350. Näher an der Axe muss die Verbindung stärker

sein, weil alle weiter entfernten Theilchen ihre Kräfte, von der Axe zurückzuweichen, vereinigen; nothwendig muss daher auf der Axe selbst der stärkste Zusammenhang wirksam sein.

Anmerkung.

§. 351. In Betreff der Axe habe ich hier angenommen, dass dieselbe in den Punkten E und F gehalten werde; sollte sie aber in je zwei andern beliebigen Punkten O und A festgehalten werden, so muss man sich in ihnen Kräfte angebracht denken, welche den oben angegebenen gleich und entgegengesetzt sind und im Verein mit den elementaren Kräften Zz ebenfalls den Körper im Gleichgewicht erhalten werden. Der Zusammenhang muss daher so stark sein, dass, wenn die erwähnten Kräfte am ruhenden Körper angebracht wären, seine Figur durch ihre Wirksamkeit keine Aenderung erleiden würde. Es erhellt aber zugleich hieraus, dass alle diese Kräfte im doppelten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit stehen, also eine doppelt so geschwinde Bewegung einen viermal so festen Zusammenhang erfordert. Es ist nicht angemessen, diese Beurtheilung, welche von dem innern Bau der Körper und der Natur ihrer Theile abhängig ist, hier weiter zu verfolgen, sie verdient vielmehr als eine besondere Lehre aufgestellt zu werden.

Da wir nun in diesem Kapitel alles, was die durch keine äussere Kräfte gestörte drehende Bewegung betrifft, genügend auseinandergesetzt haben, so wollen wir erforschen, was ausserdem die Kräfte bewirken; und zwar wollen wir zuerst einen starren Körper, welcher um eine feste Axe beweglich ist, im Zustande der Ruhe betrachten und die elementare Bewegung erforschen, welche ihm durch gegebene Kräfte in einer nur unendlich kleinen Zeit beigebracht werden wird. Diese an sich wenig nützliche Abhandlung wird angeben, wieviel die Axe durch die antreibenden Kräfte erleidet, in der Folge aber wird sie, wenn von der freien Bewegung starrer Körper die Rede ist, den grössten Nutzen bringen.

Kapitel III.

Von der Erzeugung der drehenden Bewegung.

Aufgabe 10.

§. 352. Ein starrer, um eine feste Axe beweglicher Körper befindet sich in Ruhe; man soll die elementaren Kräfte bestimmen, durch welche er während eines sehr kleinen Zeittheilchens um einen gegebenen Winkel fortbewegt wird.

Auflösung.

(Figur 34.) Es sei $ABCD$ ein beliebiger, auf die Drehungsaxe normaler Durchschnitt des Körpers, worauf man sich also die Axe in O perpendiculär stehend zu denken hat. Um dieselbe soll der Körper sich im Zeittheilchen dt durch den Winkel αdt^2 bewegen, indem wir wissen, dass die im unendlich kleinen Zeittheilchen dt erzeugten kleinen Wege dem Quadrate dieses Zeittheilchens proportional sind. Betrachten wir daher ein beliebiges Element in M, dessen Masse $= dM$ und Abstand von der Axe $OM = r$ ist, so wird dasselbe durch den kleinen Bogen $Mm = \alpha r dt^2$ fortgeführt werden müssen. Damit diese Wirkung hervorgebracht werde, wird das Element nothwendig in der Richtung Mm durch eine gewisse $= p$ gesetzte Kraft angetrieben werden. Die kleine Masse dM wird aber, angetrieben durch eine Kraft $= p$, im Zeittheilchen dt über den kleinen Weg $= \frac{gpdt^2}{dM}$ (§. 305.) fortgeführt und dieser muss jenem $\alpha r dt^2$ gleichgesetzt werden, wodurch wir die Kraft

$$p = \frac{\alpha r dM}{g}$$

erhalten. Dieses Element wird alsdann die Geschwindigkeit $= \frac{2gpdt}{dM} = 2\alpha r dt$ erlangen und es wird daher die erlangte Winkelgeschwindigkeit $= 2\alpha dt$.

Zusatz 1.

§. 353. Setzen wir den im Zeittheilchen dt erzeugten Winkel $= d\omega$, so wird, weil $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$, die erzeugte Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2d\omega}{dt}$. Hierbei hat man zu bemerken, dass der Winkel $d\omega$ ein Differential zweiten Grades oder mit dem Quadrat des Zeittheilchens dt gleichartig ist.

Zusatz 2.

§. 354. Damit in dem Zeittheilchen dt der Winkel $d\omega$ erzeugt werde, muss das in M gelegene Element dM in der Richtung der Bewegung Mm durch eine Kraft $= \frac{r.d\omega}{gdt^2} \cdot dM$ angetrieben werden. Die Kräfte, welche die einzelnen Elemente antreiben, stehen daher im zusammengesetzten Verhältniss der Massen und der Abstände von der Drehungsaxe.

Zusatz 3.

§. 355. Betrachtet man ein anderes Element in N, dessen Masse $= dN$ ist, so muss dasselbe in der Richtung Nn, welche in der auf die Drehungsaxe normalen Ebene normal auf den Abstand ON gezogen ist, angetrieben werden. Die Kräfte, welche diese Elemente in M und N antreiben, verhalten sich zu einander, wie $OM.dM : ON.dN$.

Zusatz 4.

§. 356. Werden umgekehrt die einzelnen Elemente dM, in der Richtung der einzuflössenden Bewegung, durch Kräfte $= \frac{rd\omega}{gdt^2} dM$ angetrieben, so wird der ganze Körper um die Drehungsaxe, während des Zeittheilchens dt, um einen Winkel $= d\omega$ fortbewegt und die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2d\omega}{dt}$ erlangen.

Zusatz 5.

§. 356, *a*. Weil auf diese Weise die einzelnen Elemente für sich zur Bewegung angetrieben werden, werden sie weder einander hinderlich sein, noch wird durch diese elementaren Kräfte

der Zusammenhang des Körpers oder die Drehungsaxe eine Einwirkung erleiden; es wird vielmehr die Bewegung eben so hervorgebracht werden, als ob die einzelnen Elemente so wohl von einander, als von der Axe getrennt wären.

Aufgabe 11.

§. 357. (Fig. 35.) Man soll die elementaren Kräfte, welche einen starren Körper während des Zeittheilchens dt um die Axe OA durch einen gegebenen Winkel $d\omega$ fortbewegen, auf zwei bestimmte Kräfte zurückführen, welche jenen allen gleichgeltend sind.

Auflösung.

Mit der Drehungsaxe OA conjugire man normal zwei andere Axen OB und OC, und indem man ein beliebiges Element des Körpers in Z und seine Masse $= dM$ annimmt, fälle man von hier auf die Ebene AOB das Perpendikel ZY und von Y auf die Axe OA das Perpendikel YX. Man setze die drei Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$, endlich den Abstand des Elementes von der Axe oder $XZ = \sqrt{y^2 + z^2} = r$. Nun werde dem Elemente Z, wie dem ganzen Körper, eine Bewegung im Sinne $Z\zeta$, welche Linie in der Ebene XYZ auf XZ normal ist, beigebracht; alsdann muss nothwendig das Element dM, längs dieser Richtung $Z\zeta$, durch eine Kraft $= \frac{rd\omega}{gdt^2} \cdot dM = \frac{\alpha r dM}{g}$ angetrieben werden, wo $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$ gesetzt ist. Man verlängere nun YZ nach z und ziehe $ZV \# YX$, zerlege die Kraft $Z\zeta = \frac{\alpha r dM}{g}$ nach den Richtungen ZV und Zz, alsdann wird die Kraft längs $ZV = \frac{\alpha z dM}{g}$ und die längs Zz $= \frac{\alpha y dM}{g}$. Da es gleichgültig ist, in welchen Punkten dieser Richtungen wir uns diese Kräfte angebracht denken, wollen wir uns jene $\frac{\alpha z dM}{g}$ in der Ebene AOC und im Punkte V längs Vv angebracht denken, so dass die längs Vv wirkende Kraft $= \frac{\alpha z dM}{g}$ sei; die andere Kraft $\frac{\alpha y dM}{g}$ denken wir uns aber in der Ebene AOB und im Punkte Y angebracht, so dass wir längs Yz die Kraft $\frac{\alpha y dM}{g}$ haben. Nun sei allen längs Vv wirkenden Kräften die eine Kr, welche normal auf die

Ebene AOC in R angebracht ist, gleichgeltend; alsdann wird, wenn man $RP \# OC$ zieht,

die Kraft $Rr = \frac{\alpha}{g}\int z dM$, $OP = \frac{\int xz dM}{\int z dM}$ und $PR = \frac{\int z^2 dM}{\int z dM}$.

Ferner sei allen längs Yz wirkenden Kräften die eine Ss gleichgeltend, welche normal auf die Ebene AOB im Punkte S angebracht ist. Zieht man daher SQ normal auf OA, so wird

die Kraft $Ss = \frac{\alpha}{g}\int y dM$, $OQ = \frac{\int xy dM}{\int y dM}$ und $QS = \frac{\int y^2 dM}{\int y dM}$.

Diese zwei Kräfte Rr und Ss üben daher auf den Körper dieselbe Wirkung aus, als alle elementaren Kräfte zusammengenommen, wenn nur der Körper ein starrer ist.

Zusatz 1.

§. 358. Wird demnach ein starrer Körper durch zwei derartige Kräfte Rr und Ss angetrieben, so fängt derselbe an, sich so um die Axe OA zu drehen, dass er im Zeittheilchen dt den Winkel $d\omega = \alpha dt^2$ beschreibt. Die Axe wird ferner von diesen Kräften keine Einwirkung erleiden oder es wird keiner Kraft bedürfen, um inzwischen die Axe in Ruhe zu erhalten.

Zusatz 2.

§. 359. Da man auf unzählige Weise je zwei andere Kräfte darstellen kann, welche diesen gleichgeltend sind, so wird auch durch sie alle dem Körper dieselbe Bewegung beigebracht werden, so dass die Axe OA von ihnen keine Einwirkung erleidet. Anders verhält es sich aber mit dem Zusammenhange, welcher nur von den elementaren Kräften keine Einwirkung erleidet.

Anmerkung.

§. 360. Bei dieser Reduction der Kräfte haben wir auf die Festigkeit der Axe keine Rücksicht genommen, sondern haben, als ob der Körper vollkommen frei wäre, je zwei Kräfte gefunden, welche allen elementaren gleichgeltend sind und desshalb auch keine Wirkung auf die Axe ausüben. Wenn wir aber auch die Festigkeit der Axe im Auge halten, so können wir unendlich viele andere Kräfte darstellen, welche zwar dem Körper dieselbe Bewegung um die Axe OA einflössen, aber ausserdem auf die letztere einwirken. Alle Kräfte nämlich, welche in Bezug auf die Axe OA dasselbe Moment hervorbringen, als alle elementaren Kräfte zusammengenommen oder je zwei den letztern gleichgeltend gefundene, weil nämlich

jene entgegengesetzt genommen mit diesen im Gleichgewicht stehen, werden auch dem Körper dieselbe Bewegung einflössen. Da nun aber das Moment der Kraft $Z\zeta = \frac{\alpha r dM}{g}$ in Bezug auf die Axe $OA = \frac{\alpha r^2 dM}{g}$ ist, so entspringt aus allen elementaren Kräften das Moment $= \frac{\alpha}{g}\int r^2 dM = \frac{d\omega}{gdt^2}\int r^2 dM$.

Alle Kräfte also, welche in Bezug auf die Axe OA ein gleiches Moment haben, werden den Körper um diese Axe, während des Zeittheilchens dt, durch einen Winkel $= d\omega$ drehen; hiernach löst man leicht die folgende Aufgabe.

Aufgabe 12.

§. 361. Ein ruhender und um eine feste Axe beweglicher starrer Körper wird durch beliebige Kräfte angetrieben, man soll die im ersten Augenblick erzeugte Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Man bestimme die Momente aller Kräfte in Bezug auf die Drehungsaxe und beachte dabei, in welchem Sinne eine jede wirkt, es sei die Summe aller Momente $= Vf$, aus deren Sinn die Richtung der zuerst beigebrachten Bewegung bekannt wird. Es sei ferner $d\omega$ der Winkel, durch welchen der Körper im Zeittheilchen dt um die Axe gedreht wird, man multiplicire hierauf die einzelnen Elemente dM des Körpers durch die Quadrate ihrer Abstände von der Axe oder r^2 und bestimme durch Rechnung den Werth des Integrals $\int r^2 dM$. Ist diess geschehen, so muss $\frac{d\omega}{gdt^2}\int r^2 dM = Vf$ sein, woraus sich nun umgekehrt der Winkel $d\omega$ ergibt, um welchen der Körper im Zeittheilchen dt durch das Moment Vf der Kräfte fortbewegt wird, es ist nämlich

$$d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int r^2 dM}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit, welche der Körper in diesem Zeittheilchen dt erlangt, wird aber

$$= \frac{2\,Vfgdt}{\int r^2 dM};$$

man kennt demnach die, durch beliebige Kräfte im ersten Zeitaugenblick dt hervorgebrachte, Wirkung.

Zusatz 1.

§. 362. Der in dem gegebenen Zeittheilchen dt beschriebene Winkel $d\omega$ ist daher direct dem Momente der Kräfte Vf und indirect dem Integrale $\int r^2 dM$, d. h. dem Aggregate aller Elemente dM des Körpers, in die Quadrate ihrer Abstände von der Axe multiplicirt, proportional.

Zusatz 2.

§. 363. Diese Formel ist derjenigen ähnlich, durch welche die Erzeugung der fortschreitenden Bewegung ausgedrückt wird, indem hier statt der Kräfte ihr Moment und statt der Masse des Körpers M der Werth des Integrals $\int r^2 dM$ genommen wird; diesen letztern Werth werden wir in der Folge das Moment der Trägheit nennen.

Anmerkung.

§. 364. In dieser Aufgabe ist die Wirkung beliebiger Kräfte bei der Erzeugung einer Bewegung um eine feste Axe vollkommen bestimmt worden, so dass nichts zu wünschen übrig bleibt. Wie man nämlich die Momente der antreibenden Kräfte in Bezug auf jede Axe zu nehmen habe, wird in der Statik gelehrt und bald noch genauer von uns dargestellt werden. Es ist aber hier ausser der erzeugten Bewegung von grösster Wichtigkeit, die Kräfte zu bestimmen, welche die Axe auszuhalten hat und zwar nicht allein, damit man einsehe, wie grosser Kräfte es bedürfe, dass die Axe festgehalten werde und sich nicht bewege, sondern damit wir auch künftig, wenn wir zur freien Bewegung starrer Körper zurückkehren, beurtheilen können, in welchen Fällen die Axe durchaus gar keine Kräfte auszuhalten habe. Diese Frage in Betreff der Wirkungen, welche die Axe von Seiten der Kräfte auszuhalten hat, ist, wenn auch von der grössten Wichtigkeit, doch bis jetzt nicht mit hinreichender Sorgfalt behandelt worden, wesshalb ich mich bemühen werde, sie ausführlich und bestimmt zu entwickeln.

Aufgabe 13.

§. 365. Ein ruhender und um eine feste Axe beweglicher starrer Körper wird durch beliebige Kräfte angetrieben; man soll die Kräfte bestimmen, welche die Axe hiernach auszuhalten hat.

Auflösung.

Diese Untersuchung muss wieder so auf den Zustand der

Ruhe zurückgeführt werden, dass man sich gewisse einander im Gleichgewicht haltende Kräfte am Körper angebracht denkt, welche eben so auf die Axe einwirken, als die antreibenden Kräfte, während diese im Körper eine Bewegung erzeugen. Zu diesem Ende bestimme man alle den Körper antreibenden *Kräfte und schliesse von diesen auf die Momente in Bezug auf die Drehungsaxe, deren Summe* $= Vf$ *sei.* Hiernach suche man den im Zeittheilchen dt erzeugten Winkel (Figur 35.), welchen wir $= \frac{Vfgdt^2}{\int r^2 dM} = d\omega$ gefunden haben. Ferner suche man die elementaren Kräfte, welche dieselbe Bewegung erzeugen und welche wir für die einzelnen Elemente des Körpers so bestimmt haben, dass das in Z gelegene Element dM nach der, auf den Abstand $XZ = r$ perpendiculären und in der auf die Axe normalen Ebene gelegenen, Richtung $Z\zeta$ oder nach der Richtung der erzeugten Bewegung durch eine Kraft $= \frac{rd\omega dM}{gdt^2}$ $= \frac{VfrdM}{\int r^2 dM}$ angetrieben werde. Zugleich haben wir bemerkt, dass die Axe nichts von diesen Kräften zu erleiden hat. Wenn wir daher ausserdem Kräfte am Körper anbringen, welche diesen gleich und entgegengesetzt sind, so wird der Körper in Ruhe oder im Gleichgewicht erhalten werden und es wird zugleich die Drehungsaxe noch dieselben Kräfte auszuhalten haben, welche sie bei der Erzeugung der Bewegung auszuhalten hatte. Um hiernach die auf die Axe einwirkenden Kräfte zu finden, denken wir uns am Körper ausser den ihn wirklich antreibenden Kräften, elementare Kräfte angebracht, welche die erzeugte Bewegung wieder aufheben; oder man bringe statt dieser nach §. 357. am Körper Kräfte an, welche den dort angegebenen Rr und Ss entgegengesetzt sind, indem man $\alpha = \frac{Vfg}{\int r^2 dM}$ setzt. Auf diese Weise wird der Körper im Gleichgewicht erhalten werden und die Axe dieselben Kräfte auszuhalten haben, welche sie bei der Erzeugung der Bewegung auszuhalten hat.

Zusatz 1.

§. 366. Ausser den den Körper wirklich antreibenden Kräften hat man zuerst die Kraft Rr, ihr selbst entgegengesetzt, anzubringen; es ist aber diese Kraft $= \frac{Vf\int z dM}{\int r^2 dM}$, wobei

$OP = \frac{\int xz dM}{\int z dM}$ und $PR = \frac{\int z^2 dM}{\int z dM}$. Zweitens muss man ebenfalls entgegesetzt anbringen die Kraft $Ss = \frac{V \int f y dM}{\int r^2 dM}$, wobei $OQ = \frac{\int xy dM}{\int y dM}$ und $QS = \frac{\int y^2 dM}{\int y dM}$ ist.

Zusatz 2.

§. 367. Wenn aber die antreibenden Kräfte dem Körper eine Bewegung in dem, $Z\zeta$ entgegengesetzten, Sinne einflössen, so hat man sich ausser ihnen die Kräfte Rr und Ss selbst am Körper angebracht zu denken. Hierbei muss man sich erinnern, dass $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ und $r^2 = y^2 + z^2$ ist.

Zusatz 3.

§. 368. Nach diesen Kräften, welche den Körper im Gleichgewichte erhalten, muss man beurtheilen, wieviel die Axe von ihnen zu erleiden hat oder durch eine wie grosse Kraft sie festgehalten werden muss, um nicht von ihrem Orte entfernt zu werden.

Anmerkung.

§. 369. Die Axe wird hier als durchaus fest betrachtet, so dass der Körper sich im Gleichgewicht befinden wird, wenn die Momente der Kräfte in Bezug auf sie sich einander aufheben. Damit wir aber deutlicher ersehen, wie grosse Kräfte die Axe auszuhalten hat, denken wir uns die Sache am bequemsten so, als ob die Axe in zwei Punkten festgehalten würde, damit wir zu bestimmen haben, wie grosse Kräfte in diesen Punkten angebracht werden müssen, um die Axe in ihrer Lage zu erhalten. Diese Beurtheilung würde zwar leicht sein, wenn die Kräfte an der Axe selbst angebracht wären, weil unter der Voraussetzung, dass eine beliebige Kraft an der Axe angebracht sei, man immer in zwei gegebenen Punkten anzubringende Kräfte darstellen kann, welche jener gleichgeltend sind. Da nun die Richtungen der Kräfte, welche dem Körper eine Bewegung einflössen, desshalb eben nicht durch die Axe gehen und die ausserdem anzubringenden Kräfte Rr und Ss ebenfalls nicht auf die Axe einwirken; so wird die ganze Arbeit darauf zurückgeführt, dass wir alle Kräfte, durch welche wir den Körper als angetrieben betrachten, auf andere ihnen gleichgeltende bringen, welche alle unmittelbar an der Axe angebracht sind. Zuerst darf man bezweifeln, ob diess geschehen könne. Wir

werden aber zeigen, dass, so oft die am Körper angebrachten Kräfte im Gleichgewichte stehen, man immer ihnen gleichgeltende angeben kann, welche an der Drehungsaxe selbst angebracht sind. Von den antreibenden Kräften hat man aber zwei Arten aufzustellen, die erste enthält diejenigen, welche gar kein Moment in Bezug auf die Axe bilden, was geschieht, wenn ihre Richtungen mit der Drehungsaxe in derselben Ebene liegen; die zweite Art umfasst diejenigen Kräfte, deren Richtungen sich in einer auf die Axe normalen Ebene befinden, und welche gewissermaassen ganz zur Erzeugung einer drehenden Bewegung verwandt werden. Man kann aber alle Kräfte auf diese zwei Arten zurückführen und ich werde daher zuerst erforschen, welche Wirkung die Axe von der ersten Art, die gar keine Bewegung erzeugt, zu erleiden hat.

Aufgabe 14.

§. 370. Ein starrer Körper, welcher um eine feste Axe beweglich ist, wird durch eine Kraft angetrieben, deren Richtung mit der Axe in derselben Ebene liegt; man soll die Kräfte bestimmen, welche hiernach die Axe in zwei gegebenen Punkten auszuhalten hat.

Auflösung.

(Fig. 37.) Es sei MN die Drehungsaxe und PQ die Richtung der antreibenden Kraft V, welche, wenn sie nicht etwa der Axe parallel ist, diese in einem gewissen Punkte T schneiden wird, weil sie mit ihr in derselben Ebene liegt. Da nun aus dieser Kraft kein Moment in Bezug auf die Axe MN entspringt, so wird sie auch nicht auf eine etwa stattfindende Bewegung einwirken; die Axe wird daher eben so durch sie angetrieben werden, als ob sie sich in Ruhe befände. Wir können uns daher die Sache so denken, als ob die Kraft V an der Axe im Punkt T und nach der Richtung TQ angebracht wäre und wenn wir sie nach den Richtungen TN und der, in der Ebene $MNPQ$ auf MN normalen, Tt zerlegen; so wird

die Kraft $TN = V.\cos NTQ$ und die Kraft $Tt = V \sin NTQ$.

Ist nun die Frage, wie grosse Kräfte die Axe in den Punkten M und N auszuhalten habe, so fälle man von diesen auf die Richtung der Kraft PQ die Perpendikel MP und NQ. Da nun

$$\cos NTQ = \frac{TQ}{TN} = \frac{TP}{TM} = \frac{PQ}{MN}$$

und $\sin NTQ = \frac{NQ}{TN} = \frac{MP}{TM}$,

so wird

die Kraft $TN = V . \frac{PQ}{MN}$ und die Kraft $Tt = V . \frac{NQ}{TN} = V . \frac{MP}{TM}$.

Zuerst wird also die Axe längs ihrer Richtung MN durch eine Kraft $= V . \frac{PQ}{MN}$ angetrieben und es ist gleichgültig, in welchem Punkte derselben wir uns die letztere angebracht denken. In den Punkten M und N kann man aber die Kräfte Mm und Nn, normal auf die Axe in der Ebene $MNPQ$, als der Kraft Tt gleichgeltend, anbringen und es wird

$$\text{die Kraft } Mm = Tt . \frac{TN}{MN} = V . \frac{NQ}{MN}$$

und $$\text{die Kraft } Nn = Tt . \frac{TM}{MN} = V . \frac{MP}{MN}.$$

Diese Kräfte hat demnach die Axe in den gegebenen Punkten M und N auszuhalten, ausser jener Kraft $V . \frac{PQ}{MN}$, welche längs der Richtung der Axe selbst wirkt und zwar entspringen diese Kräfte aus der vorausgesetzten Kraft V, durch welche der Körper in der Richtung PQ angetrieben wird.

Zusatz 1.

§. 371. (Figur 38.) Fällt der Durchschnittspunkt T nicht zwischen die Punkte M und N, so muss man das Perpendikel NQ als negativ ansehen und es wird die in M anzubringende Kraft Mm gegen PQ gerichtet sein, so dass man hat

die Kraft $Mm = V . \frac{NQ}{MN}$ und die Kraft $Nn = V . \frac{MP}{MN}$,

ausser welchen die Axe längs MN durch eine Kraft $= V . \frac{PQ}{MN}$ angetrieben wird.

Zusatz 2.

§. 372. (Figur 39.) Wenn die Richtung PQ der antreibenden Kraft V der Axe MN parallel ist und sich im Abstande MP von ihr befindet, so wird zuerst die Axe längs ihrer Richtung MN durch eine Kraft $= V$ fortgezogen, ausserdem wird sie aber die einander und $V . \frac{MP}{MN}$ gleichen Kräfte Mm und Nn auszuhalten haben.

Anmerkung.

§. 373. (Figur 40.) Für unsern Plan genügt es, diesen letzten Fall der Aufgabe, in welchem die Richtung der antreibenden Kraft der Axe selbst parallel ist, angeführt zu haben. Durch was für eine Kraft ein Körper auch angetrieben werden mag, so kann man dieselbe immer in zwei zerlegen, von denen die eine eine der Axe parallele Richtung hat, die andere aber in einer auf die Axe normalen Ebene liegt. Um diess deutlicher einzusehen, sei OA die Drehungsaxe und an dem Körper eine beliebige Kraft $PV = V$ angebracht, man ziehe aus dem beliebigen Punkte P derselben die gerade Linie PQ parallel der Axe OA, aus V fälle man auf die Ebene $OAPQ$ das Perpendikel VR, ziehe RQ normal auf PQ; alsdann wird VQ auch normal auf PQ und in einer auf die letztere normalen Ebene liegen. Zieht man nun Pv parallel und gleich QV, so wird erstere auch auf PQ perpendiculär sein und in einer auf OA normalen Ebene liegen. Da nun $PQVv$ ein Rechteck ist, so wird man die Kraft $PV = V$ in die Kräfte PQ und Pv zerlegen können, wobei die Kraft $PQ = \frac{PQ}{PV} \cdot V$ und die Kraft $Pv = \frac{Pv}{PV} \cdot V$ wird. Da wir nun die Wirkung jener Kraft PQ auf die Axe schon bestimmt haben, so bleibt noch zu ermitteln übrig, wieviel die Axe durch die Kraft Pv, während diese die drehende Bewegung erzeugt, auszuhalten hat; zu diesem Ende wollen wir die folgenden Aufgaben entwickeln.

Aufgabe 15.

§. 374. (Figur 41.) Eine ebene starre Scheibe $EFBG$ sei um eine, in O auf sie normale, feste Axe beweglich und es werde dieselbe in eben dieser Ebene durch eine gegebene Kraft V in der Richtung BD angetrieben; man soll die Kräfte bestimmen, welche die Axe bei der Erzeugung der Bewegung auszuhalten hat.

Auflösung.

Man fälle von der Axe O auf die Richtung der antreibenden Kraft das Perpendikel $OD = f$, alsdann wird ihr Moment $= Vf$ und wenn man nun ein Element dM des Körpers in Z annimmt, dessen Abstand $OZ = r$ sei, so wird die Scheibe während des Zeittheilchens dt, im Sinne $Z\zeta$, um einen Winkel $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{fr^2dM}$ herumgedreht werden. Um diese Wirkung hervorzubringen, ist eine längs $Z\zeta$ antreibende elementare Kraft

$= \frac{r d\omega dM}{g dt^2} = \frac{Vf r dM}{\int r^2 dM}$ erforderlich. Um diese elementaren Kräfte zu vereinigen, nehme man in der Ebene der Scheibe die zwei auf einander normalen Axen OB und OC an, und wenn man nun die Coordinaten $OY = y$ und $YZ = z$ setzt, so dass $r^2 = y^2 + z^2$ wird; so zerlege man die Kraft $Z\zeta$ nach den Richtungen ZV und Zz. Es wird alsdann

die Kraft $ZV = \frac{Vf z dM}{\int r^2 dM}$ und die Kraft $Zz = \frac{Vf y dM}{\int r^2 dM}$.

Nun sei allen Kräften ZV die Kraft Rr, allen Kräften Zz die Kraft Ss gleichgeltend, alsdann wird

die Kraft $Rr = \frac{Vf\int z dM}{\int r^2 dM}$ und der Abstand $OR = \frac{\int z^2 dM}{\int z dM}$,

ferner - - $Ss = \frac{Vf\int y dM}{\int r^2 dM}$ - - - $OS = \frac{\int y^2 dM}{\int y dM}$.

Denkt man sich diese Kräfte auf entgegengesetzte Weise in $R\varrho$ und $S\sigma$ angebracht und verbindet man mit ihnen die antreibende Kraft $BD = V$, so erhält man die Kräfte, welche die Axe auszuhalten hat (§§. 357. und 365.). Nun ist aber die Kraft $Dd = V$ gleichgeltend der, im Punkte O nach derselben Richtung angebrachten, Kraft $O\theta = V$ und ausserdem einer verschwindenden Kraft, welche in der in's Unendliche verlängerten Entfernung OD anzubringen ist, deren Moment aber $= Vf$ ist. Auf ähnliche Weise kann man statt der Kräfte $R\varrho$ und $S\sigma$ im Punkte O die ihnen gleichgeltenden Kräfte OR' und OS' setzen, in Verbindung mit den verschwindenden und in unendlich grossen Entfernungen so anzubringenden Kräften, dass ihre Momente $= \frac{Vf\int z^2 dM}{\int r^2 dM}$ und $= \frac{Vf\int y^2 dM}{\int r^2 dM}$ werden. Da nun die Momente, welche aus den verschwindenden Kräften entspringen, sich aufheben, so treten diese nicht weiter in die Rechnung ein; es hat daher die Axe im Punkte O folgende drei Kräfte auszuhalten:

1) die Kraft $O\theta = V$, gleich und parallel der antreibenden,

2) - - $OR' = \frac{Vf\int z dM}{\int r^2 dM}$ und

3) - - $OS' = \frac{Vf\int y dM}{\int r^2 dM}$.

Zusatz 1.

§. 375. Zieht man die Axe OB durch den Mittelpunkt der Trägheit der Scheibe oder I, so wird

$$\int z dM = 0 \text{ und } \int y dM = M.OI,$$

wo M die ganze Masse bezeichnet. Hiernach hat die Axe in O die zwei Kräfte $O\theta = V$ und $OS' = \frac{V f M.OI}{\int r^2.dM}$ auszuhalten, welche leicht auf eine einzige reducirt werden.

Zusatz 2.

§. 376. Damit die Axe gar keine Kraft auszuhalten habe, muss die Richtung der antreibenden Kraft oder BD auf die gerade Linie OIB normal, ausserdem aber

$$V = \frac{V f M.OI}{\int r^2 dM} \text{ oder } f = \frac{\int r^2 dM}{M.OI}$$

sein, wo $f = OD$ den Abstand der angebrachten Kraft von der Axe O bezeichnet.

Zusatz 3.

§. 377. Ist aber die Kraft V so angebracht, dass die Axe O keine Einwirkung von ihr erleidet, so wird, weil $f = \frac{\int r^2 dM}{M.OI}$ ist, die Scheibe während des Zeittheilchens dt um einen Winkel $d\omega$ umgedreht, wo $d\omega = \frac{V g dt^2}{M.OI}$ ist. Der Punkt I wird daher eben so sich zu bewegen anfangen, als ob die ganze Masse in ihm vereinigt wäre und diese durch dieselbe Kraft V angetrieben würde.

Erläuterung.

§. 378. Die Grundlage dieser Auflösung stützt sich auf das Princip, dass die Kräfte, deren Momente in Bezug auf die Drehungsaxe sich aufheben, auf die letztere dieselbe Wirkung ausüben, als ob diese Kräfte unmittelbar an der Axe in ihren Richtungen angebracht wären. Wenn diess auch in der Auflösung hinreichend bestätigt worden ist, weil die verschwindenden Kräfte, deren Momente sich aufheben, mit Recht vernachlässigt werden können; so wird es doch, wenn das Verschwinden der Kräfte und die unendlich grosse Entfernung, in welcher man sie sich angebracht denkt, für jemanden anstössig sein sollte, angenehm sein, dasselbe auf eine andere Weise zu zeigen. Es seien demnach (Figur 43.) Bb und Cc zwei Kräfte in derselben Ebene, deren Momente in Bezug auf den Punkt O sich aufheben, so dass, wenn man von O auf ihre Richtungen die Perpendikel OB und OC fällt, man habe

$$Bb.OB = Cc.OC \text{ oder } Bb : Cc = OC : OB.$$

Es mögen nun ihre Richtungen im Punkte E zusammentreffen, alsdann kann man sich beide Kräfte gleichsam in demselben Punkte angebracht denken und es wird Eine ihnen gleichgeltende Kraft Ee geben, deren Richtung nothwendig durch den Punkt O geht, indem sonst aus ihr, der Voraussetzung zuwider, ein Moment in Bezug auf den Punkt O entspringen würde. Diess wird auch folgendermaassen bewiesen. Es sei Ee die mittlere Richtung der in E angebrachten Kräfte Bb und Cc, alsdann wird durch die Zerlegung der Kräfte

$$Bb : Cc = \sin\nu : \sin\mu;$$

dasselbe Verhältniss gilt aber, wenn Ee durch den Punkt O geht, indem alsdann

$$\sin\nu : \sin\mu = OC : OB = Bb : Cc.$$

Wir können uns demnach die Kraft Ee gleichsam in O angebracht denken und es sei dieselbe $= O\omega$, welcher also auch die Kräfte $O\beta = Bb$ und $O\gamma = Cc$ gleichgelten werden; auf diese Weise können wir mit Recht an die Stelle der Kräfte Bb und Cc die ihnen gleichen und im Punkte O angebrachten Kräfte $O\beta$ und $O\gamma$ setzen. Durch diesen Beweis wird daher umgekehrt der in der Auflösung angenommene Grundsatz ausser Zweifel gesetzt.

Anmerkung.

§. 379. Sehr bemerkenswerth ist der Fall, in welchem die den Körper antreibende Kraft gar keine Wirkung auf die Drehungsaxe ausübt, diese also von freien Stücken in Ruhe bleiben wird, während die Kraft ihre Wirkung auszuüben anfängt. Damit wir diesen Fall (Fig. 41.) genauer kennen lernen, müssen wir auf der von der Axe O durch den Mittelpunkt der Trägheit I verlängerten geraden Linie OI den Punkt H suchen, so dass

$$OH = \frac{\int r^2 dM}{M . OI}$$

werde; alsdann wird eine jede beliebige Kraft Hh, welche auf OH normal in der vorausgesetzten Ebene ist, auf keine Weise auf die Axe O einwirken. Unten werden wir aber sehen, dass der Punkt H derselbe ist, welchen man gewöhnlich den Schwingungsmittelpunkt zu nennen pflegt, so wie I der Mittelpunkt der Trägheit ist.

Uebrigens wird durch die Auflösung dieser Aufgabe die Auflösung der folgenden, wo wir dem Körper auch eine Ausdehnung in der Richtung der Axe beilegen, erleichtert werden.

Aufgabe 16.

§. 380. (Figur 44.) Ein starrer Körper, welcher um eine feste Axe OA beweglich ist, wird durch beliebig viele Kräfte angetrieben, deren Richtungen in, auf die Axe normalen, Ebenen liegen; man soll die Kräfte finden, welche im Anfange der Bewegung unmittelbar auf die Axe einwirken.

Auflösung.

Da alle Kräfte in Ebenen wirken, welche auf die Axe normal sind, so suche man die Momente der einzelnen in Bezug auf die Axe OA, ihr Aggregat sei, je nachdem sie in demselben oder dem entgegengesetzten Sinne wirken, $= Vf$; durch dasselbe werde der Körper um die Axe während des Zeittheilchens dt durch den Winkel $d\omega$ gedreht, so dass das Theilchen in Z sich im Sinne $Z\zeta$ bewege. Wir nehmen als Hülfsmittel der Rechnung je zwei auf OA normale Axen OB und OC an und stellen für das in Z gelegene Element des Körpers dM die drei Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ auf, und es sei sein Abstand von der Axe oder $XZ = \sqrt{y^2 + z^2} = r$. Unter diesen Voraussetzungen haben wir oben (§. 374.) gefunden

$$d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int r^2 dM}.$$

Ausser diesen Kräften, welche den Körper wirklich antreiben, wird überdem die Axe durch Kräfte angetrieben, welche denjenigen gleich und entgegengesetzt sind, auf die wir oben die elementaren Kräfte zurückgeführt haben (§. 366.); hierbei ist zu bemerken, dass die Momente aller dieser Kräfte zusammengenommen sich wechselseitig aufheben. Wenn wir daher statt einer jeden Kraft eine ihr gleiche, an der Axe in derselben Richtung angebrachte substituiren und eine andere verschwindende in unendlich grosser Entfernung angebrachte, deren Moment aber dem Moment jener gleich ist; so werden die Momente aller dieser Kräfte sich aufheben und da sie verschwinden, gar nicht in Rechnung kommen. Hiernach werden die Kräfte, welche unmittelbar die Axe antreiben, sich folgendermaassen verhalten:

1) werden die einzelnen Kräfte, welche in, auf die Axe normalen, Ebenen den Körper antreiben, an der Axe selbst in derselben Richtung angebracht;
2) nehme man, in Folge der elementaren Kräfte, den Abstand

$OP = \frac{\int xzdM}{\int zdM}$ an und bringe in P, nach der OB parallelen Richtung, an der Axe die Kraft $P\varrho = \frac{V\int\int zdM}{\int r^2dM}$ an (§. 366.);

3) nehme man den Abstand $OQ = \frac{\int xydM}{\int ydM}$ an und bringe in Q, nach der OC parallelen und entgegengesetzten Richtung die Kraft $Q\sigma = \frac{V\int\int ydM}{\int r^2dM}$ an (§. 366.). Auf diese Weise wird man alle Kräfte erhalten, welche die Axe auszuhalten hat, so dass diese hinreichend befestigt sein muss, um nicht aus ihrer Lage gebracht zu werden.

Zusatz 1.

§. 381. Nimmt man die Ebene AOB so an, dass sie durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gehet, so wird $\int zdM = 0$ und es verschwindet daher die Kraft $P\varrho$. Zugleich wird aber der Abstand $OP = \infty$ und man hat zu bemerken, dass

$$P\varrho . OP = \frac{V\int\int xzdM}{\int r^2dM}$$

wird, diese Kraft also nicht vernachlässigt werden darf.

Zusatz 2.

§. 382. Weil auf diese Weise alle Kräfte, welche die Axe auszuhalten hat, an dieser selbst angebracht sind, wird, wenn sie sich wechselseitig im Gleichgewicht halten, die Axe keine Einwirkung erleiden und der Körper um sie, wenn sie auch frei ist, von freien Stücken sich herumzudrehen anfangen.

Zusatz 3.

§. 383. Aus den einzelnen Kräften aber, welche den Körper antreiben, entspringen eben so viele an der Axe selbst angebrachte Kräfte und indem man diesen die zwei, ebenfalls an ihr angebrachten, Kräfte $P\varrho$ und $Q\sigma$ hinzufügt, erhält man auf diese Weise alle auf sie einwirkenden Kräfte.

Erläuterung.

§. 384. (Figur 45.) Wir haben schon vorher gezeigt, dass, wenn zwei Kräfte in derselben auf die Axe normalen Ebene angebracht sind und ihre Momente sich aufheben, ihnen zwei gleiche an der Axe selbst und in denselben Richtungen angebrachte Kräfte gleichgeltend sind. Jetzt müssen wir daher, damit kein Zweifel in Betreff dieser Auflösung übrig bleibe,

nach den Principien der Statik beweisen, dass dasselbe gilt, wenn auch die Kräfte in verschiedenen auf die Axe normalen Ebenen angebracht sind. Es sei daher an der Axe OA in der Ebene, welche in E auf ihr normal steht, eine beliebige in der Figur nicht ausgedrückte Kraft angebracht, ferner sei in der Ebene, welche in F normal auf der Axe steht, die Kraft Nn angebracht, deren Moment dem jener Kraft gleich und entgegengesetzt ist und es sei FN auf die Richtung dieser Kraft Nn perpendiculär. Man ziehe nun aus E die Linie EM = und ⌗ FN und denke sich in M die Kraft Mm = und ⌗ Nn, ferner in E und F die jenen gleichen und parallelen Kräfte $E\mu$ und $F\nu$ angebracht. Offenbar werden die drei Kräfte Mm, $E\mu$ und $F\nu$ der einen Kraft Nn gleichgeltend sein, weil diese, auf entgegengesetzte Weise angebracht, mit jenen dreien im Gleichgewicht stehen würde. Wir können daher statt der Kraft Nn die drei Kräfte Mm, $E\mu$ und $F\nu$ substituiren, von denen die zwei letzten an der Axe selbst, die erstere aber in derselben auf die Axe normalen Ebene, in welcher die nicht dargestellte Kraft wirkt, angebracht ist. Da nun das Moment dieser Kraft Mm dem Momente der in der Figur nicht dargestellten Kraft gleich und entgegengesetzt ist, so kann man dieselben auf die Axe übertragen und so an die Stelle der Kraft Mm die ihr gleiche und parallele EM' setzen. Da diese aber durch die Kraft $E\mu$ aufgehoben wird, so bleibt allein die Kraft $F\nu$ übrig, welche die Stelle der Kraft Nn vertreten wird, während auch die in der Figur nicht ausgedrückte Kraft im Punkte E angebracht ist. Man ersieht hieraus im Allgemeinen, dass man an die Stelle von Kräften, deren Momente sich aufheben, dieselben an der Axe selbst angebrachten Kräfte setzen darf, wenn nämlich ihre Richtungen in Ebenen liegen, welche auf der Axe normal stehen.

Aufgabe 17.

§. 385. (Figur 44.) Ein starrer um eine feste Axe OA beweglicher Körper wird durch beliebige Kräfte angetrieben; man soll die Kräfte bestimmen, welche die Axe in zwei gegebenen Punkten O und A unterstützen müssen, damit diese nicht aus ihrer Lage gebracht werde.

Auflösung.

Durch den einen der gegebenen Punkte O denke man sich die zwei, auf einander und auf die Axe OA normalen, Axen

OB und OC, und indem man für ein beliebiges in Z gelegenes Element dM des Körpers die drei Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ voraussetzt, setze man seinen Abstand von der Drehungsaxe oder $XZ = \sqrt{y^2 + z^2} = r$. Nun betrachte man die einzelnen den Körper antreibenden Kräfte und zerlege die in schiefer Richtung wirkenden in je zwei, von denen die eine der Axe OA parallel, die andere sich in einer auf diese Axe normalen Ebene befinde. Die erstern tragen nichts zur Bewegung bei und welche Wirkung sie auf die Axe ausüben, haben wir oben (§. 372.) bestimmt, woraus sich zugleich ergibt, wie grosse Kräfte aus ihnen in den Punkten O und A entspringen. Die letztern aber mögen zugleich das Moment $= Vf$, zur Drehung des Körpers im Sinne $Z\zeta$, bilden; eine beliebige derselben werde in dem Punkte der Axe, welchem sie entspricht, in ihrer Richtung angebracht und es sei eine derartige Kraft $Ll = L$. Statt dieser bringe man in den Punkten O und A die einander parallelen Kräfte $O\lambda$ und Al' an, so dass $O\lambda = L \cdot \frac{AL}{OA}$ und $Al' = L \cdot \frac{OL}{OA}$ sei, indem diese zwei jener einen gleichgeltend sein werden. Auf diese Weise werden von den einzelnen Kräften je zwei solche nach den Punkten O und A übertragen. Setzt man nun den Abstand $OA = a$, so werden, in Folge der Kräfte $P\varrho$ und $Q\sigma$, die Punkte O und A die jenen parallelen Kräfte Oo, Aa und $O\omega$, $A\alpha$ auszuhalten haben, dergestalt dass

$$\text{die Kraft } Oo = \frac{Vf\int(a-x)z\,dM}{a\int r^2 dM}, \quad \text{die Kraft } Aa = \frac{Vf\int xz\,dM}{a\int r^2 dM},$$

$$\text{- - } O\omega = \frac{Vf\int(a-x)y\,dM}{a\int r^2 dM}, \quad \text{- - } A\alpha = \frac{Vf\int xy\,dM}{a\int r^2 dM}$$

wird. Da auf diese Weise alle Kräfte, welche die Axe auszuhalten hat, auf die Punkte O und A übertragen sind, so werden diese Punkte der Axe in Wirklichkeit durch dieselben zusammengenommen angetrieben werden. Sie müssen daher nothwendig durch die ihnen entgegengesetzten Kräfte festgehalten werden.

Zusatz 1.

§. 386. Alle diese an der Axe in den Punkten O und A angebrachten Kräfte sind zugleich normal gegen sie gerichtet, ausgenommen wenn auch der Axe parallele Kräfte vorhanden sind, in Folge deren die Axe auch in der Richtung ihrer Länge gedrängt werden wird.

Zusatz 2.

§. 387. Wie viele Kräfte aber auch in beiden Endpunkten O und A angebracht sein mögen, so kann man sie alle für beide Punkte auf Eine zurückführen, welche daher die Axe in diesem Punkte auszuhalten haben wird. Wenn diese Kräfte in O und A nicht verschwinden, wird auch die Axe von freien Stücken nicht in ihrer Lage verharren.

Zusatz 3.

§. 388. Wenn keine der Axe parallelen Kräfte da sind, wird dieselbe auch in der Richtung ihrer Länge durchaus nicht gedrängt, sondern in den Punkten O und A nur den auf die Axe normalen Kräften Widerstand zu leisten haben. Es wird daher hinreichend sein, wenn man die Axe zwischen zwei festen Ringen aufhängt.

Anmerkung.

§. 389. Wir können hier nicht die Art und Weise, nach welcher die Axe in Ruhe erhalten zu werden pflegt, entwickeln, weil in der Praxis die Axen der Körper eine merkliche Dicke haben, so dass sich die Aufhängung nicht, wie wir hier verlangt haben, auf eine lineare Axe bezieht. Man muss sich daher hüten, dass man nicht dasjenige, was wir hier hinsichtlich einer linearen Axe bewiesen haben, unüberlegt auf beliebig dicke Axen ausdehne. Man halte daher hier stets fest, dass die Axe für uns eine gerade Linie ist, welche sich während der Bewegung des Körpers selbst nicht bewegt; eine Bewegung, welche stattfinden würde, wenn der Körper sich zwischen zwei Spitzen befände, um welche er sich ganz frei ohne Reibung umwälzen könnte. Ist aber eine materielle Axe da, wie man sie an den Rädern anzubringen pflegt, so wird diese entweder auf einer Ebene oder einer Höhlung liegen und ihre Bewegung allerdings in Rechnung kommen müssen; alsdann wird es nicht leicht sein, diejenige Linie anzugeben, welche während der Bewegung des Körpers selbst unbeweglich bleibt. Da aber hier nur vom ersten Anfange der Bewegung die Rede ist, hält es nicht schwer, die Linie zu erkennen, welche für jede Art der Aufhängung in Ruhe bleiben wird.

Aufgabe 18.

§. 390. (Figur 46.) Ein starrer Körper ist um die Axe OA beweglich; man soll diejenigen Kräfte bestimmen, durch

welche derselbe angetrieben werden kann, ohne dass die Axe irgend welche Kräfte auszuhalten habe.

Auflösung.

Es müssen derartige Kräfte in Ebenen angebracht werden, welche auf der Axe normal stehen und weil man sie, wieviel ihrer auch immer da sein mögen, auf zwei Ebenen reduciren kann; so wollen wir die Kräfte suchen, welche in Ebenen, die in den Punkten O und A auf die Axe normal sind, angebracht werden müssen, damit diese gar keine Einwirkung von ihnen erleide. Wir nehmen wie vorhin in O die zwei Axen OB und OC an, welche so wohl aufeinander, als auf OA normal sind und setzen ihnen parallel in A die Linien AF und BH voraus. Wenn wir nun die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe und die dort gefundenen Formeln zu Hülfe nehmen, so wird der vorliegenden Aufgabe Genüge geschehen, indem wir irgendwo auf den geraden Linien OB, OC, AF und AH Kräfte anbringen, welche den dort gefundenen Oo, $O\omega$, Aa und $A\alpha$ gleich und entgegengesetzt sind, weil diese, wenn man sie auf die Axe überträgt, durch die elementaren Kräfte aufgehoben werden. Es seien demnach Ee und Ff die der Axe OC, aber Gg und Hh die der Axe OB parallelen Kräfte, welche so wirken, wie die Figur es zeigt. Setzen wir daher den Abstand $OA = a$, so müssen diese Kräfte folgendermaassen beschaffen sein:

$$\text{die Kraft } Ee = \frac{Vff(a-x)ydM}{a\int r^2dM}, \quad \text{die Kraft } Ff = \frac{Vf\int xydM}{a\int r^2dM},$$

$$\text{- \quad - } Gg = \frac{Vff(a-x)zdM}{a\int r^2dM}, \quad \text{- \quad - } Hh = \frac{Vf\int xzdM}{a\int r^2dM}.$$

Ausserdem muss die Summe der Momente dieser vier Kräfte gleich Vf sein, wesshalb wir haben:

$$OE.\int(a-x)ydM + AF.\int xydM + OG.\int(a-x)zdM + AH.\int xzdM = a\int r^2dM.$$

Dieser Gleichung wird man auf unendlich vielfache Weise Genüge leisten können, so dass, wenn man je drei Abstände nach Belieben annimmt, der vierte bestimmt wird. Leichter wird aber die Auflösung gemacht, wenn man so wohl die Abstände OE und AF, als auch die OG und AH einander gleich annimmt. Setzen wir daher

$$OE = AF = m \text{ und } OG = AH = n,$$

so wird die Gleichung

$$m\int ydM + n\int zdM = \int r^2dM,$$

wo man entweder m, oder n beliebig annehmen kann. Hierauf reicht es hin, dass jene vier Kräfte das Verhältniss der obigen Formeln einhalten, dass also

$$\text{die Kraft } Ee = \frac{\int (a-x) y dM}{ab}, \quad \text{die Kraft } Ff = \frac{\int xy dM}{ab},$$

$$\text{- - } Gg = \frac{\int (a-x) z dM}{ab}, \quad \text{- - } Hh = \frac{\int xz dM}{ab}$$

sei, wo $\frac{\int r^2 dM}{Vf} = b$ gesetzt ist. Bringt man diese vier Kräfte nach der vorgeschriebenen Weise am Körper an, so werden sie gar nicht auf die Axe einwirken.

Zusatz 1.

§. 391. Nimmt man an, dass die Ebene AOB durch den Mittelpunkt der Trägheit I gehe, so wird $\int z dM = 0$ und $KI = \frac{\int y dM}{M}$, wo M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet. Es wird demnach

$$\text{die Kraft } Ee = \frac{M.a.KI - \int xy dM}{ab}, \quad \text{die Kraft } Ff = \frac{\int xy dM}{ab},$$

$$\text{die Kraft } Gg = -\frac{\int xz dM}{ab}, \quad \text{die Kraft } Hh = \frac{\int xz dM}{ab}$$

und es müssen ihre Abstände von der Axe im allgemeinen so beschaffen sein, dass wir haben:

$$M.a.KI.OE + (AF - OE)\int xy dM + (AH - OG)\int xz dM = a\int r^2 dM.$$

Zusatz 2.

§. 392. Geht auch die Axe OA durch den Mittelpunkt der Trägheit I, ist also $KI = 0$, so haben wir

$$\text{die Kraft } Ee = -\frac{\int xy dM}{ab}, \quad \text{die Kraft } Ff = \frac{\int xy dM}{ab},$$

$$\text{- - } Gg = -\frac{\int xz dM}{ab}, \quad \text{- - } Hh = \frac{\int xz dM}{ab}$$

und es sind ihre Abstände von der Axe so beschaffen, dass wir haben:

$$(AF - OE)\int xy dM + (AH - OG)\int xz dM = a\int r^2 dM.$$

Zusatz 3.

§. 393. Wenn die Werthe der Integrale $\int xy dM$ und $\int xz dM$ verschwinden, so verschwinden auch die Kräfte und es müssen einige der Abstände unendlich gross sein. Statt einer in unendlicher Entfernung angebrachten verschwindenden Kraft kann

man aber zwei, in endlichen Entfernungen anzubringende Kräfte substituiren.

Anmerkung 1.

§. 394. Wir haben hier Kräfte erforscht, welche in zwei auf die Axe normalen Ebenen anzubringen sind, und von denen die Axe keine Einwirkung erleidet. Man kann aber auf unzählige Weise andere Kräfte, sowohl in denselben als andern Ebenen, darstellen, welche jenen gleichgeltend sind. So kann man statt der Kraft Ee die zwei Pp und $O\pi$ in parallelen Richtungen annehmen, dergestalt dass man hat

$$Pp = Ee + O\pi \text{ und } Ee.EP = O\pi.OP \text{ oder}$$

$$Ee = Pp - O\pi \text{ und } OE = \frac{OP.Pp}{Pp - O\pi}.$$

Legt man daher die Ebene AOB durch den Mittelpunkt der Trägheit I und führt man statt der Kraft Ee die Kräfte Pp und $O\pi$ ein, von denen die letztere unbestimmt bleibe; so verhalten sich die übrigen folgendermaassen. Es wird

$$\text{die Kraft } Pp = \text{der Kraft } O\pi + \frac{M.a.KI - \int xydM}{ab},$$

$$\text{die Kraft } Ff = \frac{\int xydM}{ab},$$

$$\text{die Kraft } Gg = -\frac{\int xzdM}{ab} \text{ und die Kraft } Hh = \frac{\int xzdM}{ab};$$

und

$$ab\,OP.O\pi + M.a.KI.OP - OP\int xydM + AF\int xydM + (AH - OG)\int xzdM = a\int r^2dM.$$

Führt man ausserdem auf ähnliche Weise statt der Kraft Ff die zwei Kräfte Rr und $A\varrho$ ein, so wird, weil $Ff = Rr - A\varrho$, $AF = \frac{AR.Rr}{Rr - A\varrho}$ und die Kraft $A\varrho$ unserer Willkühr überlassen bleibt:

$$\text{die Kraft } Pp = \text{der Kraft } O\pi + \frac{M.a.KI - \int xydM}{ab},$$

$$\text{- - } Rr = \text{ - - } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab},$$

$$\text{- - } Gg = -\frac{\int xzdM}{ab} \text{ und die Kraft } Hh = \frac{\int xzdM}{ab}.$$

Die Abstände werden sich alsdann so verhalten, dass wir haben:

$$\left.\begin{matrix} ab.OP.O\pi + M.a.KI.OP + (AR - OP)\int xydM \\ + ab.AR.A\varrho \qquad + (AH - OG)\int xzdM \end{matrix}\right\} = a\int r^2dM.$$

Führen wir endlich statt der Kraft Gg die zwei Kräfte Qq und $O\varphi$, ebenso statt der Kraft Hh die zwei Ss und $A\sigma$ ein, so wird, weil

$$Gg = Qq - O\varphi \text{ und } OG = \frac{OQ.Qq}{Qq - O\varphi},$$

$$Hh = Ss - A\sigma \text{ und } AH = \frac{AS.Ss}{Ss - A\sigma},$$

ganz allgemein:

die Kraft Pp = der Kraft $O\pi + \frac{M.a.KI - \int xydM}{ab}$,

- - Rr = - - $A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$,

- - Qq = - - $O\varphi - \frac{\int xzdM}{ab}$

und - - Ss = - - $A\sigma + \frac{\int xzdM}{ab}$.

Ihre Abstände von der Axe werden sich so verhalten, dass wir haben:

$$\left.\begin{array}{l} ab.OP.O\pi + M.a.KI.OP + (AR - OP)\int xydM \\ + ab.AR.A\varrho \\ + ab.OQ.O\varphi \\ + ab.AS.A\sigma \qquad\qquad + (AS - OQ)\int xzdM \end{array}\right\} = a\int r^2dM.$$

Wenn nun auch der Abstand KI nebst den Integralen $\int xydM$ und $\int xzdM$ verschwindet, so haben wir doch unzählige endliche Kräfte, welche in endlichen Abständen angebracht der Aufgabe Genüge leisten.

Anmerkung 2.

§. 395. In dieser allgemeinen Auflösung sind die vier Kräfte $O\pi$, $O\varphi$, $A\varrho$ und $A\sigma$ unserer Willkühr überlassen und es müssen dieselben in den Punkten O und A längs der Richtungen OB und OC angebracht werden. Ferner können die Abstände OP, OQ, AR und AS der vier übrigen Kräfte Pp, Qq, Rr und Ss von der Axe nach Belieben angenommen werden, wenn nur die Grösse ab so bestimmt wird, das wir haben:

$$ab = \frac{a\int r^2dM - M.a.KI.OP + (OP - AR)\int xydM + (OQ - AS)\int xzdM}{OP.O\pi + OQ.O\varphi + AR.A\varrho + AS.A\sigma}.$$

Ist dieser Werth gefunden, so werden die vier letztern Kräfte so bestimmt, dass wir haben:

die Kraft Pp = der Kraft $O\pi + \frac{M.a.KI - \int xydM}{ab}$,

- - Rr = - - $A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$,

- - Qq = - - $O\varphi - \frac{\int xzdM}{ab}$

und - - Ss = - - $A\sigma + \frac{\int xzdM}{ab}$.

Dieselben haben, in Bezug auf die erstern, entgegengesetzte Richtungen, wir nehmen jedoch an, dass sie alle Momente bilden, welche in demselben Sinne zu wirken streben. Das ganze aus ihnen allen hervorgehende Moment wird aber $=\frac{afr^2dM}{ab}$, diess haben wir oben (§. 390.) Vf genannt und es wird hierdurch der Anfang der Bewegung so bestimmt, dass im Zeittheilchen dt der Körper sich um einen Winkel $d\omega=\frac{gdt^2}{b}$ drehe (§. 380.). Man muss sich aber erinnern, dass hier a den Zwischenraum OA bezeichnet, ferner dass für jedes beliebige Element dM des Körpers die den Axen OA, OB und OC parallelen Coordinaten x, y und z sind, deren erstere x vom Punkt O an genommen wird. Ferner haben wir hier die Ebene AOB durch den Mittelpunkt der Trägheit I des Körpers gelegt, so dass OC normal auf jene Ebene ist.

Aufgabe 19.

§. 396. Ein starrer, um eine feste Axe beweglicher Körper wird durch beliebige Kräfte angetrieben und in Bewegung gesetzt; man soll die Kräfte bestimmen, welche der Zusammenhang des Körpers auszuhalten hat.

Auflösung.

Wir müssen hier die Kräfte finden, welche am Körper angebracht ihn zwar im Gleichgewicht erhalten, aber zugleich auf seinen Zusammenhang dieselbe Wirkung ausüben, welche derselbe bei Hervorbringung der Bewegung erleidet. Zuerst hat daher der Körper diejenigen Kräfte auszuhalten, durch welche er wirklich angetrieben wird, wobei man die Theile, woran sie einzeln unmittelbar angebracht sind, gehörig bezeichnen muss, weil nämlich jede beliebige Kraft nur ein einziges Theilchen des Körpers fortdrängt. Zweitens hat man aus den Momenten aller dieser Kräfte auf die elementaren Kräfte zu schliessen, welche in den einzelnen Elementen eine gleiche Bewegung hervorbringen würden; an diesen einzelnen Elementen denke man sich gleiche und entgegengesetzte Kräfte angebracht, an deren Stelle man aber nicht wie oben andere ihnen gleichgeltende substituiren darf, weil hierzu die Starrheit selbst erforderlich ist. Drittens füge man die Kräfte hinzu, durch welche die Axe wirklich in Ruhe erhalten wird, alsdann werden diese drei Reihen von Kräften den Körper in vollkommenem Gleich-

gewicht erhalten und zugleich werden sie auf den Zusammenhang der Theile durchaus dieselbe Wirkung ausüben, welche der Körper bei der Erzeugung der Bewegung erleidet.

Hieraus ersieht man, durch ein wie festes Band die einzelnen Theilchen des Körpers mit einander vereinigt sein müssen, damit keine Trennung derselben zu befürchten sei und nur wenn der Zusammenhang diesen Kräften hinreichend zu widerstehen vermag, wird man den Körper für einen starren zu halten haben.

Anmerkung.

§. 397. Wir haben hier nur unternommen, zu bestimmen, durch wie grosse Kräfte die einzelnen Theilchen des Körpers angetrieben werden und welche Kräfte die letztern von der Verbindung mit den übrigen Theilchen zu trennen streben. Auf welche Weise nämlich der Bau des Körpers dieser Wirkung widerstehe, haben wir hier nicht zu untersuchen, weil dieses Verhältniss der Starrheit für jede Art von Körpern ein besonderes ist. Uebrigens haben wir in diesem Kapitel nur den Anfang der Bewegung, welche einem starren, um eine feste Axe beweglichen Körper durch beliebige Kräfte beigebracht wird, betrachtet, damit man um so leichter die blosse Wirkung der Kräfte, von der den Körpern schon inwohnenden Bewegung getrennt, durchschaue. Besonders aber werden wir hieraus für die folgenden Untersuchungen Hülfsmittel entnehmen, wenn nämlich, während ein Körper sich um eine beliebige Axe dreht, Kräfte da sind, welche ihn um eine andere Axe zu drehen streben; man wird nämlich alsdann nach der augenblicklichen, um diese Axe hervorgebrachten Wirkung beurtheilen können, auf welche Weise die vorhergehende Bewegung gestört werde. Wir werden nun also einen starren Körper bei der Bewegung um eine feste Axe betrachten und erforschen, auf welche Weise diese Bewegung durch beliebige Kräfte geändert werden muss, nachdem wir bereits bewiesen haben, dass eben diese Bewegung, wenn keine antreibenden Kräfte da wären, gleichförmig sein würde. Ausserdem werden wir sorgfältig die Kräfte abzuwägen haben, welche die Drehungsaxe inzwischen auszuhalten hat.

Kapitel IV.

Von der durch beliebige Kräfte hervorgebrachten Störung der drehenden Bewegung.

Aufgabe 20.

§. 398. Ein starrer Körper dreht sich um eine feste Axe mit einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit; man soll die elementaren Kräfte bestimmen, durch welche in einem gegebenen Zeittheilchen die Winkelbewegung eine gegebene Beschleunigung erlangt.

Auflösung.

Es sei Ω die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher, wenn die drehende Bewegung eine gleichförmige wäre, in den einzelnen Secunden ein Winkel $= \Omega$ beschrieben werden würde; alsdann soll die Bewegung eine so grosse Beschleunigung erhalten, dass nach Verlauf des Zeittheilchens dt die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega + d\Omega$ werde. Man betrachte nun ein beliebiges Element dM des Körpers, dessen Abstand von der Drehungsaxe $= r$, Geschwindigkeit also $= r\Omega$ sei; alsdann soll dieselbe, da der Abstand r für dasselbe Element constant bleibt, im Zeittheilchen dt einen Zuwachs $= rd\Omega$ erhalten. Zu diesem Ende ist es nothwendig, dass die kleine Masse dM in der Richtung der Bewegung durch irgend eine Kraft angetrieben werde und setzen wir diese $= p$; so wird nach den oben aufgestellten Principien der Bewegung (§. 202.)

$$rd\Omega = \frac{2gpdt}{dM},$$

woraus die an diesem Elemente anzubringende Kraft $p = \frac{rdM}{2g} \cdot \frac{d\Omega}{dt}$

folgt. Es müssen daher die einzelnen Elemente des Körpers in der Richtung ihrer Bewegung durch Kräfte $= \frac{d\Omega}{2gdt} \cdot rdM$ angetrieben werden, wo dM die Masse eines jeden Elementes und r seinen Abstand von der Axe ausdrückt. Dieses sind die elementaren Kräfte, welche die einzelnen Elemente des Körpers antreiben und die drehende Bewegung so beschleunigen, dass die Winkelgeschwindigkeit Ω im Zeittheilchen dt um $d\Omega$ zunehme.

Zusatz 1.

§. 399. Da $\frac{d\Omega}{2gdt}$ für alle Elemente des Körpers denselben Werth beibehält, so stehen die elementaren Kräfte im zusammengesetzten Verhältniss der Massen und ihrer Abstände von der Drehungsaxe. Man hat sich aber diese einzelnen Kräfte an den einzelnen Elementen, nach der Richtung ihrer Bewegung, angebracht zu denken.

Zusatz 2.

§. 400. Da keine von diesen Kräften die übrigen verhindert, ihre volle Wirkung eben so hervorzubringen, als ob die einzelnen Theilchen von einander getrennt wären, so wird von diesen elementaren Kräften weder der Zusammenhang des Körpers, noch die Drehungsaxe afficirt.

Zusatz 3.

§. 401. Der Zusammenhang der Theile und die Drehungsaxe haben daher keine andern Kräfte auszuhalten, als die aus der drehenden Bewegung entspringenden und diese werden sich in diesem Zeittheilchen eben so verhalten, als ob die drehende Bewegung gleichförmig wäre.

Anmerkung.

§. 402. Wenn aber auch die elementaren Kräfte an sich auf die Drehungsaxe nicht einwirken, sondern gleichsam ganz dazu verwandt werden, die Bewegung der einzelnen Elemente zu beschleunigen; so werden doch in so fern, als durch sie die drehende Bewegung beschleunigt und so die Centrifugalkraft vergrössert wird, die Kräfte, welche die Axe auszuhalten hat, ebenfalls grösser. Diese Wirkung ist aber im ersten Augenblick unendlich klein und es wird die Axe nicht anders afficirt, als wenn die drehende Bewegung gleichförmig wäre. Da nämlich

die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ ist, so strebt jedes Theilchen, dessen Masse $= dM$ und Abstand von der Axe $= r$ ist, von der letztern mit einer Kraft $= \frac{\Omega^2 r dM}{2g}$ zurückzuweichen. Durch alle diese Kräfte zusammengenommen erleidet aber die Axe OA nach §. 338. eine solche Einwirkung, dass, wenn man die zwei auf einander und auf OA normalen Axen OB und OC zu Hülfe nimmt und ihnen parallel, zur Bestimmung des in Z befindlichen Elements dM, die Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ angenommen werden, alsdann die Axe in den zwei Punkten E und F die zwei Kräfte Ee und Ff auszuhalten hat. Von den letztern ist $Ee \# OB$ und $Ff \# OC$ und zwar haben wir

$$OE = \frac{\int xydM}{\int ydM} \text{ und die Kraft } Ee = \frac{\Omega^2}{2g}\int ydM,$$

$$OF = \frac{\int xzdM}{\int zdM} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad Ff = \frac{\Omega^2}{2g}\int zdM.$$

Statt derselben kann man sich in den zwei gegebenen Punkten O und A je zwei gleichgeltende Kräfte Ob, Oc und $A\beta$, $A\gamma$ angebracht denken und es werden diese, wenn man den Abstand $OA = a$ setzt, nach §. 343. folgende Werthe haben:

$$Ob = \frac{\Omega^2}{2ag}\left\{a\int ydM - \int xydM\right\}, \quad A\beta = \frac{\Omega^2}{2ag}\int xydM$$

$$Oc = \frac{\Omega^2}{2ag}\left\{a\int zdM - \int xzdM\right\}, \quad A\gamma = \frac{\Omega^2}{2ag}\int xzdM.$$

Aus diesen Formeln schliesst man, wie grosse Kräfte die Axe in Folge der drehenden Bewegung allein auszuhalten hat.

Aufgabe 21.

§. 403. Während ein starrer Körper sich um eine feste Axe dreht, werden seine einzelnen Theilchen in der Richtung ihrer Bewegung durch Kräfte angetrieben, welche im zusammengesetzten Verhältniss der Massen und der Abstände von der Axe stehen; man soll das Increment der Winkelgeschwindigkeit bestimmen, welches in einem gegebenen Zeittheilchen hervorgebracht wird.

Auflösung.

Man setze die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper sich jetzt dreht, $= \Omega$ und betrachte ein beliebiges Theilchen des Körpers, dessen Masse $= dM$ und Abstand von der Axe $= r$ sei. Dieses Theilchen wird daher nach der

Richtung seiner Bewegung durch eine Kraft, welche rdM proportional ist, angetrieben und man setze sie daher $= \frac{rdM}{h}$, wo h eine in diesem Augenblick für alle Elemente des Körpers gemeinschaftliche Linie ist. Da nun die Geschwindigkeit dieses Elementes $= r\Omega$ und für dieselbe r eine constante Grösse ist; so würde, wenn dieses Element sich ausser Verbindung mit den übrigen befände,

$$rd\Omega = 2g\frac{rdM}{h}\,dt : dM = \frac{2grdt}{h} \text{ (§. 202)}$$

das im Zeittheilchen dt hervorgebrachte Increment der Geschwindigkeit sein. Hieraus erhält man daher zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit Ω die Gleichung

$$d\Omega = \frac{2gdt}{h};$$

da also aus allen Elementen dieselbe Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit entspringt, so werden diese einander keinesweges hinderlich sein, sondern einzeln ihre Beschleunigung eben so annehmen, als ob sie von einander getrennt wären. Durch diese Kräfte, welche mit den in der vorhergehenden Aufgabe bestimmten elementaren übereinkommen, wird daher die drehende Bewegung des starren Körpers so beschleunigt, dass im Zeittheilchen dt die Winkelgeschwindigkeit Ω das Increment

$$d\Omega = \frac{2gdt}{h}$$

erhält.

Zusatz 1.

§. 404. Das Increment $d\Omega$ der Winkelgeschwindigkeit hängt demnach nicht von der letztern oder Ω ab und es mag diese grösser oder kleiner sein, so erlangt sie durch dieselben Kräfte in demselben Zeittheilchen dasselbe Increment.

Zusatz 2.

§. 405. Da eine jede elementare Kraft $\frac{rdM}{h}$ auf den Abstand r von der Axe und in einer auf diese normalen Ebene normal ist, so ist ihr Moment in Bezug auf die Axe $= \frac{r^2dM}{h}$, also die Summe aller Momente

$$= \frac{1}{h}\int r^2.dM.$$

Zusatz 3.

§. 406. Wenn der Körper ausser durch diese elementaren Kräfte, durch andere im entgegengesetzten Sinne angetrieben würde und das Moment der letztern in Bezug auf die Axe ebenfalls $= \frac{1}{h} \int r^2 dM$ wäre, so würde durch diese die Wirkung jener aufgehoben werden und die Bewegung keine Beschleunigung annehmen.

Anmerkung.

§. 407. In Betreff dieser Kräfte, welche ich elementare nenne, weil sie in den einzelnen Elementen die Aenderung des Zustandes, welche diese erleiden, hervorbringen, hat man besonders zu bemerken, dass durch sie die Axe keine Einwirkung zu erleiden hat. Diess ist der Fall, weil die einzelnen Elemente von ihnen eben so afficirt werden, als ob sie von einander getrennt wären. Obgleich aber derartige Kräfte kaum in der Welt existiren, mussten wir doch von ihnen ausgehen, damit wir die Wirkungen beliebiger anderer Kräfte hinsichtlich der Störung der drehenden Bewegung bestimmen können. Haben nämlich beliebige andere Kräfte in Bezug auf die Drehungsaxe ein gleiches Moment, so müssen sie auch dieselbe Beschleunigung der Bewegung hervorbringen; weil sie, wenn sie in entgegengesetzter Weise angebracht wären, mit den elementaren Kräften im Gleichgewicht stehen würden. Diese Uebereinstimmung hat man aber nur in Betreff der Veränderung der Bewegung zu verstehen, denn ganz anders wird sich die Sache verhalten, wenn wir die Kräfte bestimmen sollen, welche die Drehungsaxe auszuhalten hat. Aber auch diese Bestimmung wird vermittelst der elementaren Kräfte leicht ausgeführt, wie wir bereits im vorhergehenden Kapitel gezeigt haben.

Aufgabe 22.

§. 408. Ein starrer Körper wird, während er sich um eine feste Axe dreht, durch beliebige Kräfte angetrieben; man soll die augenblickliche Veränderung bestimmen, welche sie in der drehenden Bewegung hervorbringen.

Auflösung.

Es sei wie bisher Ω die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper sich dreht; alsdann suche man die Momente der einzelnen antreibenden Kräfte, welche vereinigt die Summe $= Vf$ ergeben und welche letztere dahin streben wird, die

drehende Bewegung zu beschleunigen oder zu verzögern, je nachdem sie in demselben oder dem entgegengesetzten Sinne gerichtet ist. Wir nehmen an, dass dieses Moment nach Beschleunigung strebe, weil, wenn das Gegentheil stattfände, jenes als negativ angesehen werden könnte. Es ist demnach die Frage, ein wie grosses Increment die Winkelgeschwindigkeit Ω im Zeittheilchen dt empfangen werde. Es wird nun aber elementare Kräfte geben, welche ein gleiches Increment hervorbringen würden. Es sei demnach für ein Element dM, welches im Abstande r von der Axe liegt, die elementare Kraft $= \frac{rdM}{h}$, ihr Moment $= \frac{r^2 dM}{h}$; alsdann wird die Wirkung dieser Kräfte in Bezug auf die Störung der drehenden Bewegung jener Wirkung, welche das Moment Vf hervorbringt, gleich sein, wenn die Summe aller jener Momente $\frac{1}{h}\int r^2.dM$ gleich dem Moment Vf, also

$$h = \frac{\int r^2 dM}{Vf}$$

ist. Aus den elementaren Kräften $\frac{rdM}{h}$ entspringt aber im Zeittheilchen dt die Beschleunigung der drehenden Bewegung $d\Omega = \frac{2gdt}{h}$ (§. 403.); wenn wir daher den eben gefundenen Werth von h substituiren, so erhalten wir das Increment der Winkelgeschwindigkeit Ω, welches durch das Moment der Kräfte Vf im Zeittheilchen dt hervorgebracht wird, oder

$$d\Omega = \frac{2Vfgdt}{\int r^2.dM}.$$

Hier ist $\int r^2.dM$ eine constante, von der Gestalt und Natur des Körpers abhängige Grösse.

Zusatz 1.

§. 409. Das Increment $d\Omega$ der Winkelgeschwindigkeit ist daher proportional direct dem Moment Vf der antreibenden Kräfte und dem Zeittheilchen dt, indirect aber der Grösse, welche entsteht, indem man die einzelnen Elemente des Körpers durch die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe multiplicirt und diese Producte in eine Summe vereinigt.

Zusatz 2.

§. 410. Hat der Körper bis jetzt bei seiner drehenden

Bewegung den Winkel φ beschrieben, so ist nun $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit Ω und daher, wenn man das Zeitelement dt constant annimmt,

$$dd\varphi = \frac{2Vfgdt^2}{\int r^2 dM}.$$

Zusatz 3.

§. 411. Wollen wir aber statt des Zeittheilchens dt den elementaren Winkel $d\varphi$ in die Rechnung einführen, so erhalten wir, weil $dt = \frac{d\varphi}{\Omega}$ ist, die Formel

$$\Omega d\Omega = \frac{2Vfgd\varphi}{\int r^2 dM},$$

durch welche das Increment des Quadrats der Geschwindigkeit bestimmt wird.

Anmerkung.

§. 412. Wenn wir daher zu jeder Zeit die Kräfte kennten, durch welche ein Körper angetrieben wird und ihr Moment nach Verlauf der Zeit t gleich Vf wäre, so würden wir vermittelst der gefundenen Formel, indem wir sie integrirten, die ganze drehende Bewegung bestimmen können. Hierbei muss man aber bemerken, dass, wenn keine Kräfte da sind oder dieselben kein Moment in Bezug auf die Drehungsaxe bilden, die Bewegung eine gleichförmige sein wird, während die Axe diese ganzen Kräfte auszuhalten hat. Die Aenderung der Bewegung hängt nämlich nur von dem Momente der Kräfte ab und ist ihm selbst proportional; nun wollen wir aber sehen, wie grosse Kräfte die Axe selbst auszuhalten hat, während die Bewegung des Körpers durch beliebige Kräfte gestört wird. Diese Untersuchung lässt sich nach dem, was wir in dem vorhergehenden Kapitel auseinander gesetzt haben, leicht anstellen. Beispiele einer solchen, durch Kräfte gestörten, drehenden Bewegung werden wir aber unten anführen, wo wir annehmen, dass die Körper durch die Schwere angetrieben werden.

Aufgabe 23.

§. 413. (Figur 47.) Ein starrer Körper wird, während er sich um eine feste Axe dreht, durch beliebige Kräfte angetrieben; man soll die Kräfte bestimmen, welche die Axe in zwei gegebenen Punkten O und A auszuhalten hat und denen sie widerstehen muss, damit sie nicht wanke.

Auflösung.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dass die Axe Kräfte dreifacher Art auszuhalten habe, nämlich erstens die Kräfte, durch welche der Körper wirklich angetrieben wird; zweitens die Kräfte, welche den dasselbe Moment hervorbringenden elementaren Kräften gleich und entgegengesetzt sind; drittens die aus der drehenden Bewegung entspringenden Centrifugalkräfte. Diese dreifachen Kräfte müssen wir also auf die zwei gegebenen Punkte O und A zurückführen.

Was die den Körper wirklich antreibenden Kräfte betrifft, so wird eine jede, wenn nicht ihre Richtung in einer auf die Axe normalen Ebene liegt, in zwei VQ und Vv zerlegt, von denen die erste der Axe OA parallel ist, die zweite in einer auf die Axe normalen und diese in T schneidenden Ebene liegt. In Folge der Kraft VQ hat nun zuerst die Axe eine ihr gleiche Kraft längs OA auszuhalten, ausserdem aber in O und A die auf OA normalen Kräfte Op und Aq in der Ebene $OAQP$. Die erstere Op ist PQ zu-, die andere Aq abgewandt, diese beiden Kräfte sind aber einander gleich und zwar

$$Op = Aq = \frac{VT}{OA} \times \text{Kraft } VQ \text{ (§. 372.).}$$

Ferner ergibt die Kraft Vv für die Punkte O und A die ihr parallelen Kräfte Or und As, und zwar wird

$$Or = \frac{AT}{OA} \cdot Vv \text{ und } As = \frac{OT}{OA} \cdot Vv \text{ (§. 370.).}$$

Auf diese Weise reducire man die einzelnen Kräfte, welche den Körper antreiben, auf die Axe und ihre Endpunkte O und A.

(Figur 48.) Für die Kräfte der zweiten Art, welche den elementaren entgegengesetzt sind, nehmen wir nach §. 385. in O zwei auf einander und auf OA normale Axen OB und OC an, setzen ihnen in A die Linien AE und AF parallel und zur Bestimmung des in Z gelegenen Elements dM die Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$, so dass sein Abstand von der Axe oder $XZ = r = \sqrt{y^2 + z^2}$ wird. Ferner sei das Moment aller Kräfte $= Vf$ und habe eine Richtung im Sinne $Z\zeta$. Wir haben gesehen, dass hieraus für beide Endpunkte O und A je zwei Kräfte entspringen, nämlich wenn wir den Abstand $OA = a$ setzen, für den Endpunkt O

$$\text{längs } OB \text{ die Kraft} = \frac{Vf\int(a-x)z\,dM}{a\int r^2 dM},$$

$$\text{" } Oc \text{ " " } = \frac{Vf\int(a-x)y\,dM}{a\int r^2 dM}$$

und für den andern Endpunkt A

$$\text{längs } AE \text{ die Kraft} = \frac{V\int\int xzdM}{a\int r^2dM},$$

$$\text{- } Af \text{ - - } = \frac{V\int\int xydM}{a\int r^2dM},$$

wo Oc und Af die Verlängerungen der Linien OC und AF nach der entgegengesetzten Seite sind.

Was die Kräfte der dritten Art, welche aus der drehenden Bewegung selbst entspringen, betrifft; so haben wir vorhin im §. 402. gesehen, was für Kräfte sich aus ihnen für die beiden Endpunkte O und A ergeben. Wenn nämlich die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ ist und die eben angewandten Bezeichnungen beibehalten werden, so haben wir für den Endpunkt O:

$$\text{längs } OB \text{ die Kraft} = \frac{\Omega^2\int(a-x)ydM}{2ag},$$

$$\text{- } OC \text{ - - } = \frac{\Omega^2\int(a-x)zdM}{2ag}$$

und auf ähnliche Weise für den andern Endpunkt A

$$\text{längs } AE \text{ die Kraft} = \frac{\Omega^2\int xydM}{2ag},$$

$$\text{- } AF \text{ - - } = \frac{\Omega^2\int xzdM}{2ag}.$$

Nimmt man daher alle diese Kräfte für beide Endpunkte O und A zusammen, so erhält man diejenigen, welche die Axe in diesen Punkten auszuhalten hat.

Zusatz 1.

§. 414. Weil die Kräfte der dritten Art das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit enthalten, bleiben sie dieselben, mag nun Ω positiv oder negativ sein, d. h. mag die Bewegung durch die antreibenden Kräfte beschleunigt oder verzögert werden.

Zusatz 2.

§. 415. Alle Kräfte, welche beide Endpunkte der Axe antreiben, lassen sich, wie viel ihrer auch sein mögen, leicht auf Eine zurückführen, so dass jeder der beiden Endpunkte nur durch eine einzige Kraft angetrieben wird. Um die Axe festzuhalten, muss sie in diesen Endpunkten durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte unterstützt werden.

Zusatz 3.

§. 416. Nimmt man die Ebene AOB so an, dass sie

durch das Centrum der Trägheit des Körpers I geht, so wird $\int z dM = 0$ und $\int y dM = M.GI$, wo M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet; hierdurch werden die obigen Formeln etwas einfacher.

Anmerkung.

§. 417. Die Grundlage dieser Auflösung ist in dem Obigen schon überflüssig erläutert, wesshalb ich weniger sorgfältig die einzelnen Verhältnisse angeführt habe. Da nämlich, wenn der Körper nur durch elementare Kräfte angetrieben wird, die Axe keine Einwirkung erleidet, sondern nur die Centrifugalkräfte auszuhalten hat; so wird die Axe, wenn beliebige andere Kräfte sie antreiben, von diesen zuerst dieselbe Einwirkung erleiden, als ob der Körper sich in Ruhe befände und sie wird daher eben die Kräfte auszuhalten haben, welche wir schon im vorhergehenden Kapitel bestimmt haben. Ausserdem aber erleidet sie, in Folge der Centrifugalkräfte, die Einwirkung derjenigen Kräfte, welche ich hier unter der dritten Art umfasst habe, so dass diese Aufgabe nur darin von der 17. abweicht, dass hier ausserdem die Kräfte der dritten Art hinzugefügt werden müssen.

Aufgabe 24.

§. 418. Wird ein starrer Körper, während er sich um eine feste Axe dreht, durch beliebige Kräfte angetrieben, so soll man die Kräfte bestimmen, welche der Zusammenhang des ganzen Körpers auszuhalten hat.

Auflösung.

Es ist demnach die Frage, durch welche Kräfte der Körper, wenn er sich in Ruhe befände, angetrieben werden müsste, damit sein Zusammenhang dieselbe Einwirkung erlitte, als in dem hier betrachteten Zustande der Bewegung. Zuerst sind daher an dem Körper dieselben Kräfte anzubringen, durch welche er wirklich angetrieben wird und auch in denselben Punkten, weil hier die Hauptsache auf den Orten, an denen alle Kräfte angebracht sind, beruht. Zweitens muss man an den einzelnen Elementen des Körpers Kräfte anbringen, welche den elementaren gleich und entgegengesetzt sind. Wenn nämlich das Moment aller Kräfte zur Beschleunigung der Bewegung $= Vf$ ist, so denke man sich an dem, im Abstande r von der Axe befindlichen, Elemente dM und in einer seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung eine Kraft $= \frac{VfrdM}{\int r^2 dM}$

angebracht (§. 374.) Ist drittens die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$, so denke man sich wegen der drehenden Bewegung an jenem Elemente auch die Kraft $\frac{\Omega^2 r dM}{2g}$ (§. 402.) angebracht, durch welche es direct von der Axe entfernt wird. Viertens bringe man an der Axe eben die Kräfte an, welche zu ihrer Unterstützung erforderlich und in der vorhergehenden Aufgabe angegeben worden sind. Alle diese Kräfte zusammen am Körper angebracht werden sich wechselweise im Gleichgewicht erhalten und seine einzelnen Theile eben so antreiben, wie diess bei der vorausgesetzten Bewegung geschieht. Hieraus wird man daher schliessen können, wie fest alle Elemente des Körpers unter sich zusammenhängen müssen, damit durch jene Kräfte keine Auflösung oder Trennung hervorgebracht werde, sondern der Körper seine Figur unversehrt beibehalte.

Zusatz 1.

§. 419. Ist die Verbindung der Theile zu schwach, um der Wirksamkeit dieser eben bestimmten Kräfte zu widerstehen, so wird man den Körper, weil seine Figur wirklich eine Aenderung erleidet, in Bezug auf die Bewegung für einen nicht starren halten müssen.

Zusatz 2.

§. 420. Wir nehmen daher beständig an, dass alle Theilchen des Körpers so fest mit einander verbunden sind, dass sie die erwähnten Kräfte ohne irgend eine Auflösung oder Aenderung der Figur auszuhalten vermögen.

Anmerkung.

§. 421. Diess sind die vorzüglichsten Kapitel, auf welche wir alle Fragen über die drehende Bewegung starrer Körper um eine feste Axe, wenn erstere durch beliebige Kräfte gestört wird, zurückführen können. Ausser der Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung selbst haben wir nämlich bestimmt, wie grosse Kräfte so wohl die Drehungsaxe als auch der Zusammenhang des Körpers auszuhalten habe. Die Formeln, welche wir zu diesen Bestimmungen gefunden haben, enthalten aber gewisse Integrale, nämlich $\int y dM$, $\int z dM$, $\int xy dM$, $\int xz dM$ und $\int r^2 dM$, die man nicht als veränderliche oder unbestimmte Grössen anzusehen hat; man muss vielmehr diese Integrale als über die ganze Masse des Körpers ausgedehnt

betrachten, so dass sie constante und bestimmte, von der Natur und Form eines jeden Körpers abhängige Werthe enthalten. Wir haben ferner gesehen, dass die Werthe der beiden ersten Integrale durch die Lage des Mittelpunktes der Trägheit bestimmt werden; die Werthe der übrigen müssen, der Natur des Körpers entsprechend, nach den bekannten Regeln der Integration ermittelt werden. Das letzte Integral ist insbesondere bemerkenswerth, da dasselbe allein bei der Bestimmung der Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung eintritt, während die übrigen sich nur in den Ausdrücken befinden, welche die von der Axe auszuhaltenden Kräfte angeben. Da nun hier die Frage in Betreff der Störung der Bewegung die vorzüglichste ist, so wird es der Mühe werth sein, die Formel $\int r^2 dM$ für verschiedene Arten von Körpern zu entwickeln und die Vorschriften anzugeben, nach welchen man dieselbe in jedem beliebigen Falle leichter bestimmen kann. Es verdient aber diese Formel allerdings, dass wir ihr eine besondere Benennung, nämlich die des Moments der Trägheit beilegen und der Bestimmung desselben werden wir das folgende Kapitel widmen.

Kapitel V.

Von dem Momente der Trägheit.

Erklärung 7.

§. 422. Das Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine beliebige Axe ist die Summe aller Producte, welche entstehen, indem man die einzelnen Elemente des Körpers durch die Quadrate ihrer Abstände von der Axe multiplicirt.

Zusatz 1.

§. 423. Da so wohl die Elemente des Körpers, als auch die Quadrate ihrer Abstände immer positiv sind, müssen es nothwendig auch alle diese Producte sein; demnach wird durch die Vermehrung der Masse eines Körpers nothwendig auch sein Moment der Trägheit vergrössert.

Zusatz 2.

§. 424. Das Moment der Trägheit kann man daher ansehen als das Product der Masse eines Körpers in das Quadrat irgend einer Linie; wenn also die Masse eines Körpers $= M$ ist, wird sein Moment in Bezug auf eine jede Axe eine Form von der Art Mk^2 haben.

Zusatz 3.

§. 425. Hat man daher das Moment der Trägheit eines Körpers in Bezug auf eine Axe, um welche er sich nach unserer vorigen Annahme dreht, gefunden und ist dasselbe $= Mk^2$; so ist es angemessen, in den oben gefundenen Formeln statt des Ausdrucks $\int r^2 dM$ zu schreiben Mk^2. Wenn da-

her das Moment der antreibenden Kräfte $= Vf$ und die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ ist, so haben wir

$$d\Omega = \frac{2Vfgdt}{Mk^2}.$$

Erläuterung.

§. 426. Der Grund dieser Benennung ist der Aehnlichkeit mit der fortschreitenden Bewegung entnommen, so wie nämlich bei dieser, wenn dieselbe durch eine längs ihrer Richtung antreibende Kraft beschleunigt wird, das Increment der Geschwindigkeit der antreibenden Kraft, dividirt durch die Masse oder Trägheit, proportional ist; müssen wir bei der drehenden Bewegung statt der antreibenden Kraft selbst ihr Moment betrachten und nennen den Ausdruck $\int r^2 dM$, welcher statt der Trägheit in die Rechnung eintritt, das Moment der Trägheit, damit das Increment der Winkelgeschwindigkeit auf ähnliche Weise dem Momente der antreibenden Kraft, dividirt durch das Moment der Trägheit, proportional werde. Diese Aehnlichkeit ist um so vollkommener, als wir in beiden Fällen durch das Zeitelement dt und die doppelte Linie $2g$ multipliciren müssen, um einen Ausdruck für das Increment der Geschwindigkeit zu erhalten.

Anmerkung.

§. 427. Da man denselben Körper auf unzählige Axen beziehen kann, wird er in Bezug auf jede beliebige ein besonderes Moment der Trägheit haben, wesshalb man dasselbe absolut nur dann bestimmen kann, wenn man es auf eine bestimmte Axe bezieht. Inzwischen ist es nicht immer nöthig, wenn man das Moment der Trägheit desselben Körpers nach und nach in Bezug auf mehrere Axen bestimmen soll, die Rechnung von neuem nach der Formel $\int r^2 dM$ anzustellen; sondern es trifft sich oft, dass, wenn man das Moment der Trägheit in Bezug auf Eine Axe gefunden hat, man hieraus leicht auf die Momente der Trägheit desselben Körpers in Bezug auf andere unzählige Axen schliessen kann. Diese Bequemlichkeit findet besonders alsdann statt, wenn die Axen einander parallel sind, so dass, wenn das Moment der Trägheit für die eine Axe bekannt ist, man hierdurch leicht das Moment für jede andere ihr parallele Axe angeben kann; diess wollen wir in der folgenden Aufgabe zeigen.

Aufgabe 25.

§. 428. (Fig. 49.) Gegeben ist das Moment der Trägheit eines gewissen Körpers in Bezug auf die Axe OA; man soll sein Moment der Trägheit in Bezug auf eine andere, ihr parallele Axe oa finden.

Auflösung.

Es sei $Oo = c$ der gegenseitige Abstand dieser Axen, in ihrer Ebene nehme man die Axe OB normal auf OA und eine dritte OC normal auf jene beiden an. Man betrachte ein beliebiges Element des Körpers, welches sich in Z befindet, seine Masse sei $= dM$, die des ganzen Körpers $= M$, fälle von Z auf die Ebene AOB das Perpendikel ZY und von Y auf OA das Perpendikel YX und es treffe das letztere verlängert die Axe oa in x. Man setze für die gegebene Axe OA die Coordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$. Da nun in Bezug auf diese Axe das Moment der Trägheit gegeben ist, so sei dasselbe $= Mk^2$ und es wird alsdann

$$\int(y^2 + z^2)\, dM = M.k^2.$$

Für die neue Axe oa wird nun, weil $ox = x$, $xY = c + y$ und $YZ = z$ ist, das Moment der Trägheit sein

$$= \int[(c+y)^2 + z^2]dM = \int c^2 dM + 2\int cy dM + \int(y^2+z^2)dM.$$

Da nun $\int(y^2+z^2)dM = M.k^2$ und $\int c^2 dM = M.c^2$ ist, so ziehe man zur Bestimmung des Gliedes $2\int cy dM = 2c\int y dM$ den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers in Betracht, es befinde sich derselbe in I. Fällt man von hier auf die Ebene der Axen das Perpendikel IK und aus K auf die Axen die Normale KGg, so wird $\int y dM = M.GK$. Hiernach erhalten wir das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe oa

$$= M.k^2 + M.c^2 + 2Mc.GK,$$

und es wird dasselbe, weil $Gg = c$ und $c^2 + 2c.GK = gK^2 - GK^2$ ist, auch ausgedrückt durch

$$M.k^2 + M.gK^2 - M.GK^2.$$

Kennt man daher das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe $OA = M.k^2$, so findet man leicht das Moment in Bezug auf jede andere, ihr parallele Axe oa.

Zusatz 1.

§. 429. Ist die Axe oa weiter vom Mittelpunkte der Trägheit I entfernt, als die Axe OA, so ist auch das Moment der Trägheit in Bezug auf jene grösser, als in Bezug auf diese.

Es ist nämlich das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe *oa* $= M.k^2 + M.gI^2 - M.GI^2$.

Zusatz 2.

§. 430. Denkt man sich daher unzählige einander parallele Axen, so wird das Moment der Trägheit am kleinsten sein in Bezug auf diejenige Axe, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit selbst gezogen ist. Befände sich nämlich der Mittelpunkt der Trägheit in G und ginge die Axe OA durch denselben, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit $= M.k^2$ ist; so würde in Bezug auf die Axe *oa* das Moment der Trägheit

$$= M.k^2 + M.Gg^2$$

sein.

Zusatz 3.

§. 431. Ist daher das Moment der Trägheit $M.k^2$ in Bezug auf irgend eine, durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gehende, Axe gegeben, so übertrifft das Moment in Bezug auf jede andere, jener parallele Axe das erstere um das Produkt der Masse in das Quadrat des Abstandes dieser Axe vom Mittelpunkte der Trägheit.

Anmerkung.

§. 432. Hiernach wird die Erforschung der Momente der Trägheit für jeden Körper nur an die Axen gebunden, welche durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gezogen sind und hat man in Bezug auf diese die Momente der Trägheit bestimmt, so wird man daraus leicht auf die Momente in Bezug auf andere beliebige Axen schliessen können. Diese Eigenschaft des Mittelpunktes der Trägheit, dass die Momente der Trägheit in Bezug auf die durch ihn gezogenen Axen die kleinsten sind unter allen, in Bezug auf andere ihnen parallele Axen angenommenen, Momenten, ist sehr merkwürdig, da sie auch in Betreff der drehenden Bewegung den ausgezeichneten Vorzug dieses Mittelpunktes klar macht. Man kann aber durch diesen Punkt unzählige Axen ziehen, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit von einander sehr verschieden sein werden und es ist nicht klar, auf welche Weise man durch einige von ihnen, welche gegeben sind, die übrigen bestimmen könne. Da indessen keines derselben weder verschwinden, noch ins Unendliche wachsen kann, so muss es nothwendig so wohl ein grösstes, als ein kleinstes Moment geben und dieses durch eine sorgfältigere Untersuchung zu bestimmen, scheint durchaus würdig zu sein. Damit diess leichter geschehen könne,

wird es angemessen sein, die Momente der Trägheit in Bezug auf jede beliebige, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe zu bestimmen.

Aufgabe 26.

§. 433. Die Natur eines Körpers ist durch eine Gleichung zwischen je drei Coordinaten ausgedrückt; man soll sein Moment der Trägheit in Bezug auf eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gezogene, Axe bestimmen.

Auflösung.

(Fig. 50.) Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers, in welchem zugleich die drei unter sich normalen Axen IA, IB und IC zusammentreffen, den letztern parallel sind die Coordinaten des beliebigen in Z gelegenen Elements dM des Körpers, $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ angenommen. Nähme man nun eine der Coordinatenaxen als Drehungsaxe an, so würde in Bezug auf sie das Moment der Trägheit leicht angegeben werden. Es sei nun aber dasselbe zu bestimmen in Bezug auf eine beliebige Axe IG, durch welche eine auf AIB normale Ebene gelegt ist, die erstere längs der geraden Linie IF schneidet, und man setze den Winkel $AIF = \eta$ und $FIG = \theta$; alsdann kommt daher die Frage darauf hinaus, den Punkt Z durch drei andere Coordinaten zu bestimmen, deren eine auf der Axe IG selbst angenommen wird. Verändern wir die drei Coordinaten zuerst so, dass die eine IF sei, während IC unverändert bleibt und die dritte auf diesen beiden normal stehe, zieht man dann YX' normal auf IF; so werden die drei Coordinaten

$IX' = x' = x\cos\eta + y\sin\eta$, $X'Y = y' = y\cos\eta - x\sin\eta$ und $YZ = z' = z$.

Auf ähnliche Weise geschieht der Uebergang von diesen zu den drei neuen Coordinaten x'', y'' und z'', von denen x'' auf der Axe IG angenommen werde; es wird alsdann

$$x'' = x'\cos\theta + z'\sin\theta,\quad z'' = z'\cos\theta - x'\sin\theta \text{ und } y'' = y'.$$

Substituirt man nun die vorhergehenden Werthe, so erhält man

$$x'' = x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta,$$
$$y'' = y\cos\eta - x\sin\eta \text{ und}$$
$$z'' = z\cos\theta - x\cos\eta\sin\theta - y\sin\eta\sin\theta.$$

Das Quadrat des Abstandes des Punktes Z von der Axe IG wird demnach

$$= y''^2 + z''^2 = x^2\sin\eta^2 + y^2\cos\eta^2$$

$+z^2\cos\theta^2 - 2xy\sin\eta\cos\eta - 2xz\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2yz\sin\eta\sin\theta\cos\theta$
$+x^2\cos\eta^2\sin\theta^2 + y^2\sin\eta^2\sin\theta^2 + 2xy\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2$.

Setzen wir nun die folgenden, über den ganzen Körper sich erstreckenden, Integrale:

$$\int x^2 dM = A,\ \int y^2 dM = B,\ \int z^2 dM = C,\ \int xy dM = D,\ \int xz dM = E$$
$$\text{und } \int yz dM = F;$$

so wird das gesuchte Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe $IG = A[\sin\eta^2 + \cos\eta^2\sin\theta^2] + B[\cos\eta^2 + \sin\eta^2\sin\theta^2]$
$+C\cos\theta^2 - 2D\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta$.

Zusatz 1.

§. 434. Hier sind die Grössen A, B und C nothwendig positiv, die übrigen D, E und F können aber nach Verhältniss des Körpers positiv oder negativ sein.

Zusatz 2.

§. 435. Das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IA ist $= B + C$, in Bezug auf die Axe $IB = A + C$ und in Bezug auf die Axe $IC = A + B$; kennt man daher diese drei Momente, so werden auch die Werthe von A, B und C bekannt.

Zusatz 3.

§. 436. Wie man auch immer die Winkel η und θ annehmen mag, so kann doch das gefundene Moment der Trägheit niemals verschwinden, sondern erhält immer einen positiven Werth.

Anmerkung.

§. 437. Wollen wir nicht nur die Bewegung des Körpers um die Axe IG, sondern auch die Kräfte bestimmen, welche die Axe auszuhalten hat, so müssen wir ausser dem Momente der Trägheit in Bezug auf dieselbe auch die Werthe der Integralformeln $\int x''y''dM$ und $\int x''z''dM$ kennen (§. 343.). Es werden aber diese Formeln, durch die Coordinaten x, y und z ausgedrückt:

$$\int x''y''dM = \int dM[x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta][y\cos\eta - x\sin\eta]$$
und
$$\int x''z''dM = \int dM[x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta][z\cos\theta - x\cos\eta\sin\theta - y\sin\eta\sin\theta].$$

Substituirt man daher die oben angenommenen Werthe, so erhalten wir:

$$\int x''y''dM = -A\sin\eta\cos\eta\cos\theta + B\sin\eta\cos\eta\cos\theta$$
$$+ D[\cos\eta^2 - \sin\eta^2]\cos\theta - E\sin\eta\sin\theta + F\cos\eta\sin\theta$$

und $\int x''z''dM = -A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta$
$+ C\sin\theta\cos\theta - 2D\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta + E\cos\eta[\cos\theta^2 - \sin\theta^2]$
$+ F\sin\eta[\cos\theta^2 - \sin\theta^2]$.

Diese Werthe sind um so bemerkenswerther, als sie in den Fällen, in welchen das Moment der Trägheit ein maximum oder minimum ist, verschwinden, wie wir bald sehen werden.

Aufgabe 27.

§. 438. Unter allen Axen, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit eines gegebenen Körpers gezogen sind, soll man diejenige bestimmen, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit entweder ein maximum oder minimum wird.

Auflösung.

Es bleibe alles wie in der vorhergehenden Aufgabe und es sei IG eine solche gesuchte Axe, so dass man die Winkel $AIF = \eta$ und $FIG = \theta$ bestimmen muss. Da nun dass Moment der Trägheit in Bezug auf diese Axe $= \int(y''^2 + z''^2)dM$
$= A\sin\eta^2 + A\cos\eta^2\sin\theta^2 + B\cos\eta^2 + B\sin\eta^2\sin\theta^2$
$+ C\cos\theta^2 - 2D\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta$
ist, so differentiire man dasselbe auf doppelte Weise, indem man zuerst η und hierauf θ als veränderlich ansieht und setze dann beide Differentiale $= 0$. Aus der ersten Differentiation ergibt sich die Gleichung

$$2A\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2B\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2D\cos\eta^2\cos\theta^2$$
$$+ 2D\sin\eta^2\cos\theta^2 + 2E\sin\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

und wenn man dieselbe durch $-2\cos\theta$ dividirt,

$$-(A-B)\sin\eta\cos\eta\cos\theta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta - E\sin\eta\sin\theta$$
$$+ F\cos\eta\sin\theta = 0 \text{ oder } \int x''y''dM = 0.$$

Man hat demnach

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-(A-B)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{E\sin\eta - F\cos\eta}.$$

Nimmt man aber θ als veränderlich an, so gelangt man zu der Gleichung

$$2A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + 2B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - 2C\sin\theta\cos\theta$$
$$+4D\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - 2F\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)$$
$$= -2\int x''z''dM = 0,$$

oder $A\cos\eta^2\sin 2\theta + B\sin\eta^2\sin 2\theta - C\sin 2\theta$
$+ 2D\sin\eta\cos\eta\sin 2\theta - 2E\cos\eta\cos 2\theta - 2F\sin\eta\cos 2\theta = 0;$

also $$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2E\cos\eta + 2F\sin\eta}{A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2D\sin\eta\cos\eta}.$$

Da aber $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta^2}$ ist, so folgt aus dem vorhergehenden Werthe von $\operatorname{tg} \theta$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2[E\sin\eta - F\cos\eta][(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)]}{[E\sin\eta - F\cos\eta]^2 - [(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)]^2}.$$

Setzt man nun diese beiden Werthe von $\operatorname{tg} 2\theta$ einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
&[E\cos\eta + F\sin\eta][E\sin\eta - F\cos\eta]^2 \\
&= [E\cos\eta + F\sin\eta][(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)]^2 \\
&+ [E\sin\eta - F\cos\eta][(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)] \\
&\times [A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2D\sin\eta\cos\eta] \\
&= [(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)][E(B\sin\eta - C\sin\eta + D\cos\eta) \\
&\quad - F(A\cos\eta - C\cos\eta + D\sin\eta)].
\end{aligned}$$

Da nun überall $\sin\eta$ und $\cos\eta$ gleich viel Dimensionen bilden, so erhalten wir, wenn wir $\frac{\sin\eta}{\cos\eta} = \operatorname{tg}\eta = t$ setzen, die Gleichung

$$\begin{aligned}
[E + Ft][F - Et]^2 = [D + (B-A)t - Dt^2][DE - AF + CF \\
+ (BE - CE - DF)t]
\end{aligned}$$

oder geordnet:

$$\begin{aligned}
0 &= EF^2 - D^2E + (A-C)DF \\
&+ t[F^3 - 2E^2F + D^2F + (A - 2B + C)DE + (A-B)(A-C)F] \\
&+ t^2[E^3 - 2E.F^2 + D^2E + (B - 2A + C)DF + (A-B)(B-C)E] \\
&+ t^3[E^2F - D^2F + (B-C)DE],
\end{aligned}$$

aus welcher cubischen Gleichung der Werth von t abgeleitet werden muss.

Zusatz 1.

§. 439. Da die Gleichung, aus welcher der Werth von t gefunden werden soll, eine cubische ist, so wird sie sicher immer Eine reelle Wurzel haben, welche den Werth von $\operatorname{tg}\eta$ ergibt und hat man so diesen Winkel AIF gefunden, so muss der andere $FIG = \theta$, der Gleichung

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\theta &= \frac{(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{E\sin\eta - F\cos\eta} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(B-A)\sin 2\eta + D\cos 2\eta}{E\sin\eta - F\cos\eta}
\end{aligned}$$

entsprechend, bestimmt werden.

Zusatz 2.

§. 440. Es ist aber möglich, dass alle drei Wurzeln reell werden, in welchem Falle es im Körper drei Axen gibt, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit entweder maxima oder minima sind.

Anmerkung.

§. 441. Aus der Natur der Sache ersieht man aber, dass in jedem Körper mehr als eine solche Axe sein wird, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit entweder ein maximum oder ein minimum ist. Ist nämlich eine einzige gegeben, so wird in Bezug auf sie das Moment entweder das grösste oder das kleinste von allen sein und es wird daher in beiden Fällen nothwendig eine andere Axe geben, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit entweder das kleinste oder das grösste sein wird. Hieraus kann man ferner schliessen, dass die gefundene cubische Gleichung nicht nur Eine, sondern zwei reelle Wurzeln haben wird; es werden demnach alle drei Wurzeln stets reell sein, was man zwar aus der Form der Gleichung schwer ersehen kann. Ist aber eine solche Axe bereits bekannt, so findet man ohne Schwierigkeit die übrigen von derselben Art, was wir in der folgenden Aufgabe zu zeigen für der Mühe werth halten.

Aufgabe 28.

§. 442. Es ist eine durch den Mittelpunkt der Trägheit eines Körpers gehende Axe gegeben, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit ein maximum oder minimum ist; man soll die übrigen durch denselben Mittelpunkt gezogenen Axen bestimmen, denen dieselbe Eigenschaft zukommt.

Auflösung.

Ist I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers, so sei IA jene gegebene Axe, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit ein maximum oder minimum ist, alsdann ist aus der vorhergehenden Aufgabe bekannt, dass diese Eigenschaft nur dann stattfinden kann, wenn $\int xydM = 0$ und $\int xzdM = 0$ ist; für die vorhergehenden Formeln haben wir daher $D = 0$ und $E = 0$. Ist nun IG eine andere derartige Axe, so setzen wir wie vorhin $\angle AIF = \eta$ und $FIG = \theta$, und erhalten in Bezug auf jene das Moment der Trägheit

$$= A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\theta^2)$$
$$+ C\cos\theta^2 - 2F\sin\eta \sin\theta \cos\theta.$$

Die Methode der maxima und minima ergibt alsdann die zwei Gleichungen:

$$\text{I.}\quad (A-B)\sin\eta \cos\eta \cos\theta^2 - F\cos\eta \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\text{II.}\quad [A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2]\sin\theta \cos\theta - C\sin\theta \cos\theta - F\sin\eta$$
$$\times [\cos\theta^2 - \sin\theta^2] = 0.$$

Da die erste durch $\cos\eta \cos\theta$ theilbar ist, so hat man entweder $\cos\eta = 0$ oder $\cos\theta = 0$; denn wenn man die dritte Wurzel $\operatorname{tg}\theta = \frac{A-B}{F}\sin\eta$ in die zweite Gleichung substituirt, so bestimmt diese nichts, weil der Winkel η ganz aus der Rechnung heraustritt. Es sei demnach $\cos\eta = 0$, also $\eta = AIF = 90^0$ und $\sin\eta = 1$, alsdann ergibt die zweite Gleichung

$$B\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - F(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0,$$

oder
$$\tfrac{1}{2}(B-C)\sin 2\theta - F\cos 2\theta = 0$$

und
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2F}{B-C}.$$

Hieraus ergibt sich für den Winkel FIG ein doppelter Werth, nämlich $FIG = \theta$ und $FIG = \theta + 90^0$; es ergeben sich also aus Einer gegebenen Axe IA immer zwei neue, welche dieselbe Eigenschaft des maximum und minimum haben und welche drei Axen den drei Wurzeln der vorhergefundenen cubischen Gleichung entsprechen. Die Wurzel $\cos\theta = 0$ der ersten Gleichung bewirkt hier durchaus nichts, da nämlich der Winkel FIG ein Rechter ist, wie auch der Winkel $AIF = \eta$ sich verändern mag, so behält die gerade Linie IG stets dieselbe Lage IC bei und es findet hier keine Differentiation statt. Da aber $\eta = 90^0$ ist, wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IG

$$= A + B\sin\theta^2 + C\cos\theta^2 - 2F\sin\theta\cos\theta$$

und das Moment in Bezug auf die gegebene Axe IA

$$= B + C \text{ (§. 435.).}$$

Zusatz 1.

§. 443. Da nun der Winkel $AIF = \eta = 90^0$ ist, so sind die beiden übrigen Axen auf IA normal und weil jene auch mit einander einen rechten Winkel bilden, gibt es in jedem Körper drei durch den Mittelpunkt der Trägheit I gehende Axen, welche unter sich normal und in Bezug auf welche die Momente der Trägheit entweder maxima oder minima sind.

Zusatz 2.

§. 444. Sind daher die geraden Linien IA, IB und IC selbst diese drei Axen, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit entweder maxima oder minima sind, so wird

$$\int xy dM = D = 0, \int xz dM = E = 0 \text{ und } \int yz dM = F = 0.$$

Anmerkung.

§. 445. In diesen Aufgaben haben wir zwar angenommen,

dass I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers sei, weil wir die Berechnung des Momentes der Trägheit nur auf derartige Axen, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit gehen, beschränkt haben; allein in der ganzen Rechnung beider Aufgaben befindet sich nichts, was die Natur des Mittelpunkts der Trägheit mit dem Punkte I verbände. Diese Aufgaben erstrecken sich daher viel weiter, so dass, wenn man einen beliebigen Punkt I annimmt, man unter allen durch denselben gehenden Axen drei bestimmen kann, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit entweder maxima oder minima sind und so, dass diese drei Axen auf einander normal stehen. Ich betrachte hier aber nur diese Eigenschaft als dem Mittelpunkte der Trägheit zukommend und es wird sehr wichtig sein, für jeden beliebigen Körper diese drei Axen zu kennen, weil man vermittelst derselben die Momente der Trägheit in Bezug auf alle Axen sehr leicht finden kann.

Erklärung 8.

§. 446. Die Hauptaxen eines jeden Körpers sind jene drei durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehenden Axen, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit entweder maxima oder minima sind.

Zusatz 1.

§. 447. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dass es nicht nur für jeden beliebigen Körper solche drei Hauptaxen gibt, sondern dass dieselben auch auf einander normal sind; man wird daher sehr bequem dieselben als die drei Axen annehmen, auf welche man den Körper bezieht.

Zusatz 2.

§. 448. (Fig. 50.) Wenn daher IA, IB und IC die Hauptaxen irgend eines Körpers sind und man, zur Bestimmung des in Z gelegenen Elementes dM des Körpers, ihnen parallel die Coordinaten $IX=x$, $XY=y$ und $YZ=z$ annimmt, so wird nicht nur

$$\int x dM=0,\ \int y dM=0 \text{ und } \int z dM=0,$$

sondern auch

$$\int xy dM=0,\ \int xz dM=0 \text{ und } \int yz dM=0.$$

Zusatz 3.

§. 449. Setzt man nun aber $\int x^2 dM=A$, $\int y^2 dM=B$ und $\int z^2 dM=C$, so wird das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axe $IA=B+C$, die Axe $IB=A+C$ und die

Axe $IC = A + B$ und zwar sind diese Momente maxima oder minima.

Anmerkung.

§. 450. Von der grössten Wichtigkeit ist die Thatsache, dass es in jedem Körper drei solche Hauptaxen gibt, der Beweis derselben ergibt sich offenbar aus dem Vorhergehenden. Nimmt man nämlich je drei Axen IA, IB und IC, welche sich im Mittelpunkte der Trägheit I normal schneiden, beliebig an, so haben wir gezeigt, wie man durch Auflösung der cubischen Gleichung Eine derartige Hauptaxe IG bestimmen kann; ist aber Eine bekannt, so kann man die übrigen durch leichte Rechnung angeben. Nun wird uns aber kaum ein so unregelmässiger Körper aufstossen, dass man nicht wenigstens eine der Hauptaxen kennen sollte, worauf sich die beiden übrigen sehr leicht ergeben. Ich werde daher künftig annehmen, dass in jedem Körper diese drei Hauptaxen uns bekannt seien; und wenn wir nur in Bezug auf sie die Momente der Trägheit kennen, werden wir dieselben für alle anderen Axen sehr rasch darstellen können, wie man aus der folgenden Aufgabe ersehen wird.

Erläuterung.

§. 451. In welcher Weise diesen drei Hauptaxen das maximum oder minimum zukomme, sieht man nicht so leicht ein. Da nämlich sicher eine sich unter ihnen befindet, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit das grösste von allen, und eben so eine, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit das kleinste von allen ist; so wird nothwendig in Bezug auf die dritte Axe das Moment weder das grösste noch das kleinste von allen sein, ausgenommen wenn es etwa mit dem einen von jenen beiden übereinstimmt, was bisweilen geschehen kann. Allein die Rechnung der maxima und minima gibt oft derartige Grössen an, welche absolut weder maxima noch minima sind, weil diese Rechnung nur ergibt, dass, wenn man sich unendlich wenig von dem gefundenen Orte entfernt, weder eine Zu- noch eine Abnahme stattfindet. Ist daher IA die Axe des maximum absolut genommen und IC die Axe des minimum ebenfalls absolut genommen; so wird in Bezug auf die Axe IB das Moment der Trägheit weder das grösste noch das kleinste von allen sein, aber doch auf eine solche Weise die Mitte halten, dass, wenn man eine andere unendlich wenig von ihr abstehende Axe nach einer beliebigen Seite hin annimmt,

ihr Moment der Trägheit weder zu- noch abnimmt. Aus diesem Grunde findet der grosse und besonders zu bemerkende Unterschied zwischen diesen drei Hauptaxen statt, dass nämlich eine von ihnen das grösste, eine zweite das kleinste, die dritte aber ein mittleres Moment hat, welches jedoch in der Rechnung als ein maximum oder minimum angesehen werden kann. Der Grund hiervon wird in der folgenden Aufgabe noch deutlicher werden.

Aufgabe 29.

§. 452. Gegeben sind die Momente der Trägheit eines gewissen Körpers in Bezug auf die drei Hauptaxen; man soll sein Moment der Trägheit in Bezug auf eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gezogene, Axe bestimmen.

Auflösung.

(Figur 50.) Es seien IA, IB und IC die drei Hauptaxen des Körpers, welche sich wechselseitig im Mittelpunkte der Trägheit I normal schneiden und es seien, wenn man die Masse des Körpers $= M$ setzt, seine Momente der Trägheit in Bezug auf die Axen IA, IB und IC respective Ma^2, Mb^2 und Mc^2; man sucht hieraus sein Moment der Trägheit in Bezug auf die beliebige Axe IG, welche gegen die Ebene AIB unter dem Winkel $GIF = \theta$ geneigt und wobei der Winkel $AIF = \eta$ ist. Betrachtet man nun das Element dM des Körpers in Z und sind die Coordinaten dieses Punktes $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$; so wird, wenn man die Integrale

$$\int x^2 dM = A,\ \int y^2 dM = B \text{ und } \int z^2 dM = C \quad \text{setzt,}$$

$$\int xydM = D = 0,\ \int xzdM = E = 0 \text{ und } \int yzdM = F = 0.$$

Nach §. 433. wird daher das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IG

$$= A[\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\theta^2] + B[\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\theta^2] + C\cos\theta^2.$$

Da wir aber aus den drei gegebenen Momenten

$$Ma^2 = B + C,\ Mb^2 = A + C \text{ und } Mc^2 = A + B$$

haben, so erhält man aus diesen Gleichungen umgekehrt

$$A = \tfrac{1}{2}M[b^2 + c^2 - a^2],\ B = \tfrac{1}{2}M[a^2 + c^2 - b^2] \text{ und } C = \tfrac{1}{2}M[a^2 + b^2 - c^2].$$

Substituirt man diese Werthe, so ergibt sich das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IG

$$= M[a^2\cos\eta^2\cos\theta^2 + b^2\sin\eta^2\cos\theta^2 + c^2\sin\theta^2].$$

Hierbei bemerke man, dass

$$\cos\eta\cos\theta = \cos AIG,\quad \sin\eta\cos\theta = \cos BIG \text{ und } \sin\theta = \cos CIG$$

ist. Setzt man daher die Winkelabstände der Axe IG von den drei Hauptaxen, oder

$$AIG = \alpha,\ BIG = \beta \text{ und } CIG = \gamma,$$

so wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IG

$$= Ma^2 \cos\alpha^2 + Mb^2 \cos\beta^2 + Mc^2 \cos\gamma^2.$$

Die Winkel α, β, γ sind aber so beschaffen, dass man hat

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Zusatz 1.

§. 453. Setzt man das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe $IG = Mk^2$, so kann man dasselbe auf die folgenden Weisen ausdrücken:

$$Mk^2 = Ma^2 - M(a^2 - b^2)\cos\beta^2 - M(a^2 - c^2)\cos\gamma^2$$
$$Mk^2 = Mb^2 + M(a^2 - b^2)\cos\alpha^2 - M(b^2 - c^2)\cos\gamma^2$$
$$Mk^2 = Mc^2 + M(a^2 - c^2)\cos\alpha^2 + M(b^2 - c^2)\cos\beta^2;$$

und man kann in jedem dieser Ausdrücke die zwei Winkel nach Belieben annehmen.

Zusatz 2.

§. 454. Ist $a^2 > b^2$ und $b^2 > c^2$, so wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IA das grösste von allen, und das in Bezug auf die Axe IC das kleinste; das in Bezug auf die Axe IB wird die Mitte halten.

Zusatz 3.

§. 455. Ist $(a^2 - b^2)\cos\alpha^2 > (b^2 - c^2)\cos\gamma^2$, so wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IG grösser als das mittlere Mb^2, im Gegentheil wird es kleiner. Ist aber

$$(a^2 - b^2)\cos\alpha^2 = (b^2 - c^2)\cos\gamma^2,$$

was an unzähligen Orten geschehen kann, so sind daselbst alle Momente der Trägheit einander gleich.

Zusatz 4.

§. 456. Ist aber $a^2 = b^2 = c^2$, d. h. sind die Momente der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxen einander gleich, so werden auch die Momente in Bezug auf alle, durch den Mittelpunkt der Trägheit gezogenen, Axen einander gleich sein; man kann daher jede beliebige Axe als Hauptaxe ansehen.

Anmerkung.

§. 457. (Figur 51.) Auf elegante Weise kann man diese Sätze nach dem, in der sphärischen Trigonometrie angenommenen, Gebrauche darstellen. Es seien nämlich, wenn man den Mittelpunkt der Trägheit I im Centrum einer Kugel annimmt, A, B und C die auf der sphärischen Oberfläche begrenzten

Endpunkte der Hauptaxen, so dass die Bogen AB, AC und BC Quadranten sind. Den in diesen Punkten begrenzten Axen entsprechen die Momente der Trägheit Ma^2, Mb^2 und Mc^2, von denen das erste das grösste, das zweite das mittelgrosse und das dritte das kleinste ist. Betrachtet man nun eine andere beliebige Axe, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit geht und die sphärische Oberfläche im Punkte S durchschneidet, so wird das Moment der Trägheit in Bezug auf dieselbe

$$= Ma^2 \cos AS^2 + Mb^2 \cos BS^2 + Mc^2 \cos CS^2.$$

Dieser Ausdruck kann, weil $\cos AS^2 + \cos BS^2 + \cos CS^2 = 1$ ist, auch folgendermaassen dargestellt werden:

$Ma^2 - M(a^2 - b^2) \cos BS^2 - M(a^2 - c^2) \cos CS^2$, oder

$Mb^2 + M(a^2 - b^2) \cos AS^2 - M(b^2 - c^2) \cos CS^2$ oder

$Mc^2 + M(a^2 - c^2) \cos AS^2 + M(b^2 - c^2) \cos BS^2$.

Hiernach wird, wenn S auf dem Quadranten BC, nämlich im Punkte D liegt, das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe ID

$$= M(b^2 \cos BD^2 + c^2 \cos CD^2) = Mb^2 - M(b^2 - c^2) \cos CD^2 = Mc^2 + M(b^2 - c^2) \cos BD^2,$$

oder auch

$$= Mb^2 - M(b^2 - c^2) \sin BD^2 = Mc^2 + M(b^2 - c^2) \sin CD^2.$$

Auf ähnliche Weise ist das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IE

$$= Ma^2 - M(a^2 - c^2) \sin AE^2 = Mc^2 + M(a^2 - c^2) \sin CE^2$$

und das in Bezug auf die Axe IF

$$= Ma^2 - M(a^2 - b^2) \sin AF^2 = Mb^2 + M(a^2 - b^2) \sin BF^2.$$

Aufgabe 30.

§. 458. Man soll alle durch den Mittelpunkt der Trägheit gezogenen Axen finden, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit einander gleich sind.

Auflösung.

(Figur 51.) Es seien die Momente der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxen IA, IB und IC respective Ma^2, Mb^2 und Mc^2, und dabei $a^2 > b^2 > c^2$; man sucht alle durch den Mittelpunkt der Trägheit I zu ziehenden Axen, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit einander und zwar demjenigen gleich sind, welches der Axe IE entspricht. E ist auf dem Quadranten AC angenommen, weil von A bis C alle Momente dieses Körpers, vom grössten bis zum kleinsten, vorkommen. Ist nun IS eine solche Axe, so haben wir die Gleichung:

$$Ma^2 - M(a^2-c^2)\sin AE^2 = Ma^2 - M(a^2-b^2)\cos BS^2 - M(a^2-c^2)\cos CS^2$$

oder $(a^2-c^2)\sin AE^2 = (a^2-b^2)\cos BS^2 + (a^2-c^2)\cos CS^2$.

Da nun $\cos BS^2 = \sin AS^2 - \cos CS^2$ ist, so wird

$$(a^2-c^2)\sin AE^2 = (a^2-b^2)\sin AS^2 + (b^2-c^2)\cos CS^2.$$

Führt man ferner den Winkel CAS ein, so wird, weil $\cos CS = \sin AS \cos CAS$ ist,

$$(a^2-c^2)\sin AE^2 = (a^2-b^2)\sin AS^2 + (b^2-c^2)\sin AS^2 \cos CAS^2,$$

also $$\sin AS^2 = \frac{(a^2-c^2)\sin AE^2}{a^2-b^2+(b^2-c^2)\cos CAS^2}.$$

Führt man aber den Winkel ACS ein, so wird

$$\sin CS^2 = \frac{(a^2-c)\sin CE^2}{b^2-c^2+(a^2-b^2)\cos ACS^2}.$$

Der Winkel CAS kann bis 90° wachsen, wenn nur

$$(a^2-c^2)\sin AE^2 < a^2-b^2, \text{ d. h. } \sin AE < \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \text{ ist;}$$

eben so kann der Winkel ACS bis 90° zunehmen, wenn nur

$$\sin CE < \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \text{ oder } \sin AE > \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \text{ ist.}$$

Der Punkt S wird daher auf der Curve liegen, welche in E aufsteigend durch den Quadranten AB geht, wenn

$$\sin AE < \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$$

ist; jene Curve wird durch den Quadranten BC gehen, wenn

$$\sin AE > \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}.$$

Ist aber $$\sin AE = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

so wird die Curve durch den Punkt B gehen und es werden alle Momente der Trägheit $= Mb^2$. In diesem Falle wird daher

$$\sin AS^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2+(b^2-c^2)\cos CAS^2}$$

und es folgt hieraus, weil $\cos AE = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$ und $\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2} = \frac{\sin AE^2}{\cos AE^2}$ ist,

$$\sin AS^2 = \frac{\sin AE^2}{\sin AE^2 + \cos AE^2 \cos CAS^2} \text{ und } \operatorname{tg} AS = \frac{\operatorname{tg} AE}{\cos CAS}.$$

Aus der letzten Gleichung ersieht man, dass die Orte der Punkte S auf einem grössten Kreise liegen, welcher durch die Punkte B und E gezogen ist.

(Figur 52.) In dem Falle, dass $\sin AE < \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$ ist, oder der Punkt E näher an A angenommen wird, befinde sich derselbe in e, alsdann wird es auf dem Quadranten AB einen Punkt f geben, in welchem das Moment gleich gross ist. Es wird demnach $\sin Af^2 = \frac{(a^2-c^2)\sin Ae^2}{a^2-b^2}$, also, wenn man $Ae = e$, $Af = f$, $As = s$ und $eAs = \varphi$ setzt, weil $\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2} = \frac{\sin f^2}{\sin e^2}$ und $\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2} = \frac{\sin f^2 - \sin e^2}{\sin e^2}$ ist, zwischen s und φ die Gleichung stattfinden:

$$\sin s^2 = \frac{\sin e^2 \sin f^2}{\sin e^2 + (\sin f^2 - \sin e^2)\cos\varphi^2} = \frac{\sin e^2 \sin f^2}{\sin e^2 \sin\varphi^2 + \sin f^2 \cos\varphi^2}.$$

Dieselbe drückt die Natur der Linie *esf* aus und es ist $\frac{\sin e}{\sin f} = \sin AE$. In dem Falle endlich, wo $\sin AE > \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$ ist, liege der Punkt E in e' und es wird alsdann auf dem Quadranten BC einen Punkt d geben, in welchem das Moment dasselbe als in e' ist, so dass $\sin Cd^2 = \frac{(a^2-c^2)\sin Ce'^2}{b^2-c^2}$ wird. Setzen wir nun $Ce' = e$, $Cd = f$, $Cs' = s$ und $e'Cs' = \varphi$, so wird, weil $\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2} = \frac{\sin f^2}{\sin e^2}$ und $\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2} = \frac{\sin f^2 - \sin e^2}{\sin e^2}$ ist, zwischen s und φ die Gleichung stattfinden:

$$\sin s^2 = \frac{\sin e^2 \sin f^2}{\sin e^2 + (\sin f^2 - \sin e^2)\cos\varphi^2} = \frac{\sin e^2 \sin f^2}{\sin e^2 \sin\varphi^2 + \sin f^2 \cos\varphi^2},$$

welche die Natur der Linie *e's'd* ausdrückt und wobei $\frac{\sin e}{\sin f} = \sin CE$ ist.

Zusatz 1.

§. 459. Durch den ganzen von B durch E gezogenen grössten Kreis ist demnach, damit $\sin AE = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$ sei, das Moment der Trägheit $= Mb^2$. Weil man ferner den Bogen AE so wohl negativ als positiv annehmen kann, gibt es auf der Kugel zwei grösste Kreise, welche dieselbe Eigenschaft haben.

Zusatz 2.

§. 460. Auf ähnliche Weise werden so wohl um den Pol A, als um den ihm entgegengesetzten zwei elliptische Bahnen auf der Kugel stattfinden, deren halbe grosse Axe der Bogen

Af und deren halbe kleine der Bogen Ae ist und auf welchen überall dasselbe Moment der Trägheit, grösser als Mb^2, stattfindet. In der Figur stellt die Linie fse einen Quadranten dieser elliptischen Bahnen dar.

Zusatz 3.

§. 461. Die Linien, auf welchen das Moment der Trägheit kleiner als Mb^2 ist, werden zwei elliptische Bahnen sein, deren Mittelpunkte im Pole C und dem ihm entgegengesetzten liegen, deren halbe grosse Axe der Bogen Cd und halbe kleine der Bogen Ce' ist. In der Figur stellt die Linie $ds'e'$ einen Quadranten dieser elliptischen Bahnen dar.

Anmerkung 1.

§. 462. Wenn auch diese auf der Oberfläche der Kugel gezogenen Linien fse und $ds'e'$ sich nicht in derselben Ebene befinden, so finden wir es doch angemessen, sie elliptische Bahnen zu nennen, weil ihre Projectionen auf Ebenen, welche die Kugel in den Punkten A und C berühren, Ellipsen sind, deren Mittelpunkte in A und C liegen. Setzt man nämlich in der Projection der Linie fse auf die, die Kugel in A berührende, Ebene $\sin Af = m$, $\sin Ae = n$, so dass $\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$ wird und nimmt man für die Projection des Punktes s auf m die Abscisse $= x = \sin s . \sin\varphi$ und die darauf normale Ordinate $= y = \sin s \cos\varphi$ an; so hat man zwischen x und y die Gleichung

$$n^2x^2 + m^2y^2 = m^2n^2 \quad (§. 458.),$$

welche einer Ellipse angehört, deren Mittelpunkt in A liegt und deren halbe Axen m und n sind. Auf gleiche Weise findet man, dass die Projection der Linie $ds'e'$ auf die, die Kugel in C berührende, Ebene eine Ellipse ist.

Ist etwa $Mb^2 = Mc^2$, in welchem Falle der Punkt E in C fällt, so wird $Ae = Af$ und $m = n$, es geht die Ellipse in einen Kreis über und zwar wird die Linie fse ein um den Pol A beschriebener kleinerer Kreis.

Anmerkung 2.

§. 463. Wir haben demnach die Aufsuchung des Momentes der Trägheit darauf zurückgeführt, dass es für jeden beliebigen vorliegenden Körper hinreichend ist, je drei Momente der Trägheit zu bestimmen, welche nämlich in Bezug auf die drei Hauptaxen genommen sind. Denn wenn diese bekannt sind, kann

man leicht das Moment der Trägheit desselben Körpers in Bezug auf irgend eine andere, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe und hieraus ferner in Bezug auf alle andern jener parallelen Axen angeben. Auf diese Weise ist die Auffindung der Momente der Trägheit, welche anfangs für jeden Körper gleichsam ohne Ende zu sein schien, auf bewunderungswürdige Weise abgekürzt worden. Ausserdem aber verdient bei dieser Arbeit ein anderes ausgezeichnetes Hülfsmittel bemerkt zu werden, durch welches man auf das Moment der Trägheit irgend eines Körpers leicht aus den Momenten seiner Theile schliessen kann; dieses wollen wir in der folgenden Aufgabe auseinandersetzen.

Aufgabe 31.

§. 464. Gegeben sind die Momente der Trägheit zweier Theile in Bezug auf Axen, welche einander parallel sind und durch den Mittelpunkt der Trägheit eines jeden gehen; man soll das Moment der Trägheit des ganzen Körpers in Bezug auf eine Axe bestimmen, welche jenen parallel ist und durch den Mittelpunkt der Trägheit des letzteren geht.

Auflösung.

(Fig. 53.) Es sei demnach der Körper aus zwei Theilen zusammengesetzt, deren Massen M und N sind und deren Mittelpunkte der Trägheit sich respective in M und N befinden, der Zwischenraum MN werde $= c$ gesetzt. Es sei nun das Moment der Trägheit des ersten Theiles M in Bezug auf die Axe mm' gegeben und $= M.m^2$, eben so das des andern Theiles N in Bezug auf die Axe $nn' = N.n^2$, diese Axen mm' und nn', welche durch die Mittelpunkte der Trägheit beider Theile gehen, werden einander parallel angenommen, man soll hierdurch das Moment der Trägheit des ganzen Körpers, in Bezug auf die jenen parallele und durch seinen Mittelpunkt der Trägheit I gehende Axe $i\,i'$ bestimmen. Die Masse des ganzen Körpers ist aber $= M + N$ und man findet seinen Mittelpunkt der Trägheit auf der geraden Linie MN im Punkte I, so dass man hat

$$IM = \frac{Nc}{M+N} \text{ und } IN = \frac{Mc}{M+N}.$$

Da nun diese drei Axen in derselben Ebene liegen, so setze man ihre Neigung gegen die Linie MN oder den Winkel $NIi = \delta$, alsdann wird der Abstand der Axen mm' und ii'

von einander $=\frac{Nc\sin\delta}{M+N}$ und so das Moment der Trägheit des Theiles M, in Bezug auf die Axe ii'

$$=Mm^2+\frac{M.N^2.c^2\sin\delta^2}{(M+N)^2} \text{ (§. 430.).}$$

Da ferner der gegenseitige Abstand der Axen nn' und ii' $=\frac{Mc\sin\delta}{M+N}$ ist, so ergibt sich das Moment der Trägheit des Theiles N, in Bezug auf die Axe ii'

$$=N.n^2+\frac{M^2.N.c^2\sin\delta^2}{(M+N)^2}.$$

Hiernach wird das Moment der Trägheit des ganzen Körpers, in Bezug auf die Axe ii'

$$=M.m^2+N.n^2+\frac{MNc^2\sin\delta^2}{M+N}.$$

Zusatz 1.

§. 465. Das Moment des ganzen Körpers ist demnach grösser, als die Summe der Momente seiner Theile, in Bezug auf Axen, welche einander parallel und durch den Mittelpunkt der Trägheit eines jeden gezogen sind; und zwar ist der Ueberschuss $\frac{M.N.c^2\sin\delta^2}{M+N}$ dem Quadrat des Abstandes der Axen proportional.

Zusatz 2.

§. 466. Setzt man die Masse des ganzen Körpers $=I$ $=M+N$ und sein Moment der Trägheit, in Bezug auf die Axe ii', $=I.i^2$, so wird

$$I.i^2=M.m^2+N.n^2+\frac{M.N.c^2\sin\delta^2}{I}.$$

Setzt man ferner den Abstand $IM=a$ und den $IN=b$, so wird $a=\frac{N.c}{I}$ und $b=\frac{M.c}{I}$, also

$$I.i^2=M.m^2+N.n^2+Iab\sin\delta^2.$$

Zusatz 3.

§. 467. Ist daher das Moment des ganzen Körpers $=I.i^2$ zugleich mit dem Momente des einen Theiles $=M.m^2$ gegeben, so schliesst man hieraus auch leicht auf das Moment des anderen Theiles

$$=N.n^2=I.i^2-M.m^2-Iab\sin\delta^2;$$

hierbei sind nämlich die Axen einander parallel angenommen

und es gehen dieselben durch den Mittelpunkt der Trägheit eines jeden.

Zusatz 4.

§. 468. Besteht der Körper aus mehreren Theilen, deren Momente der Trägheit in Bezug auf Axen, welche einander parallel durch den Mittelpunkt der Trägheit eines jeden gehen, bestimmt sind; so wird man hieraus, indem man je zwei mit einander verbindet, endlich auf das Moment der Trägheit des ganzen Körpers in Bezug auf eine Axe, welche jenen parallel ist und durch den Mittelpunkt der Trägheit des letztern geht, schliessen.

Anmerkung. 1.

§. 469. In diesem Falle, wo mehrere Theile gegeben sind, hat man nicht nöthig, der Aufgabe gemäss je zwei mit einander zu verbinden, sondern kann sogleich auf das Moment des ganzen Körpers schliessen. Es seien nämlich $M.m^2$, $N.n^2$, $P.p^2$ und $Q.q^2$ die Momente der Theile in Bezug auf Axen, welche einander parallel sind und durch den Mittelpunkt der Trägheit eines jeden gehen; für den ganzen Körper denke man sich aber eine jenen parallele Axe, welche durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht und von welcher die Axen der Theile M, N, P, Q um die Abstände a, b, c und d entfernt sind. Sind diese bekannt, so wird das Moment der Trägheit des ganzen Körpers

$$= M(m^2+a^2)+N(n^2+b^2)+P(p^2+c^2)+Q(q^2+d^2) \quad (\S.\ 430).$$

Auf diese Weise kann man daher oft auf leichte Weise die Momente der Trägheit sehr unregelmässiger Körper bestimmen, wenn diese nur aus solchen Theilen zusammengesetzt sind, deren Momente der Trägheit man angeben kann, und es wird durch dieses Verfahren die Berechnung der Momente der Trägheit nicht wenig erleichtert.

Anmerkung 2.

§. 470. Es ist aber nicht hinreichend, eine Methode angegeben zu haben, nach welcher man die Momente der Trägheit aller Körper finden kann; sondern man muss dieselben auch für die vorzüglichsten Arten von Körpern entwickeln, damit man sie, so oft es der Gebrauch verlangt, von hier entnehmen kann. Damit aber die Arbeit keine unendliche werde, beschränken wir diese Untersuchung auf homogene Körper, welche in ihrer ganzen Ausdehnung aus ähnlicher Materie bestehen, so dass wir die Rechnung gleichsam nur geometrischen Körpern anzupassen haben, wobei wir lediglich die hauptsächlichsten Figuren be-

trachten werden. Zuerst wollen wir, weil man sehr dünne Fäden und Scheiben als Linien und Oberflächen betrachten kann, mit diesen anfangen und von ihnen zu den verschiedenen Arten von Körpern, welche vor den übrigen vorzukommen pflegen, übergehen. In diesen einzelnen Körpern wollen wir aber die drei Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen, da man nämlich von diesen mit leichter Mühe auf die Momente in Bezug auf alle Axen schliessen kann. Hieraus wird auch zugleich klar werden, auf welche Weise man die Rechnung so bequem als möglich allen Arten von Körpern anzupassen habe.

Kapitel VI.

Aufsuchung des Moments der Trägheit in homogenen Körpern.

Aufgabe 32.

§. 471. (Figur 54.) Wenn ein Körper ein sehr dünner geradliniger Faden AIB ist, soll man seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen.

Auflösung.

Es sei die ganze Länge des Fadens $AB = 2a$, alsdann wird in seinem Mittelpunkte I der Mittelpunkt der Trägheit liegen, so dass $IA = IB = a$ wird; die Masse des Fadens aber, welche geometrisch durch $2a$ ausgedrückt wird, sei $= M$. Eine der Hauptaxen wird nun sicher die Linie AB selbst sein, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit $= 0$, also ein minimum ist; die zwei andern sind in I auf AB normal und da die Momente der Trägheit in Bezug auf sie einander gleich sind, so wird ihre Lage nicht bestimmt. Um daher das Moment der Trägheit in Bezug auf eine solche, in I auf AB normale Axe zu finden, nehme man $IP = IQ = x$ an, alsdann sind die Momente der Elemente $Pp = Qq = dx$ gleich x^2dx und so beide vereint $= 2x^2dx$. Integrirt man diese Summe, so wird das Integral $= \frac{2}{3}x^3$ und dasselbe ergibt für $x = a$ das Moment der Trägheit des ganzen Fadens, in Bezug auf die in I auf AB normalen Axen, $= \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}M.a^2$, weil $M = 2a$ ist.

Zusatz 1.

§. 472. Die zwei andern Hauptaxen ausser AIB werden nicht bestimmt und es ist gleichgültig, welche zwei, sowohl

unter sich als in I auf AB normale, Linien man für sie annimmt. Das Moment der Trägheit in Bezug auf sie $= \frac{1}{3} M.a^2$ ist ein maximum, so dass das mittlere mit dem grössten übereinstimmt.

Zusatz 2.

§. 473. Da das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe $AB = 0$ ist, so wird dasselbe in Bezug auf eine andere beliebige Axe Ss, welche gegen AB um den Winkel $AIS = \theta$ geneigt ist, $= \frac{1}{3} Ma^2 \sin \theta^2$. Diess ist aus dem Vorhergegehenden einleuchtend, wenn man die eine der beiden übrigen Hauptaxen in der Ebene AIS annimmt; alsdann wird die Axe Ss nämlich gegen sie um den Winkel $90^0 - \theta$ und gegen die andere um 90^0 geneigt sein (§. 452.).

Aufgabe 33.

§. 474. (Figur 55.) Wenn ein Körper ein kreisförmig gekrümmter sehr dünner Faden $AEBF$ ist, so soll man seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen.

Auflösung.

Es sei der Radius des Kreises $IA = a$, also die Länge des Fadens $= 2\pi a$, welche letztere zugleich seine Masse $= M$ darstellt. Da der Mittelpunkt der Trägheit sich im Mittelpunkte I des Kreises befindet, so wird zuerst eine in diesem Punkte auf die Ebene des Kreises perpendiculäre Linie die eine Hauptaxe und das Moment der Trägheit in Bezug auf sie $= Ma^2$ sein. Die zwei übrigen Axen liegen in der Ebene des Kreises und man kann für sie je zwei beliebige, auf einander normale Durchmesser AB und EF annehmen. Nimmt man nun die Abscisse $IP = x$ und die Ordinate $PM = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ an, so ist das Element des Fadens $Mm = \frac{adx}{y}$ und sein Moment in Bezug auf die Axe $AB = aydx$; mithin das ganze Moment

$$= a\int ydx = a \times \text{die Fläche des Kreises} = \pi a^3.$$

Da nun $M = 2\pi a$, so hat man das Moment in Bezug auf einen beliebigen Durchmesser $= \frac{1}{2} M.a^2$.

Zusatz 1.

§. 475. Das Moment der Trägheit in Bezug auf die, auf der Ebene des Kreises normal stehende, Hauptaxe oder $M.a^2$ ist daher das grösste und es stimmt das mittlere mit dem kleinsten überein, indem jedes der Hälfte des grössten gleich ist

Zusatz 2.

§. 476. Denkt man sich eine andere beliebige Axe, welche in I gegen die Ebene des Kreises um einen Winkel η geneigt ist, so bildet dieselbe mit der ersten Axe einen Winkel $= 90^0 - \eta$, mit der einen der zwei andern einen Winkel $= \eta$ und mit der dritten Axe einen rechten Winkel; es wird daher das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Axe (nach §. 452.)

$$= Ma^2 \sin \eta^2 + \tfrac{1}{2} Ma^2 . \cos \eta^2 = \tfrac{1}{2} Ma^2 (1 + \sin \eta^2).$$

Aufgabe 34.

§. 477. (Fig. 56) Ist der Körper eine sehr dünne, ebene und dreieckige Scheibe ABD, so soll man seine drei Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen.

Auflösung.

Um den Mittelpunkt der Trägheit I zu erhalten, ziehe man vom Winkel A aus die gerade Linie AC, welche die gegenüberliegende Seite BD in C halbirt und nimmt man nun $CI = \tfrac{1}{3} AC$ an, so ist I der Mittelpunkt der Trägheit. Wir setzen $CI = a$, $CB = CD = c$ und $\angle ACB = \zeta$, so dass $AI = 2a$, $AC = 3a$ und $BD = 2c$ wird. Man sieht nun ein, dass die eine Hauptaxe in I auf der Ebene des Dreiecks normal stehen wird, weil, wenn wir auf ihr die Coordinate x annehmen, wegen $x = 0$, so wohl $\int xydM = 0$ als auch $\int xzdM = 0$ sein wird. Man nehme daher nach Aufgabe 28. (§. 442.) ausser dieser Axe in der Ebene des Dreiecks die zwei übrigen Coordinatenaxen an, deren eine IA sei. Nimmt man nun ein beliebiges Element dM in Z an, so sei, wenn man von hier auf IA das Perpendikel ZY fällt, $IY = y$ und $YZ = z$ und man setze die Integrale $\int x^2 . dM = A = 0$, $\int y^2 . dM = B$, $\int z^2 . dM = C$ und $\int yzdM = F$. Sind nun IF und IG die beiden übrigen Hauptaxen und setzt man den Winkel $AIF = \theta$, so haben wir bewiesen, dass

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2F}{B - C}$$

und das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IF

$$= A + B \sin \theta^2 + C \cos \theta^2 - 2F \sin \theta \cos \theta$$

sei, wo θ so wohl den Winkel AIF, als auch den AIG bezeichnet. Ferner wird das Moment der Trägheit, in Bezug auf die erste, auf die Ebene des Dreiecks normale, Axe $= B + C$. Um nun diese Werthe zu finden, ziehe man durch Z die Linie $MN \# BD$ und wenn man dann $AP = t$ und $PZ = u$ setzt, so erhält man

$$PM = PN = \frac{ct}{3a},\ YZ = u \sin\zeta,\ PY = u\cos\zeta$$

und das in Z befindliche Element

$$dM = dt.du \sin\zeta.$$

Hiernach wird $y = 2a - t + u\cos\zeta$, $z = u\sin\zeta$, man denke sich ferner ein anderes gleiches Element $dt.du\sin\zeta$ auf der andern Seite von CA, für welches u negativ wird und betrachtet man diese mit einander vereint; so wird

$B = 2\int dt \sin\zeta \int du[(2a-t)^2 + u^2\cos\zeta^2]$,

$C = 2\int dt \sin\zeta \int u^2 du \sin\zeta^2$ und

$F = \int dt \sin\zeta \int [udu \sin\zeta(2a - t + u\cos\zeta) - udu \sin\zeta(2a - t - u\cos\zeta)]$

$= 2\int dt \sin\zeta \int u^2 du \sin\zeta\cos\zeta.$

Nachdem die erste Integration ausgeführt ist, muss man $u = \frac{ct}{3a}$ setzen und erhält so:

$$B = 2\sin\zeta\int dt\left[\frac{ct}{3a}(2a-t)^2 + \frac{c^3t^3}{81a^3}\cos\zeta^2\right],$$

$$C = 2\sin\zeta\int dt.\frac{c^3t^3\sin\zeta^2}{81a^3}$$

und $$F = 2\sin\zeta^2\cos\zeta\int dt.\frac{c^3t^3}{81a^3}.$$

Ferner

$$B = 2\sin\zeta\left[\frac{2act^2}{3} - \frac{4ct^3}{9} + \frac{ct^4}{12a} + \frac{c^3t^4}{324a^3}\cos\zeta^2\right]$$

$$C = 2\sin\zeta.\frac{c^3t^4\sin\zeta^2}{324a^3}$$

und $$F = \frac{c^3t^4\sin\zeta^2\cos\zeta}{162a^3}.$$

Erstreckt man diese Werthe über das ganze Dreieck, indem man $t = 3a$ setzt, so erhält man

$B = \frac{1}{2}ac\sin\zeta[3a^2 + c^2\cos\zeta^2]$, $C = \frac{1}{2}ac^3\sin\zeta^3$ und $F = \frac{1}{2}ac^3\sin\zeta^2\cos\zeta$.

Hieraus ergibt sich, zur Bestimmung der Lage der Axen IF und IG,

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2ac^3\sin\zeta^2\cos\zeta}{3a^3c\sin\zeta + ac^3\sin\zeta(\cos\zeta^2 - \sin\zeta^2)} = \frac{c^2\sin2\zeta}{3a^2 + c^2\cos2\zeta},$$

woraus man nämlich zwei Werthe für θ erhält. Endlich wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxe, welche auf die Ebene des Dreiecks normal ist,

$$= \frac{1}{2}ac\sin\zeta(3a^2 + c^2) = \frac{1}{6}M(3a + c^2),$$

weil $M = 3ac\sin\zeta$ ist. Ferner wird in Bezug auf die Axe IF oder IG, je nachdem θ den Winkel AIF oder AIG bezeichnet, das Moment der Trägheit

$= \frac{1}{6} M(3a^2 + c^2 \cos\zeta^2) \sin\theta^2$
$\quad + \frac{1}{6} Mc^2 \sin\zeta^2 \cos\theta^2 - \frac{1}{3} Mc^2 \sin\zeta \cos\zeta \sin\theta \cos\theta$
$= \frac{1}{2} Ma^2 \sin\theta^2 + \frac{1}{6} Mc^2 [\cos\zeta^2 \sin\theta^2 + \sin\zeta^2 \cos\theta^2 - 2 \sin\zeta \cos\zeta \sin\theta \cos\theta]$
$= \frac{1}{2} Ma^2 \sin\theta^2 + \frac{1}{6} Mc^2 \sin(\zeta - \theta)^2.$

Zusatz 1.

§. 478. Da $AB^2 + AD^2 = 18a^2 + 2c^2$ ist, so wird $3a^2 = \frac{AB^2 + AD^2 - 2c^2}{6}$ und hieraus das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe, welche in I auf der Ebene des Dreiecks normal steht, $= \frac{1}{36} M[AB^2 + AD^2 + BD^2]$;
also $\frac{1}{36}$ des Products der Masse in die Summe der Quadrate der drei Seiten.

Zusatz 2.

§. 479. Für die zwei übrigen Hauptaxen IF und IG, welche in der Ebene des Dreiecks liegen, bemerke man, dass ζ einen Winkel bezeichnet, welcher kleiner als 90^0 ist, so dass $\sin 2\zeta$ positiv sein wird. Zur Bestimmung des Winkels $AIF = \theta$ wird alsdann

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3a^2 - c^2\cos 2\zeta + \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}}{c^2 \sin 2\zeta} = \operatorname{tg} AIF, \text{ wogegen}$$

$$\operatorname{tg} AIG = \frac{-3a^2 - c^2\cos 2\zeta - \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}}{c^2 \sin 2\zeta}.$$

Zusatz 3.

§. 480. Das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Axen ist

$$= \frac{1}{6} M[\frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}a^2 \cos 2\theta + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}c^2 \cos 2(\zeta - \theta)],$$

und da nun $\operatorname{tg} 2(\zeta - \theta) = \frac{3a^2 \sin 2\zeta}{3a^2 \cos 2\zeta + c^2}$; so wird dieses beiderseitige Moment folgendermaassen ausgedrückt durch

$$\frac{1}{12} M[3a^2 + c^2 \pm \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}] = \frac{1}{12} Mc^2 [1 - \cos 2\zeta - \sin 2\zeta \operatorname{tg}\theta]$$

$$= \frac{Mc^2 \sin\zeta \sin(\zeta - \theta)}{6 \cos\theta}.$$

Je nachdem man nämlich für θ den Winkel AIF oder AIG annimmt, wird das Moment auf die eine oder die andere Axe bezogen.

Beispiel.

§. 481. Es sei das Dreieck ABD gleichschenklig oder $\zeta = 90^0$, alsdann wird $\operatorname{tg} 2\theta = 0$ und θ entweder $= 0$ oder $= 90^0$; es fällt daher die eine Axe auf die gerade Linie AC, die an-

dere aber steht auf ihr normal. In Bezug auf die erstere AC wird das Moment der Trägheit $= \frac{1}{6}Mc^2$, in Bezug auf die zweite $= \frac{1}{2}Ma^2$, während das Moment in Bezug auf die Axe, welche auf der Ebene des Dreiecks normal steht, $= \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{6}Mc^2$, also der Summe jener beiden gleich ist. Ist das Dreieck ausserdem gleichseitig, also jede seiner Seiten $= 2c$, so wird $3a = c\sqrt{3}$ oder $a^2 = \frac{1}{3}c^2$. Es werden daher alle in der Ebene des Dreiecks durch I gezogenen Axen das Moment der Trägheit $= \frac{1}{6}Mc^2$ ergeben, und es wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe, welche durch I auf das Dreieck normal gezogen ist, $= \frac{1}{3}Mc^2$, oder doppelt so gross als jenes.

Zusatz 4.

§. 482. Diese letztere Eigenschaft gilt selbst allgemein. Da nämlich das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe, welche auf der Ebene des Dreiecks normal steht, $= \frac{1}{6}M(3a^2 + c^2)$, das Moment in Bezug auf die Axe $IF = \frac{1}{12}M[3a^2 + c^2 - \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}]$ und das in Bezug auf die Axe $IG = \frac{1}{12}M[3a^2 + c^2 + \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}]$ ist; so wird offenbar die Summe dieser beiden dem ersten gleich.

Anmerkung.

§. 483. Setzt man die übrigen Seiten des Dreiecks $AB = 2b$ und $AD = 2\partial$, wie $BD = 2c$ ist, so hat man zu bemerken, dass $9a^2 = 2b^2 + 2\partial^2 - c^2$ (§. 478.) und $\cos\zeta = \frac{\partial^2 - b^2}{3ac}$ ist; es wird daher

$$\sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4} = \tfrac{4}{3}\sqrt{b^4 + c^4 + \partial^4 - b^2c^2 - b^2\partial^2 - c^2\partial^2}.$$

Uebrigens kann man im allgemeinen nicht bestimmen, welche der beiden Axen IF und IG das grössere Moment liefert, da eben diese irrationale Formel bisweilen einen negativen Werth annehmen muss. Diess ergibt sich aus dem Falle, wo $\zeta = 90^0$, ihr Werth $3a^2 - c^2$ aber negativ wird, wenn $c^2 > 3a^2$ ist. Im Allgemeinen können aber diese zwei Werthe einander nicht gleich werden, weil die irrationale Formel nur dann verschwinden kann, wenn $2\zeta = 180^0$ und $3a^2 = c^2$ ist. Diese Beurtheilung wird aber in jedem beliebigen Falle, indem man die, beiden Axen zukommenden, Winkel θ anwendet, leicht mittelst der Formel

$$\tfrac{1}{2}Ma^2\sin\theta^2 + \tfrac{1}{6}Mc^2\sin(\zeta - \theta)^2$$

angestellt.

Aufgabe 35.

§. 484. (Fig. 57.) Ein Körper ist eine sehr dünne Scheibe, welche die Form des Parallelogramms $BD\partial b$ hat; man soll seine drei Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf dieselben bestimmen.

Auflösung.

Halbirt man die zwei einander entgegengesetzten Seiten BD und $b\partial$ in A und C und zieht man die gerade Linie AC, so wird in deren Mittelpunkte I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers liegen und die Masse des letztern setze man $=M$. Ferner setze man die Seiten $Bb=D\partial=AC=2a$, $BD=b\partial=2b$ und den spitzen Winkel $B=\partial=\zeta$; alsdann wird der Flächeninhalt $=4ab\sin\zeta=M$. Nun wird die eine der Hauptaxen in I auf der Ebene der Scheibe normal stehen, die zwei übrigen IF und IG werden in der Ebene selbst liegen und um diese zu finden, denke man sich irgend ein Element dM in Z, ziehe durch diesen Punkt zuerst $MN \# BD$, und setze $AP=t$ und $PZ=u$. Ferner fälle man aus Z auf AC das Perpendikel ZY und setze, nach §. 442., $IY=y$ und $YZ=z$. Da nun der Winkel $APZ=\zeta$ ist, so wird

$ZY=u\sin\zeta$ und $PY=u\cos\zeta$, also $y=a-t+u\cos\zeta$

und $z=u\sin\zeta$, wie auch $dM=dt.du\sin\zeta$;

es wird aber bei jener Rechnung $x=0$, damit $\int x^2dM=0$, $\int xydM=0$ und $\int xzdM=0$ sei. Wir haben demnach:

$$\int y^2dM=B=\int dt\int du\sin\zeta(a-t+u\cos\zeta)^2,$$
$$\int z^2dM=C=\int dt\int u^2du\sin\zeta^3$$

und $$\int yzdM=F=\int dt\int udu\sin\zeta^2(a-t+u\cos\zeta).$$

Combinirt man mit diesen das ähnliche Element Z', welches auf der andern Seite liegt und wofür u negativ ist; so wird:

$$B=2\sin\zeta\int dt\int du[(a-t)^2+u^2\cos\zeta^2],\ C=2\sin\zeta^3\int dt\int u^2du$$

und $$F=2\sin\zeta^2\cos\zeta\int dt\int u^2du.$$

Nachdem man die erste Integration angestellt hat, setze man $u=b$ und es wird sich alsdann ergeben:

$$B=2\sin\zeta\int dt[b(a-t)^2+\tfrac{1}{3}b^3\cos\zeta^2],\ C=\tfrac{2}{3}b^3\sin\zeta^3\int dt$$

und $$F=\tfrac{2}{3}b^3\sin\zeta^2\cos\zeta\int dt.$$

Stellt man hierauf die zweite Integration an, so wird man, indem man $t=2a$ setzt, erhalten:

$$B=\tfrac{4}{3}ab\sin\zeta[a^2+b^2\cos\zeta^2]=\tfrac{1}{3}M[a^2+b^2\cos\zeta^2],$$
$$C=\tfrac{4}{3}ab^3\sin\zeta^3=\tfrac{1}{3}Mb^2\sin\zeta^2$$

und $$F=\tfrac{4}{3}ab^3\sin\zeta^2\cos\zeta=\tfrac{1}{3}Mb^2\sin\zeta\cos\zeta.$$

Hieraus schliesst man, dass das Moment der Trägheit in Bezug auf die erste Axe, welche in I auf der Scheibe normal steht,
$$=B+C=\tfrac{1}{3}M(a^2+b^2)$$
ist; dasselbe ist also nicht von der Schiefe des Parallelogramms, sondern nur von den Seiten abhängig. Für die übrigen Axen IF und IG finden wir aber, indem wir den Winkel $AIF=\theta$ setzen,
$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2F}{B-C}=\frac{2b^2\sin\zeta\cos\zeta}{a^2+b^2\cos2\zeta}=\frac{b^2\sin2\zeta}{a^2+b^2\cos2\zeta}$$
und der doppelte Werth ergibt die beiden Winkel AIF und AIG. Das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Axen ist
$$B\sin\theta^2+C\cos\theta^2-2F\sin\theta\cos\theta$$
$$=\tfrac{1}{3}M[a^2\sin\theta^2+b^2\cos\zeta^2\sin\theta^2+b^2\sin\zeta^2\cos\theta^2-2b^2\sin\zeta\cos\zeta\sin\theta\cos\theta]$$
$$=\tfrac{1}{6}M[a^2-a^2\cos2\theta+b^2-b^2\cos2\zeta\cos2\theta-b^2\sin2\zeta\sin2\theta]$$
$$=\tfrac{1}{6}M[a^2+b^2-a^2\cos2\theta-b^2\cos(2\zeta-2\theta)].$$
Da nun $\sin 2\theta=\dfrac{b^2\sin2\zeta}{\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos2\zeta+b^4}}$ und $\cos2\theta$ $=\dfrac{a^4+b^2\cos2\zeta}{\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos2\zeta+b^4}}$ ist, so wird dieses Moment
$$=\tfrac{1}{6}M[a^2+b^2-\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos2\zeta+b^4}],$$
wo die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens so wohl die beiden Axen IF und IG, als auch die Momente der Trägheit in Bezug auf sie ergibt. Es zeigt sich daher, dass die Summe dieser zwei Momente dem ersten gleich ist.

Zusatz 1.

§. 485. Hat $a^2+b^2\cos2\zeta$ einen positiven Werth und nimmt man das Wurzelzeichen positiv, so wird der Winkel $2\theta<90^\circ$, also $AIF<45^\circ$. In Bezug auf die Axe IF wird das Moment der Trägheit ein minimum und
$$=\tfrac{1}{6}M[a^2+b^2-\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos2\zeta+b^4}],$$
in Bezug auf die Axe IG hat das Moment einen mittlern Werth.

Zusatz 2.

§. 486. Hat $a^2+b^2\cos2\zeta$ einen negativen Werth und wird das Wurzelzeichen für die Axe IF positiv genommen, so wird der Winkel $2\theta>90^\circ$ und daher $AIF>45^\circ$; ferner wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IF ein minimum.

Zusatz 3.

§. 487. Zieht man die Diagonale durch die spitzen Winkel B und ∂, so findet man, weil $\operatorname{tg}AIB=\dfrac{b\sin\zeta}{a+b\cos\zeta}$ ist,

$$\mathrm{tg}\,2BIF = \frac{2ab\sin\zeta(a^2-b^2)}{a^4+2a^3b\cos\zeta+2a^2b^2\cos2\zeta+2ab^3\cos\zeta+b^4}.$$

Hieraus ersieht man, dass im Rhombus, wo $a=b$ ist, beide Diagonalen Hauptaxen sind, während im Rechteck die gerade Linie AC eine Hauptaxe ist.

Beispiel 1.

§. 488. Ist das Parallelogramm $Bb\partial D$ ein Rechteck, so wird, weil $\zeta=90^0$ ist, $\mathrm{tg}2\theta=0$, also $\theta=0$ oder $\theta=90^0$. In Bezug auf die in I auf der Scheibe senkrecht stehende Axe wird daher das Moment der Trägheit

$$= \tfrac{1}{3}M(a^2+b^2).$$

Die zweite Hauptaxe ist die Linie AC, und in Bezug auf sie das Moment der Trägheit $=\tfrac{1}{3}Mb^2$;

die dritte Hauptaxe ist aber eine, in der Ebene der Scheibe auf AC normale Linie und in Bezug auf sie das Moment der Trägheit $= \tfrac{1}{3}Ma^2$.

Hierbei sind die Seiten $Bb=D\partial=2a$ und $B\partial=b\partial=2b$.

Beispiel 2.

§. 489. Ist das Parallelogramm $Bb\partial D$ ein Rhombus, also $b=a$ und jede seiner einzelnen Seiten $=2a$, so wird, wenn die spitzen Winkel $=\zeta$ sind,

$$\mathrm{tg}2\theta=\frac{\sin2\zeta}{1+\cos2\zeta}=\mathrm{tg}\zeta,$$

also entweder $\theta=\tfrac{1}{2}\zeta$ oder $\theta=90^0+\tfrac{1}{2}\zeta$. In Bezug auf die erste, in I auf der Ebene des Rhombus normal stehende, Hauptaxe ist daher das Moment der Trägheit $=\tfrac{2}{3}Ma^2$. Die beiden andern Hauptaxen sind die Diagonalen $B\partial$ und Db, und in Bezug auf die erstere das Moment der Trägheit $=\tfrac{1}{3}Ma^2(1-\cos\zeta)$ $=\tfrac{2}{3}Ma^2\sin\tfrac{1}{2}\zeta^2$, in Bezug auf die letztere ist es $=\tfrac{1}{3}Ma^2$ $(1+\cos\zeta)=\tfrac{2}{3}Ma^2\cos\tfrac{1}{2}\zeta^2$.

Zusatz 4.

§. 490. Geht daher das Parallelogramm in ein Quadrat über, dessen Seite $=2a$ ist, so kann man alle, in seiner Ebene durch den Mittelpunkt der Trägheit I gezogenen, geraden Linien für Hauptaxen halten, und in Bezug auf sie wird das Moment der Trägheit $=\tfrac{1}{3}Ma^2$; in Bezug auf die Axe, welche in I auf dem Quadrat normal steht, ist aber das Moment doppelt so gross und $=\tfrac{2}{3}Ma^2$.

Aufgabe 36.

§. 491. Ein Körper ist eine sehr dünne, kreisförmige ebene Scheibe; man soll seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen.

Auflösung.

(Figur 55.) Es sei der Radius des Kreises $= a$, also sein Flächeninhalt, welcher die Masse M darstellt, $= \pi a^2$. Da nun die eine der Hauptaxen im Mittelpunkte I auf der Ebene des Kreises normal steht, so setze man für ein beliebiges in Z gelegenes Element dM die Coordinaten $IP = y$ und $PZ = z$. Da nun $dM = dy.dz$ ist, so wird

$$\int y^2 dM = \int dy \int y^2 dz = \int dy . y^2 z = \int y^2 dy \sqrt{a^2 - y^2},$$

indem man $z = \sqrt{a^2 - y^2}$ gesetzt hat. Dieses Integral wird aber reducirt auf die Form

$$\int y^2 dM = \tfrac{1}{8} a^4 \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \tfrac{1}{8} y (a^2 - 2y^2) \sqrt{a^2 - y^2},$$

und wenn man dieses viermal nimmt und dabei $y = a$ setzt, so erhält man

$$B = \frac{\pi}{4} a^4 = \tfrac{1}{4} M a^2.$$

Auf ähnliche Weise wird aber $\int z^2 dM = C = \tfrac{1}{4} M a^2$. Ferner wird $\int yz dM$, wenn man auf der andern Seite des Durchmessers ein ähnliches Element damit verbindet, auf 0 reducirt, so dass $\int yz dM = F = 0$ wird. Hiernach haben wir $B - C = 0$ und

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{0}{0},$$

der Winkel θ ist also unbestimmt, woraus man erkennt, was auch durch sich selbst klar ist, dass alle Durchmesser für Hauptaxen gehalten werden können, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit $= \tfrac{1}{4} M a^2$ ist. In Bezug auf die erste Axe, welche im Mittelpunkte I auf der Ebene des Kreises normal steht, ist das Moment der Trägheit $= B + C = \tfrac{1}{2} M a^2$.

Anmerkung.

§. 492. Da hier das Element der Masse $dM = dydz$ ist, so hat man zu bemerken, dass dasselbe immer positiv bleibt, wenn auch y oder z negativ angenommen wird, in welchem Falle sonst auch die Differentiale negativ angenommen werden würden. Bei dieser Rechnung muss man sich demnach gehörig davor hüten, dass nicht, wenn man die Coordinaten negativ annimmt, der Ausdruck des Elements der Masse dM als negativ in die Rechnung eintrete. Es wird daher angemessen sein, für die einzelnen Gegenden, wo die Coordinaten entgegengesetzte Zeichen haben, die Rechnung getrennt anzustellen.

Uebrigens erhält man denselben Werth $B = \int y^2 dM = \tfrac{1}{4} \pi a^4$,

wenn man $IZ = r$ und den Winkel $AIZ = \varphi$ setzt. Es wird nämlich alsdann

$dM = rdrd\varphi$ und $y = r\cos\varphi$, also $y^2dM = r^3drd\varphi\cos\varphi^2$

und man erhält, indem man dieses Differential nach der Veränderlichen r integrirt und dann $r = a$ setzt:

$$\tfrac{1}{4}a^4d\varphi\cos\varphi^2.$$

Da $\cos\varphi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi$, so ergibt sich das Integral des letzten Ausdrucks

$$= \tfrac{1}{4}a^4(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi).$$

Setzt man nun $\varphi = 2\pi$, so ergibt sich, weil $\sin 4\pi = 0$ ist, wie vorhin $\tfrac{1}{4}\pi a^4$, woraus man ersieht, dass die obige Vorsichtsmaassregel dem Gesetz der Continuität nicht entgegensteht.

Aufgabe 37.

§. 493. (Figur 59.) Ein Körper sei eine sehr dünne ebene Scheibe, welche eine beliebige Figur $ACBD$ hat; man soll seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen.

Auflösung.

Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit der Figur, alsdann wird offenbar die gerade, in I auf die Ebene normale, Linie eine der Hauptaxen sein. Ferner nehme man in der Ebene selbst zwei auf einander normale Axen AB und CD an und setze für ein beliebiges in Z befindliches Element dM die Coordinaten $IP = y$ und $PZ = z$, alsdann wird $dM = dydz$ und

$$\int y^2dM = \int dy \int y^2dz = \int y^2zdy.$$

Setzt man demnach $z = PM$, so wird

$$\int y^2dM = \int PM.y^2dy,$$

dessen Werth für die einzelnen Gegenden AIC, AID, BIC und BID ermittelt werden muss und deren Summe $= B$ sein wird; so dass wir haben

$$B = \int IP^2.MN.dIP + \int IQ^2.\mu\nu.dIQ.$$

Hierauf ist $\int z^2dM = \int dy \int z^2dz = \tfrac{1}{3}\int z^3dy = \tfrac{1}{3}\int PM^3.dy$, so dass wir haben $C = \tfrac{1}{3}\int[PM^3 + PN^3]d.IP + \tfrac{1}{3}\int[Q\mu^3 + Q\nu^3]d.IQ$

Ferner ist $\int yzdM = \int dy \int yzdz = \tfrac{1}{2}\int yz^2dy = \tfrac{1}{2}\int PM^2ydy$, dessen Werth in den Gegenden AID und BIC negativ, in BID aber positiv ist, wesshalb wir haben werden:

$$F = \tfrac{1}{2}\int IP[PM^2 - PN^2]d.IP - \tfrac{1}{2}\int IQ[Q\mu^2 - Q\nu^2]d.IQ.$$

Endlich wird die ganze Masse

$$M = \int MN.d.IP + \int \mu\nu.dIQ.$$

Hat man diese Werthe gefunden, so wird das Moment der

Trägheit in Bezug auf die Axe, welche in I auf der Ebene normal steht $= B + C$.

Ferner seien die übrigen Hauptaxen FIf und GIg und wir finden, indem wir den Winkel $AIF = \theta$ setzen, $\mathrm{tg}\,2\theta = \frac{2F}{B-C}$, wie auch das Moment der Trägheit in Bezug auf auf die Axe FIf $= B\sin\theta^2 + C\cos\theta^2 - 2F\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}B$
$+ \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(B-C)\cos 2\theta - F\sin 2\theta$.

Da nun aber $\sin 2\theta = \frac{2F}{\sqrt{(B-C)^2 + 4F^2}}$ und $\cos 2\theta$ $= \frac{B-C}{\sqrt{(B-C)^2 + 4F^2}}$, so erhalten wir das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe FIf

$$= \tfrac{1}{2}(B+C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(B-C)^2 + 4F^2}$$

und das in Bezug auf die Axe GIg

$$= \tfrac{1}{2}(B+C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(B-C)^2 + 4F^2}.$$

Zusatz 1.

§. 494. Die Momente der Trägheit, in Bezug auf die Axen Ff und Gg zusammengenommen, sind daher gleich dem Momente der Trägheit in Bezug auf die erste Hauptaxe, welche in I auf der Ebene der Scheibe normal steht.

Zusatz 2.

§. 495. Ist die gerade Linie AB ein Durchmesser der Figur, also $PM = PN$, so verschwindet der Werth von F; diess geschieht auch, wenn die gerade Linie CD ein Durchmesser ist, also für $IQ = IP$, $Q\mu = PM$ wird. So oft aber $F = 0$ ist, werden wegen $\mathrm{tg}\,2\theta = 0$, die geraden Linien AB und CD selbst Hauptaxen.

Zusatz 3.

§. 496. In diesem Falle, wo $F = 0$ ist und AB und CD Hauptaxen sind, wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe Ff oder $AB = C$ und das in Bezug auf die Axe Gg oder $CD = B$. Sind diese ausserdem einander gleich, so haben wir $\mathrm{tg}\,2\theta = \frac{0}{0}$ und es werden alle durch I gezogenen geraden Linien gleiche Momente $= B = C$ haben.

Zusatz 4.

§. 497. Findet man ausser dem Durchmesser AB noch eine andere durch I gezogene gerade Linie, in Bezug auf

welche das Moment der Trägheit jenem gleich ist, so werden durchaus alle durch I gezogenen geraden Linien dieselbe Eigenschaft besitzen und gleiche Momente der Trägheit haben.

Aufgabe 38.

§. 498. Ein Körper ist eine dünne, ebene und in die Figur eines regelmässigen Vielecks ausgebildete Scheibe; man soll seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen.

Auflösung.

(Figur 60.) Der Mittelpunkt der Trägheit eines solchen Vielecks wird im Mittelpunkte I des darum beschriebenen Kreises liegen, den Radius des letzteren IA setze man $=a$ und die Zahl der Seiten $=n$. Hiernach wird der Winkel $AIB = \frac{2\pi}{n}$, und wenn derselbe durch die gerade Linie IG halbirt ist, der Winkel $AIG = \frac{\pi}{n}$, $AB = 2a\sin\frac{\pi}{n}$ und $IG = a\cos\frac{\pi}{n}$; also der Flächeninhalt des Dreiecks $AIB = a^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{n}$ und der Flächeninhalt des Vielecks, welcher die Stelle der Masse M vertritt, $= \frac{1}{2}\,na^2\sin\frac{2\pi}{n}$. Zuerst bemerke ich, dass alle in der Ebene der Scheibe durch I gezogenen geraden Linien gleiche Momente haben werden (§. 497.), von denen je zwei zusammengenommen das Moment in Bezug auf die, in I normal auf der Ebene der Scheibe stehende, Axe ausmachen werden. Dieses Moment kann aber aus dem obigen abgeleitet werden. Man betrachte nämlich das Dreieck AIB, dessen Masse $=m$ gesetzt wird und dessen Mittelpunkt der Trägheit in i ist, so dass

$Gi = \frac{1}{3}a\cos\frac{\pi}{n}$ und $Ii = \frac{2}{3}a\cos\frac{\pi}{n}$ wird, wobei $AG = a\sin\frac{\pi}{n}$ ist.

Da nun dieses Dreieck gleichschenklig ist, so ist (nach §. 481.) sein Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe, welche in i normal auf der Ebene des Dreiecks steht,

$$= \tfrac{1}{2}m.Gi^2 + \tfrac{1}{6}m.AG^2 = m\left[\tfrac{1}{18}a^2\cos\frac{\pi^2}{n} + \tfrac{1}{6}a^2\sin\frac{\pi^2}{n}\right];$$

hiernach sein Moment in Bezug auf die, in I auf derselben Ebene normal stehende, Axe

$$= m\left[\tfrac{1}{18}a^2\cos\frac{\pi^2}{n} + \tfrac{1}{6}a^2\sin\frac{\pi^2}{n} + \frac{4}{9}a^2\cos\frac{\pi^2}{n}\right]$$

$$= ma^2\left[\tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi^2}{n} + \tfrac{1}{6}\sin\frac{\pi^2}{n}\right].$$

Multiplicirt man dasselbe in n, so erhält man, weil $nm=M$ ist, das Moment des ganzen Vielecks in Bezug auf die in I normal stehende Axe

$$=Ma^2\left[\tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi^2}{n}+\tfrac{1}{6}\sin\frac{\pi^2}{n}\right]=\tfrac{1}{3}Ma^2\left[1+\tfrac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right].$$

In Bezug auf jede Axe, welche in der Ebene der Scheibe durch den Punkt I gezogen wird, ist aber das Moment der Trägheit halb so gross, also

$$=\tfrac{1}{6}Ma^2\left[1+\tfrac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right].$$

Zusatz 1.

§. 499. Setzt man ausserdem die Seite des Vielecks $AB=c$, so dass $c=2a\sin\frac{\pi}{n}$, also $a=\frac{c}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ wird; so ist das Moment der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxe, welche in I normal auf der Ebene steht,

$$=\frac{Mc^2}{12\sin\frac{\pi^2}{n}}\left(1+\tfrac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right)=\tfrac{1}{12}Mc^2\cdot\frac{2+\cos\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}.$$

In Bezug auf die übrigen Hauptaxen ist das Moment halb so gross.

Zusatz 2.

§. 500. Führt man ausser dem Radius des umschriebenen Kreises $IA=a$ die Seite des Vielecks $AB=c$ ein, so wird, weil

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{c}{2a} \text{ und } \cos\frac{2\pi}{n}=1-\frac{c^2}{2a^2}$$

ist, das Moment der Trägheit in Bezug auf die in I normal stehende Axe

$$=\tfrac{1}{3}Ma^2\left[1+\tfrac{1}{2}-\frac{c^2}{4a^2}\right]=\tfrac{1}{12}M[6a^2-c^2].$$

In Bezug auf die in der Ebene durch I gezogenen Axen ist das Moment halb so gross.

Aufgabe 39.

§. 501. (Figur 61.) Ein Körper ist ein gerader Cylinder, dessen Axe $Aa=2a$ und Radius der Grundfläche $AB=AD=c$ ist; man soll seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie finden.

Auflösung.

Da der Flächeninhalt der Grundfläche $=\pi c^2$ ist, so wird der Körper des Cylinders oder seine Masse $=2\pi ac^2=M$. Im Mittelpunkte I der Axe wird aber sein Mittelpunkt der Trägheit liegen, so dass $AI=Ia=a$ ist. Diese Axe Aa wird aber offenbar selbst eine der Hauptaxen sein und nehmen wir durch dieselbe eine beliebige Ebene $BDbd$ an, so erhält man für ein beliebiges Element dM in Z die Coordinaten $IX=x$, $XY=y$ und $YZ=z$, also $dM=dxdydz$. Hieraus schliesst man auf die folgenden Werthe:

1) $\int x^2dM=\int x^2dxdydz$, woraus, wenn man zuerst x und y als constant betrachtet und nach der Integration $z=\sqrt{c^2-y^2}$ setzt, sich ergiebt

$$\int x^2dM=\int x^2dx\int dy\sqrt{c^2-y^2}.$$

Nun ist aber $\int_0^c dy\sqrt{c^2-y^2}$ der Flächeninhalt des durch X gelegten Schnittes $=\pi c^2$, so dass man

$$\int x^2dM=\pi c^2\int x^2dx$$

erhält und wenn man dieses Integral sowohl bis A, als bis a, d. h. von $x=-a$ bis $x=+a$ ausdehnt, so ergibt sich $\frac{2}{3}\pi c^2a^3$. Es wird demnach

$$\int x^2dM=A=\frac{1}{3}M.a^2.$$

2) $\int y^2dM=\int y^2dxdydz=\int dx\int y^2dy\sqrt{c^2-y^2}$.

Setzt man aber nach der Integration $y=c$, so wird $\int y^2dy\sqrt{c^2-y^2}$ $=\frac{1}{16}\pi c^4$, welches man vierfach nehmen muss, so dass

$$\int y^2dM=\frac{1}{4}\pi c^4\int dx$$

wird. Hieraus erhält man, durch den ganzen Cylinder ausgedehnt,

$$\int y^2dM=\frac{2}{4}\pi c^4a=\frac{1}{4}Mc^2=B.$$

3) $\int z^2dM=\int z^2dxdydz$. Man nehme zuerst x und z als constant an und setze $y=\sqrt{c^2-z^2}$, alsdann wird

$$\int z^2dM=\int dx\int z^2dz\sqrt{c^2-z^2};$$ also wie vorhin

$$\int z^2dM=\frac{1}{4}Mc^2=C=B.$$

4) Das Integral $\int yzdM$ geht, wenn man es mit einem ähnlichen Elemente dM unterhalb der Ebene $BDbd$ verbindet, in Null über, so dass wir erhalten

$$\int yzdM=F=0.$$

Unter diesen Voraussetzungen wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe Aa

$$=B+C=\frac{1}{2}Mc^2,$$

zur Bestimmung der übrigen zwei Axen, welche auf derselben normal stehen, hat man aber

$$\mathrm{tg}2\theta = \frac{2F}{B-C} = \frac{0}{0},$$

so dass alle Durchmesser des in I auf Aa normalen Schnittes als Hauptaxen angesehen werden können, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit

$$= A + B \text{ (§. 477.) } = M[\tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2]$$

sein wird.

Zusatz 1.

§. 502. Nimmt man eine andere beliebige Axe an, welche durch I geht und mit der Axe Aa einen Winkel ζ bildet, so wird das Moment der Trägheit in Bezug auf sie

$$= (B+C)\cos\zeta^2 + (A+B)\sin\zeta^2 \text{ (§. 476.)}$$
$$= M[\tfrac{1}{2}c^2\cos\zeta^2 + \tfrac{1}{3}a^2\sin\zeta^2 + \tfrac{1}{4}c^2\sin\zeta^2]$$
$$= M[\tfrac{1}{3}a^2\sin\zeta^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}c^2\sin\zeta^2].$$

Zusatz 2.

§. 503. Es ist möglich, dass alle Momente in Bezug auf die durch I gezogenen geraden Linien einander gleich werden, was geschieht, wenn $\tfrac{1}{3}a^2 = \tfrac{1}{4}c^2$ oder $a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, also $\frac{c}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Winkel $AaB = 30^0$ wird. Das Dreieck BaD wird mithin in diesem Falle gleichseitig und jedes Moment $= \tfrac{1}{2}Mc^2 = \tfrac{1}{8}M.BD^2$.

Aufgabe 40.

§. 504. (Figur 62.) Ein Körper ist ein gerader Kegel, dessen Scheitel A, Höhe $AC = a$ und Halbmesser der Grundfläche $CB = CD = c$ ist; man soll seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie bestimmen.

Auflösung.

Da der Flächeninhalt der Grundfläche $= \pi c^2$ ist, so wird der körperliche Inhalt oder die Masse $M = \tfrac{1}{3}\pi ac^2$; ferner wird der Mittelpunkt der Trägheit I so auf der Axe liegen, dass $CI = \tfrac{1}{4}a$ und $AI = \tfrac{3}{4}a$ ist. Man nehme nun ein beliebiges Element dM in Z an, wofür die Coordinaten $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ sind, alsdann wird $dM = dxdydz$. Nun setze man aber $AX = t$, alsdann wird $XM = \frac{ct}{a}$ und $x = \frac{3}{4}a - t$, und man muss nichts desto weniger $dM = dtdydz$ annehmen. Wir haben demnach die folgenden Formeln zu entwickeln:

1) $\int x^2 dM = A = \int(\tfrac{3}{4}a - t)^2 dt\,dy\,dz$, welches Integral, wenn man zuerst t und y als constant annimmt und $z = \sqrt{\frac{c^2t^2}{a^2} - y^2}$ setzt, übergeht in $\int(\tfrac{3}{4}a - t)^2 dt \int dy \sqrt{\frac{c^2t^2}{a^2} - y^2}$. Für den ganzen *Schnitt in X* wird

$$\int dy \sqrt{\frac{c^2t^2}{a^2} - y^2} = \frac{\pi c^2 t^2}{a^2} \text{ (§. 501, 1.)},$$

so dass noch zu integriren übrig bleibt:

$$\frac{\pi c^2}{a^2}\int t^2 dt (\tfrac{3}{4}a - t)^2 = \frac{\pi c^2}{a^2}[\tfrac{3}{16}a^2t^3 - \tfrac{3}{8}at^4 + \tfrac{1}{5}t^5].$$

Setzt man nun $t = a$, so wird

$$A = \tfrac{1}{80}\pi c^2 a^3 = \tfrac{3}{80}Ma^2.$$

2) $\int y^2 dM = B = \int y^2 dt\,dy\,dz = \int dt \int y^2 dy \sqrt{\frac{c^2t^2}{a^2} - y^2}$,

als erstes Integral in Bezug auf z und von $z = 0$ bis $z = \sqrt{\frac{c^2t^2}{a^2} - y^2}$ ausgedehnt. Bleibt t noch constant, so wird

$$\int_0^{\frac{ct}{a}} y^2 dy \sqrt{\frac{c^2t^2}{a^2} - y^2} = \tfrac{1}{16}\pi \frac{c^4t^4}{a^4} \text{ (§. 501, 2.)}.$$

Nimmt man den letzten Werth vierfach, so bleibt jetzt noch zu integriren

$$\int \tfrac{1}{4}\pi \frac{c^4t^4}{a^4} dt = \tfrac{1}{20}\pi \frac{c^4t^5}{a^4}$$

und indem man für den ganzen Kegel $t = a$ setzt,

$$B = \tfrac{1}{20}\pi a c^4 = \tfrac{3}{20}Mc^2.$$

3) $\int z^2 dM = C$ ergibt auf gleiche Weise

$$C = \tfrac{3}{20}Mc^2 = B \text{ und}$$

4) wird $\int yz\,dM = F$ wie vorhin verschwinden.

Da nun AC eine der Hauptaxen ist, so haben wir in Bezug auf sie das Moment

$$= B + C = \tfrac{3}{10}Mc^2.$$

Die übrigen Hauptaxen sind alle Durchmesser des in I auf die Axe AC normalen Schnittes und in Bezug auf sie das Moment der Trägheit

$$= A + B = \tfrac{3}{80}M[a^2 + 4c^2].$$

Zusatz.

§. 505. Im Fall dass $a^2 + 4c^2 = 8c^2$ oder $a = 2c$, also $AC = BD$ ist, werden alle durch I gezogenen geraden Linien

die Eigenschaft von Hauptaxen haben und in Bezug auf sie das Moment der Trägheit

$$= \tfrac{3}{10} Mc^2.$$

Aufgabe 41.

§. 506. (Fig. 63.) Ein Körper ist eine aus homogener Materie zusamengesetzte Kugel, deren Mittelpunkt I und Halbmesser $IA = a$; man soll ihr Moment der Trägheit in Bezug auf eine beliebige, durch ihren Mittelpunkt gehende, Axe bestimmen.

Auflösung.

Da der Halbmesser $= a$ ist, so wird der Flächeninhalt des grössten Kreises $= \pi a^2$, die Oberfläche der Kugel $= 4\pi a^2$ und hieraus ihr körperlicher Inhalt oder ihre Masse $= \tfrac{4}{3}\pi a^3$. Nun setze man für ein beliebiges, in Z befindliches Element dM die Coordinaten $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$, alsdann wird in Bezug auf die Axe AC das Moment der Trägheit $= \int dM(y^2 + z^2)$. Man setze $XZ = r$ und den Winkel $YXZ = \varphi$, alsdann wird

$$y = r\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi \text{ und } dM = r\,dr\,d\varphi\,dx, \text{ also}$$

$$\int r^2 dM = \int r^3 dr\,d\varphi\,dx = 2\pi \int r^3 dr\,dx, \text{ weil } \int d\varphi = 2\pi \text{ ist.}$$

Man nehme nun r als veränderlich an und setze $r = XM = \sqrt{a^2 - x^2}$, wodurch wir erhalten

$$\int r^2 dM = 2\pi \int \tfrac{1}{4} r^4 dx = \tfrac{1}{2}\pi \int dx(a^2 - x^2)^2 = \tfrac{1}{2}\pi [a^4 x - \tfrac{2}{3} a^2 x^3 + \tfrac{1}{5} x^5].$$

Setzt man $x = a$ für die eine Halbkugel und verdoppelt man diesen Ausdruck, so erhält man das gesuchte Moment der Trägheit

$$= \pi . \tfrac{8}{15} a^5 = \tfrac{2}{5} Ma^2.$$

Aufgabe 42.

§. 507. (Figur 64.) Es sei ein Körper ein beliebiges Konoid, welches durch Umwälzung der Linie AMB um die Axe AC entstanden ist; man soll seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie finden.

Auflösung.

Es sei $AC = a$ und zur Bestimmung der Curve $AX = t$ und $XM = u$, so dass eine Gleichung zwischen t und u gegeben ist; alsdann wird der körperliche Inhalt oder die Masse

$$M = \pi \int u^2 dt,$$

wo man nach der Integration $t = a$ zu setzen hat. Ferner wird aber der Mittelpunkt der Trägheit in I liegen, so dass

$$AI = \frac{\int t u^2 dt}{\int u^2 dt}$$

ist. Man setze demnach der Kürze wegen $AI = f$, so dass

$\int tu^2dt = f\int u^2dt$ wird; es ist aber AC eine der Hauptaxen. Zur Bestimmung des in Z gelegenen Elementes dM seien die Coordinaten $IX = x = f - t$, $XY = y$ und $YZ = z$, man setze ferner $XZ = r$ und den Winkel $YXZ = \varphi$; alsdann wird

$$dM = rdrdtd\varphi,\ y = r\cos\varphi \text{ und } z = r\sin\varphi.$$

Nun betrachte man die folgenden Formeln:

$$1)\quad \int x^2dM = \int(f-t)^2rdrdtd\varphi = 2\pi\int(f-t)^2rdrdt,$$

weil $\int d\varphi = 2\pi$ ist. Es sei t noch constant und es wird, indem man $r = XM = u$ setzt,

$$\int x^2dM = \pi\int(f-t)^2u^2dt = A,$$

also

$$A = \pi f^2\int u^2dt - 2\pi f\int tu^2dt + \pi\int t^2u^2dt = -\pi f^2\int u^2dt + \pi\int t^2u^2dt$$

$$= M\left[-f^2 + \frac{\int t^2u^2dt}{\int u^2dt}\right];$$

$$2)\quad \int y^2dM = \int r^3drdtd\varphi\cos\varphi^2 = \pi\int r^3drdt,$$

weil nämlich $\int d\varphi\cos\varphi^2 = \int d\varphi(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi) = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi$, welches für $\varphi = 2\pi$ in π übergeht. Ferner ergibt sich, indem man $r = u$ setzt,

$$\int y^2dM = B = \tfrac{1}{4}\pi\int u^4dt = \frac{M\int u^4dt}{4\int u^2dt}.$$

Denselben Werth erhält $\int z^2dM = C = \int r^3drdtd\varphi\sin\varphi^2$, und endlich wird $\int yzdM = F = 0$. Nachdem man diese Entwickelungen vorgenommen hat, ergibt sich das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AC

$$= B + C = \frac{M\int u^4dt}{2\int u^2dt},$$

indem man nach der Integration $t = a$ setzt. Es werden aber alsdann alle Durchmesser in dem Schnitt, welcher in I auf AC normal ist, die Stelle der Hauptaxen vertreten und man findet in Bezug auf sie das Moment der Trägheit

$$= A + B = M\left[-f^2 + \frac{4\int t^2u^2dt + \int u^4dt}{4\int u^2dt}\right]$$

$$= M\left[\frac{\int u^2dt(4t^2 + u^2)}{4\int u^2dt} - f^2\right].$$

Beispiel 1.

§. 508. Es sei der Körper eine Halbkugel oder AMB der Quadrant eines Kreises, dessen Radius $CA = CB = a$ ist; alsdann wird

$$u^2 = 2at - t^2 \text{ und } \int u^2dt = at^2 - \tfrac{1}{3}t^3, \text{ oder } \int_0^a u^2dt = \tfrac{2}{3}a^3.$$

Ferner wird

$$\int tu^2dt = \tfrac{2}{3}at^3 - \tfrac{1}{4}t^4,\ \text{oder} \int_0^a tu^2dt = \tfrac{5}{12}a^4;$$

mithin $f = AI = \tfrac{5}{8}a$ und $CI = \tfrac{3}{8}a$.

Hierauf erhalten wir

$$\int u^4dt = \int dt[4a^2t^2 - 4at^3 + t^4] = \tfrac{4}{3}a^2t^3 - at^4 + \tfrac{1}{5}t^5,\ \text{oder} \int_0^a u^4dt = \tfrac{8}{15}a^5$$

und $\int t^2u^2dt = \int t^2dt[2at - t^2] = \tfrac{1}{2}at^4 - \tfrac{1}{5}t^5$, oder $\int_0^a t^2u^2dt = \tfrac{3}{10}a^5$.

Das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AC wird

$$= \frac{M.8a^5}{15.\tfrac{4}{3}a^3} = \tfrac{2}{5}M.a^2,$$

und in Bezug auf jede andere, auf derselben in I normal stehende Axe $= M[-\tfrac{25}{64}a^2 + \tfrac{13}{20}a^2] = \tfrac{83}{320}Ma^2$, so dass jenes Moment sich zu diesem wie 128 : 83 verhält.

Beispiel 2.

§. 509. (Figur 65.) Es sei der Körper ein abgekürzter Kegel, dessen Axe $AC = a$, Radius der einen Basis $BC = c$ und Radius der andern $AD = b$ ist. Es wird alsdann

$$u = b + \frac{(c-b)t}{a} \text{ und } u^2 = b^2 + \frac{2b(c-b)t}{a} + \frac{(c-b)^2t^2}{a^2}.$$

Um daher den Mittelpunkt der Trägheit I zu finden, haben wir

$$\int u^2dt = b^2t + \frac{b(c-b)t^2}{a} + \frac{(c-b)^2t^3}{3a^2},\ \text{oder} \int_0^a u^2dt = \tfrac{1}{3}a[b^2 + bc + c^2]$$

und so den körperlichen Inhalt oder die Masse

$M = \tfrac{1}{3}\pi a[b^2 + bc + c^2]$. Ferner wird

$$\int tu^2dt = \tfrac{1}{2}b^2t^2 + \frac{2b(c-b)t^3}{3a} + \frac{(c-b)^2t^4}{4a^2}\ \text{oder} \int_0^a tu^2dt = \tfrac{1}{12}a^2 \times [b^2 + 2bc + 3c^2],$$

woraus wir erhalten den Abstand

$$AI = f = \frac{a[b^2 + 2bc + 3c^2]}{4[b^2 + bc + c^2]} \text{ und } CI = \frac{a[c^2 + 2bc + 3b^2]}{4[b^2 + bc + c^2]}.$$

Ferner wird weil $u^4 = b^4 + \frac{4b^3(c-b)t}{a} + \frac{6b^2(c-b)^2t^2}{a^2} + \frac{4b(c-b)^3t^3}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^4}{a^4}$ ist,

$$\int u^4dt = b^4t + \frac{2b^3(c-b)t^2}{a} + \frac{2b^2(c-b)^2t^3}{a^2} + \frac{b(c-b)^3t^4}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^5}{5a^4}$$

und $\int_0^a u^4dt = \tfrac{1}{5}a[b^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + c^4]$,

endlich $\int t^2u^2dt = \tfrac{1}{3}b^2t^3 + \tfrac{1}{2}\frac{b(c-b)t^4}{a} + \tfrac{1}{5}\frac{(c-b)^2t^5}{a^2}$

und $\int_0^a t^2u^2dt = \tfrac{1}{30}a^3[b^2 + 3bc + 6c^2]$.

Aus diesen Werthen erhält man das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AC

$$=\tfrac{3}{10}M.\frac{b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4}{b^2+bc+c^2}=\tfrac{3}{10}M.\frac{b^5-c^5}{b^3-c^3}.$$

Das Moment in Bezug auf die Axen, welche in I auf AC normal stehen, wird aber

$$=\tfrac{3}{20}M.\frac{b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4}{b^2+bc+c^2}$$

$$+\tfrac{1}{80}Ma^2\left\{\frac{8(b^2+3bc+6c^2)}{b^2+bc+c^2}-\frac{5(b^2+2bc+3c^2)^2}{[b^2+bc+c^2]^2}\right\}$$

$$=\tfrac{3}{20}M.\frac{b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4}{b^2+bc+c^2}+\tfrac{3}{80}Ma^2\frac{(b+c)^4+4b^2c^2}{(b^2+bc+c^2)^2}.$$

Zusatz 1.

§. 510. Ist $b=c$, so ergibt sich der Fall eines Cylinders, in welchem $AI=f=\tfrac{1}{2}a$, das Moment der Trägheit in Bezug auf $AC=\tfrac{1}{2}Mc^2$ und das Moment in Bezug auf die Axen, welche auf AC in I normal stehen, $=\tfrac{1}{4}Mc^2+\tfrac{1}{12}Ma^2$ wird.

Zusatz 2.

§. 511. Ist $b=0$, so ergibt sich der Fall eines geraden Kegels, in welchem $AI=f=\tfrac{3}{4}a$, das Moment der Trägheit in Bezug duf die Axe $AC=\tfrac{3}{10}Mc^2$ und das Moment in Bezug auf die Axen, welche in I auf AC normal stehen, $=\tfrac{3}{20}Mc^2+\tfrac{3}{80}Ma^2$ wird; wie oben.

Zusatz 3.

§. 512. Damit alle Momente in Bezug auf die durch I gegezogenen Axen einander gleich werden, muss

$$4(b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4)=a^2\frac{(b+c)^4+4b^2c^2}{b^2+bc+c^2}$$

sein und wenn die Grundflächen des abgekürzten Kegels gegeben sind, die Höhe $AC=a$ so bestimmt werden, dass man hat

$$a^2=\frac{4(b^2+bc+c^2)(b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4)}{(b+c)^4+4b^2c^2}.$$

Beispiel 3.

§. 513. (Figur 66.) Es sei der Körper ein elliptisches Sphäroid, welches durch Umdrehung der halben Ellipse AEB um die Axe AB entstanden ist, alsdann liegt in deren Mittelpunkte I der Mittelpunkt der Trägheit. Man setze die halbe Axe $AI=IB=a$ und die conjugirte $IE=c$, alsdann wird

$$u^2 = \frac{c^2}{a^2}(2at - t^2)$$

und man muss in den Integralen $t = 2a$ setzen. Wir haben demnach

$$\int u^2 dt = \frac{c^2}{a^2}(at^2 - \tfrac{1}{3}t^3) \text{ und } \int_0^{2a} u^2 dt = \tfrac{4}{3}ac^2,$$

also die Masse $M = \tfrac{4}{3}\pi ac^2$. Ferner wird

$$\int u^2 dt = \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{2}{3}at^3 - \tfrac{1}{4}t^4) \text{ und } \int_0^{2a} tu^2 dt = \tfrac{4}{3}a^2c^2, \text{ also } AI = f = a.$$

Hierauf erhalten wir

$$\int t^2u^2 dt = \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}at^4 - \tfrac{1}{5}t^5) \text{ und } \int_0^{2a} t^2u^2 dt = \tfrac{8}{5}a^3c^2$$

und da wir $u^4 = \frac{c^4}{a^4}(4a^2t^2 - 4at^3 + t^4)$ haben, so wird

$$\int u^4 dt = \frac{c^4}{a^4}(\tfrac{4}{3}a^2t^3 - at^4 + \tfrac{1}{5}t^5) \text{ und } \int_0^{2a} u^4 dt = \tfrac{16}{15}ac^4.$$

Mittelst dieser Werthe erhält man das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AB

$$= \tfrac{2}{5}Mc^2$$

und in Bezug auf die Axen, welche in I auf AB normal stehen,

$$= \tfrac{1}{5}M(a^2 + c^2).$$

Beispiel 4.

§. 514. (Figur 67.) Der Körper sei eine Linse, welche aus zwei gleichen Abschnitten einer Kugel zusammengesetzt oder durch die Umdrehung der, aus den zwei gleichen halben Kreisabschnitten AIE und BIE bestehenden, Figur AEB um die Axe AB entstanden ist, in deren Mitte I der Mittelpunkt der Trägheit liegen wird. Man setze die halbe Axe $AI = BI = a$ und $IE = IF = b$, alsdann wird der Durchmesser des Kreises $= \frac{a^2 + b^2}{a}$; wir wollen denselben $= 2c$ setzen, so dass $c = \frac{a^2 + b^2}{2a}$ wird. Wir haben demnach $u^2 = 2ct - t^2$,
und man muss in den Integralen $t = a$ setzen und hierauf dieselben verdoppeln; nur ist von selbst $AI = f = a$ und daher

$$A = M\left[a^2 - \frac{2a\int tu^2 dt - \int t^2u^2 dt}{\int u^2 dt}\right].$$

Wir haben hiernach

$$\int tu^2 dt = \tfrac{2}{3}ct^3 - \tfrac{1}{4}t^4 \text{ und } \int_0^a tu^2 dt = \tfrac{2}{3}a^3c - \tfrac{1}{4}a^4,$$

$$\int u^2 dt = ct^2 - \tfrac{1}{3}t^3 \text{ und } \int_0^a u^2 dt = a^2c - \tfrac{1}{3}a^3, \; M = 2\pi(a^2c - \tfrac{1}{3}a^3),$$

$\int t^2u^2dt = \frac{1}{2}ct^4 - \frac{1}{5}t^5$ und $\int\limits_0^a t^2u^2dt = \frac{1}{2}a^4c - \frac{1}{5}a^5$ endlich
$\int\limits_0^a u^4dt = \frac{4}{3}a^3c^2 - a^4c + \frac{1}{5}a^5$.

Hieraus findet man das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AB

$$= \frac{1}{10}M\frac{20ac^2 - 15a^2c + 3a^3}{3c - a} = \frac{1}{10}M\frac{a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2},$$

und das Moment in Bezug auf die Axen EF, welche in I auf AB normal stehen,

$$= \frac{1}{20}M \cdot \frac{a^3 - 5a^2c + 20ac^2}{3c - a} = \frac{1}{20}M \cdot \frac{7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2}.$$

Aufgabe 42.

§. 515. Ein Körper ist ein rechtwinkliges Parallelepipedum, man sucht seine Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie.

Auflösung.

(Figur 68.) Es sei das Rechteck $BD\partial b$ die Basis des Parallelepipedums, dessen Seiten $Bb = 2a$, $BD = 2b$, die Höhe aber $= 2c$ ist; offenbar wird dann der Mittelpunkt der Trägheit des Parallelepipedums in seinem Mittelpunkte liegen und die Hauptaxen drei gerade, den Seiten parallel durch diesen Punkt gezogene Linien sein. Man suche demnach das Moment der Trägheit in Bezug auf die der Höhe parallele Axe, welche auf der Basis in ihrem Mittelpunkte G perpendikulär steht. Zu diesem Ende betrachte man dieses Rechteck $BD\partial b$ als einen der Basis parallelen Schnitt und es sei dasselbe vom Mittelpunkte der Trägheit um einen Zwischenraum $= x$ entfernt, ferner setze man $GY = y$ und $YZ = z$; alsdann ist $dxdydz$ das Element des Cubikinhaltes oder der Masse $= dM$, also

$$M = 8abc.$$

Hierauf werden wir aber haben

$$\int x^2dM = \int x^2dxdydz,$$

integrirt man nun zweimal in Bezug auf y und z, setzt alsdann $y = a$ und $z = b$, und verdoppelt man endlich die Integrale, um sie über den ganzen Schnitt auszudehnen; so erhält man

$$\int x^2dM = 4ab\int x^2dx = \frac{4}{3}abx^3.$$

Setzt man nun $x = c$ und verdoppelt den Werth, so erhalten wir über das ganze Parallepipedum

$$\int x^2dM = A = \frac{8}{3}abc^3 = \frac{1}{3}M.c^2.$$

Auf ähnliche Weise wird

$$\int y^2 dM = B = \tfrac{1}{3} M.a^2$$

und $\int z^2 dM = C = \tfrac{1}{3} Mb^2$, ferner $\int yz dM = F = 0$.

Hieraus schliesst man, dass das Moment der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxe, welche der Höhe parallel oder auf die Basis $BD\partial b$ perpendiculär ist,

$$= B + C = \tfrac{1}{3} M(a^2 + b^2)$$

sein wird; ferner wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die der Seite Bb parallele Axe $= \tfrac{1}{3} M(b^2 + c^2)$ und in Bezug auf die der Seite BD parallele Axe $= \tfrac{1}{3} M(a^2 + c^2)$.

Zusatz 1.

§. 516. (Figur 69.) Ist daher $ABCDabcd$ ein solches rechtwinkliges Parallepipedum, dessen Masse $= M$, so werden seine Hauptaxen den Seiten AB, AC und AD parallel durch seinen Mittelpunkt gehen und es wird das Moment der Trägheit in Bezug auf die, der Seite $\begin{Bmatrix} AB \\ AC \\ AD \end{Bmatrix}$ parallele, Axe

$$= \begin{cases} \tfrac{1}{12} M(AC^2 + AD^2) \\ \tfrac{1}{12} M(AB^2 + AD^2) \\ \tfrac{1}{12} M(AB^2 + AC^2). \end{cases}$$

Zusatz 2.

§. 517. Ist der Körper ein Würfel, dessen Seite $= a$, so werden diese drei Momente einander gleich und daher auch die Momente in Bezug auf alle, durch den Mittelpunkt des Würfels gezogenen, Axen einander gleich und zwar $= \tfrac{1}{6} Ma^2$. Eine solche Gleichheit muss aber in allen regulären Körpern stattfinden.

Aufgabe 43.

§. 518. (Figur 70.) Ein Körper ist eine ausgehöhlte Kugel, so dass die Aushöhlung ebenfalls eine Kugel zu demselben Mittelpunkt ist; man soll sein Moment der Trägheit in Bezug auf alle durch seinen Mittelpunkt gezogenen Axen bestimmen.

Auflösung.

Es sei I der Mittelpunkt, $IA = a$ der Radius der Kugel, $Ia = b$ aber der Radius der Höhlung, so dass die Dicke der sphärischen Kruste $= a - b = Aa$ ist; alsdann wird die Masse dieser ausgehöhlten Kugel $= \tfrac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)$, welche wir $= M$ setzen. Dass aber alle durch den Mittelpunkt I gezogenen Axen gleiche Momente haben, ist von selbst klar; suchen wir daher das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AB.

Wäre aber die Kugel eine volle, so würde, weil ihre Masse $= {}^4\!/_3 \pi a^3$ wäre, ihr Moment der Trägheit $= {}^4\!/_3 \pi a^3 . {}^2\!/_5 a^2 = {}^8\!/_{15} \pi a^5$, das Moment der aus der Mitte fortgenommenen Kugel $= {}^8\!/_{15} \pi b^5$ sein, und wenn man dieses von jenem subtrahirt, erhält man das Moment der hohlen Kugel $= {}^8\!/_{15} \pi (a^5 - b^5) = {}^2\!/_5 M \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}$ Man wird daher das Moment der Trägheit der ausgehöhlten Kugel, in Bezug auf alle durch den Mittelpunkt gezogenen Axen,

$$= {}^2\!/_5 M \frac{a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4}{a^2 + ab + b^2}$$

erhalten.

Zusatz 1.

§. 519. Ist $b = 0$, so ergibt sich der Fall einer vollen Kugel, deren Radius $= a$ und für welche das Moment der Trägheit, in Bezug auf alle durch den Mittelpunkt gezogenen Axen, wie oben $= {}^2\!/_5 M a^2$ ist.

Zusatz 2.

§. 520. Ist diese sphärische Kruste sehr dünn, also sehr nahe $b = a$, so wird das Moment der Trägheit $= {}^2\!/_3 M a^2$, welche Formel auch für die Oberfläche der Kugel gilt. Wollen wir aber die Dicke Δa, welche $= c = a - b$ sei, nicht ganz vernachlässigen, so wird das Moment

$$= {}^2\!/_5 M \frac{5a^4 c - 10 a^3 c^2 + 5 a^2 c^3}{3a^2 c - 3 a c^2} = {}^2\!/_3 M (a^2 - ac).$$

Anmerkung.

§. 521. Diese Fälle sind überflüssig hinreichend, nicht nur um aus ihnen die Momente der Trägheit für mehrere Körper zu entnehmen, sondern auch um, wenn andere Körper vorkommen, die Rechnung desto leichter anstellen zu können. Wir wollen daher nun zur Bestimmung der drehenden Bewegungen von Körpern übergehen, welche durch die Schwere angetrieben werden; indem diess der vorzüglichste Fall ist, welchem diese Behandlung angepasst zu werden pflegt.

Kapitel VII.

Von der schwingenden Bewegung schwerer Körper.

Aufgabe 44.

§. 522. (Fig. 71.) Ein starrer Körper ist um eine feste horizontale Axe beweglich und es wird seine Bewegung durch die Schwere allein gestört; man soll die augenblickliche, in seiner Bewegung hervorgebrachte, Veränderung bestimmen.

Auflösung.

Ich nehme hier die allgemeine Voraussetzung der Schwere an, nach welcher die einzelnen Elemente des Körpers den Massen proportional abwärts, längs einander paralleler Richtungen fortgetrieben werden. Insofern daher der Körper ein starrer ist, ist allen diesen Kräften eine einzige, dem Gewicht des Körpers gleiche, Kraft gleichgeltend, deren abwärts strebende Richtung durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht. Wenn man demnach die Masse des Körpers M nennt und sein Mittelpunkt der Trägheit sich in I befindet, wenn man von hier abwärts die vertikale gerade Linie IG zieht; so wird der Körper in Folge der Schwere in der Richtung IG durch eine Kraft angetrieben, welche seiner Masse M gleichzusetzen ist, in so fern wir die letztere durch das Gewicht dieses Körpers ausdrücken. Da ferner die Drehungsaxe horizontal ist, so denke man sich normal auf dieselbe eine durch den Mittelpunkt der Trägheit I gehende Ebene, welche vertikal sein und durch die Ebene des Papiers dargestellt werden wird. Die Drehungsaxe denke man sich normal auf diese Ebene durch den Punkt O gehend, alsdann wird die von diesem nach I gezogene gerade Linie OI den Abstand des Mittelpunktes der Trägheit I von der Dre-

hungsaxe darstellen. Nach diesen Voraussetzungen halte nun der Körper $AEBF$ die in der Figur dargestellte Lage ein, alsdann wird, wenn man die Vertikale OC zieht, durch den Winkel COI die Lage des Körpers bekannt. Man setze den Abstand $OI=f$ und zur Zeit t den Winkel $COI=\varphi$, alsdann wird das Moment der Kraft $IG=M$, in Bezug auf die Drehungsaxe, $=Mf\sin\varphi$ und es hat dasselbe das Bestreben, den Winkel φ zu vermindern; dasselbe muss daher in §. 408. an die Stelle des Moments Vf substituirt werden. Ausserdem muss man nothwendig das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe O kennen, dasselbe war dort durch $\int r^2 dM$ bezeichnet. Zu diesem Ende denke man sich eine, durch den Mittelpunkt der Trägheit I gehende, Axe der Drehungsaxe parallel, und es sei in Bezug auf sie das Moment der Trägheit des Körpers $=Mk^2$; alsdann wird, weil der Zwischenraum dieser Axen $OI=f$ ist, das Moment der Trägheit desselben, in Bezug auf die Drehungsaxe $O, =M(f^2+k^2)$. Wenn daher der Körper sich so dreht, dass die gerade Linie OI sich der Vertikalen OC nähert und die Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ ist, so wird, weil die antreibende Kraft diese vermehrt, nach §. 408.

$$d\Omega=\frac{2gMf\sin\varphi}{M(f^2+k^2)}dt \text{ oder } d\Omega=\frac{2fg\sin\varphi dt}{f^2+k^2}.$$

Wenn aber die gerade Linie OI, in Folge der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$, sich von der Vertikalen OC entfernte, so würde

$$d\Omega=-\frac{2fg\sin\varphi dt}{f^2+k^2}$$

sein. Da nun aber in jenem Falle $\Omega=-\frac{d\varphi}{dt}$, in diesem $\Omega=\frac{d\varphi}{dt}$ ist, so wird, wenn man dt constant annimmt, in beiden Fällen

$$dd\varphi=-\frac{2fg\sin\varphi\, dt^2}{f^2+k^2},$$

wo das Zeichen — dasteht, weil das Moment der antreibenden Kraft dahin strebt, den Winkel φ zu vermindern.

Zusatz 1.

§. 523. Hat der Körper in der Lage $AEBF$ noch keine Bewegung, so wird er durch die Schwere so gegen die vertikale Linie OC gedrängt, dass er sich ihr im Zeittheilchen dt um einen Winkel $=\frac{fg\sin\varphi dt^2}{f^2+k^2}$ (§. 361.), welcher unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, nähern wird.

Zusatz 2.

§. 524. Befindet sich demnach der Körper in Ruhe, so kann er nur dann in derselben verharren, wenn $\sin\varphi = 0$ ist, d. h. wenn der Mittelpunkt der Trägheit I sich auf der vertikalen geraden Linie OC befindet. Wird daher ein beliebiger Körper auf diese Weise aufgehängt, so kann er nur dann in Ruhe verharren, wenn die gerade Linie OI vertikal ist, was geschieht wenn der Mittelpunkt der Trägheit den untersten oder obersten Ort einnimmt.

Zusatz 3.

§. 525. So oft aber die gerade Linie OI eine schiefe Lage hat, wird der Körper in Folge der Schwere zur Bewegung angetrieben werden; hat er aber schon eine Bewegung, so wird diese durch Beschleunigung oder Verzögerung gestört werden, je nachdem die Bewegung nach OC hin oder von da zurückgeht.

Zusatz 4.

§. 526. Es ist auch klar, dass, wenn die Axe durch den Mittelpunkt der Trägheit I selbst geht, also $OI = f = 0$ ist, das Moment der Schwere verschwinden und die drehende Bewegung daher gar nicht gestört werden wird. In diesem Falle wird also der Körper entweder ruhen oder sich gleichförmig um die Axe O drehen.

Anmerkung.

§. 527. Es ist hier sogleich angemessen zu bemerken, dass der Körper sich nicht eben so bewegt, als wenn seine ganze Masse in seinem Mittelpunkte der Trägheit I vereinigt wäre, wie diess bei der fortschreitenden Bewegung in Gebrauch gekommen ist. Wäre nämlich hier des Körpers ganze Masse M im Mittelpunkte der Trägheit I vereinigt, so würde sein Moment der Trägheit in Bezug auf die durch diesen Punkt gezogene Axe verschwinden, also $k^2 = 0$ sein und die Bewegung demnach so gestört werden, dass man hätte

$$dd\varphi = -\frac{2g\sin\varphi dt^2}{f},$$

eine Formel, welche grösser als im vorausgesetzten Falle ist. Hieraus ersieht man, dass die Bewegung eines ausgedehnten Körpers, wie wir ihn hier betrachten, weniger durch die Schwere gestört wird, als wenn seine ganze Masse im Mittelpunkte der Trägheit vereinigt wäre. Unten werden wir aber sehen, dass es auf der geraden Linie OI einen andern weiter von der Axe O entfernten Punkt gibt, so beschaffen, dass, wenn

die ganze Masse des Körpers in ihm vereinigt wäre, die Bewegung dieselbe Störung erleiden würde. Dieser Punkt verdient bei der schwingenden Bewegung besonders bemerkt zu werden, weil er eben derjenige ist, welchen man gewöhnlich den Schwingungs-Mittelpunkt zu nennen pflegt und zu dessen Auffindung hin und wieder viele Vorschriften vorkommen.

Aufgabe 45.

§. 528. (Figur 71.) Ist ein starrer Körper $AEBF$ um eine horizontale Axe beweglich, und ist seine Lage nebst der Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung gegeben; so soll man für eine beliebige Zeit seine Lage und Geschwindigkeit finden.

Auflösung.

Es bleibe alles wie in der vorigen Aufgabe, nämlich die Masse des Körpers $=M$, der Abstand des Mittelpunktes der Trägheit I von der Drehungsaxe, oder $OI=f$ und das Moment der Trägheit in Bezug auf die, der Drehungsaxe parallele und durch I gehende, Axe $= Mk^2$. Nach Verlauf der Zeit t nehme der Körper die in der Figur dargestellte Lage ein, und es sei der Winkel $COI=\varphi$, wenn CO eine vertikale gerade Linie ist; alsdann gelangen wir, wenn das Element dt constant angenommen wird, zu der Gleichung

$$dd\varphi = -\frac{2fg\sin\varphi dt^2}{f^2+k^2}.$$

Multipliciren wir dieselbe durch $2d\varphi$ und integriren, so erhalten wir

$$d\varphi^2 = \beta dt^2 + \frac{4fg\cos\varphi dt^2}{f^2+k^2},$$

woraus man das Quadrat der Geschwindigkeit

$$\Omega^2 = \beta + \frac{4fg\cos\varphi}{f^2+k^2}$$

kennen lernt. Setzt man nun ferner der Kürze wegen $\frac{4fg}{f^2+k^2}=\lambda$, so findet man, weil $d\varphi^2 = dt^2(\beta+\lambda\cos\varphi)$ ist

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\beta+\lambda\cos\varphi}} \text{ und } t = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\beta+\lambda\cos\varphi}};$$

wo die constante β und die andere, bei der letzten Integration eintretende, Constante durch den gegebenen Anfangszustand bestimmt werden müssen.

Zusatz 1.

§. 529. Verschwindet der Winkel $COI = \varphi$, so wird die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \sqrt{\beta + \frac{4fg}{f^2+k^2}},$$

die grösste von allen; in gleichen Ausweichungen der geraden Linie OI von der vertikalen OC sind aber die Geschwindigkeiten einander gleich. Wird ferner die Constante β nicht kleiner als $\frac{4fg}{f^2+k^2}$, so wird der Körper ganze Umwälzungen um die Axe ausführen, weil alsdann für $\varphi = 180^\circ$ die Winkelgeschwindigkeit noch reell ist.

Zusatz 2.

§. 530. Ist aber $\beta < \frac{4fg}{f^2+k^2}$, so kann der Winkel $COI = \varphi$ nicht über eine gewisse Grenze hinaus wachsen und wenn der Körper bis zu dieser gelangt ist, wird er wieder niedersteigen und eine schwingende Bewegung ausführen. Zieht man ferner die horizontale Linie IK, so wird, weil $OK = f\cos\varphi$ ist, dem Ausweichungswinkel $COI = \varphi$ die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \sqrt{\beta + \frac{4g.OK}{f^2+k^2}}$$

entsprechen.

Anmerkung.

§. 531. Mag der Körper ganze Umwälzungen ausführen, oder schwingend hin- und hergehen, so erfordert die Bestimmung der Bewegung dieselbe Rechnung, als die Bewegung eines einfachen Pendels, bei welcher ein an einem von Trägheit freien Faden befestigter unendlich kleiner Körper sich um eine horizontale Axe dreht. Da wir diese Bewegung oben schon ausführlich auseinander gesetzt haben, würde es überflüssig sein, dieselben Rechnungen hier zu wiederholen; es wird daher hinreichen, für jeden einzelnen Fall ein einfaches Pendel anzugeben, welches mit gleicher Winkelbewegung herumgeführt wird. Hier kommt zwar nur die Länge dieses einfachen Pendels in Rechnung, da seine Bewegung von dieser Länge allein abhängig ist, indem wir nämlich im Anfange beiden dieselbe Winkelbewegung beilegen.

Erklärung 9.

§. 532. Für die drehende oder schwingende Bewegung

eines jeden schweren Körpers um eine horizontale Axe wird ein isochrones einfaches Pendel dasjenige genannt, welches, wenn es einmal in gleicher Ausweichung von der vertikalen geraden Linie eine gleiche Winkelgeschwindigkeit empfangen hat, hierauf beständig mit ähnlicher Winkelbewegung fortgeführt wird.

Erläuterung.

§. 533. (Figur 71.) Wenn man einen beliebigen Körper *AEBF* voraussetzt, welcher sich unter alleinigem Antrieb der Schwerkraft um die horizontale Axe *O* dreht, so hat man zuerst seinen Mittelpunkt der Trägheit *I* zu betrachten, welcher, wenn er sich auf der vertikalen geraden Linie *OC* befindet, die natürliche Lage des Körpers angibt, in welcher dieser ruhet; der Winkel *COI* wird aber die Ausweichung von der natürlichen Lage genannt. Wenn nun diesem Körper in einer gegebenen Ausweichung eine gegebene Winkelbewegung beigebracht worden ist, so muss ein isochrones einfaches Pendel so eingerichtet sein, dass, wenn man demselben in gleicher Ausweichung eine gleiche Winkelbewegung beibringt, seine Bewegung beständig der des vorausgesetzten Körpers entsprechen wird. Da nun die ganze Sache von der Länge dieses einfachen Pendels abhängt, so wird es, wenn seine Länge *OS* und es an der gemeinschaftlichen Axe *O* aufgehängt ist, bei seiner Bewegung stets die des Körpers *AEBF* begleiten, wenn es nur einmal eine gleiche drehende Bewegung empfangen hat. Es ist zwar gleichgültig, ob man sich dieses einfache Pendel an derselben Axe angebracht denkt, oder nicht; aber weil die Ausweichungen von der vertikalen Lage *OC* beiderseits stets dieselben sein müssen, so hat man die Ausweichung des Körpers nach der Lage der geraden Linie *OI* abzuschätzen und man betrachtet am bequemsten ein einfaches in *O* aufgehängtes Pendel, damit seine Lage *OS* stets auf die gerade Linie *OI* falle und die ganze Frage auf die Bestimmung des Punktes *S* zurückgeführt werde.

Zusatz I.

§. 534. Hat man den Punkt *S* auf der Verlängerung der geraden Linie *OI* gefunden, so wird der Körper sich ebenso bewegen, als ob seine ganze Masse in eben diesem Punkte *S* vereinigt wäre; man erhält nämlich dann, wegen der verschwindenden Ausdehnung, ein einfaches Pendel von der Länge *OS*.

Zusatz 2.

§. 535. Diesen Punkt S muss man demnach auf der geraden Linie suchen, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers normal auf die Drehungsaxe gezogen wird, wenn es auch hier nicht nothwendig ist, dass das einfache Pendel OS an demselben Punkte O der Axe aufgehängt gedacht werde.

Anmerkung.

§. 536. Da dieses mit ähnlicher Bewegung fortgeführte Pendel wegen des Verschwindens der Masse ein einfaches genannt wird, so pflegt man nach dieser Weise beliebige ausgedehnte Körper, welche um eine feste Axe beweglich sind, zusammengesetzte Pendel zu nennen. Es wird auf diese Weise die Frage darauf zurückgeführt, dass, wenn irgend ein beliebiges zusammengesetztes Pendel, was also ein starrer Körper ist, vorausgesetzt wird, wir ein mit demselben isochrones einfaches Pendel angeben; diese Aufgabe werden wir jetzt sehr leicht lösen können. Uebrigens muss man daran erinnern, dass der Faden, mittelst dessen wir uns das einfache Pendel an die Axe befestigt denken, nicht nur als frei von Trägheit, sondern auch als starr vorausgesetzt werden muss, damit keine Biegung die Rechnung stören könne.

Aufgabe 46.

§. 537. (Fig. 71.) Es wird ein beliebiger starrer und schwerer Körper $AEBF$ vorausgesetzt, welcher um die horizontale feste Axe O beweglich ist; man soll ein einfaches isochrones Pendel OS bestimmen.

Auflösung.

Man setze die Masse des ganzen Körpers $=M$, seinen Mitelpunkt der Trägheit in I und ziehe normal auf die Axe die gerade Linie $OI=f$, welche jetzt von der Vertikalen OC um den Winkel $COI=\varphi$ absteht; es sei aber $M.k^2$ das Moment der Trägheit des Körpers, in Bezug auf die durch I der Drehungsaxe parallel gezogene Axe. Unter diesen Voraussetzungen wird, welches auch die anfangs dem Körper beigebrachte Bewegung gewesen sein mag, nach Verlauf der Zeit t die Aenderung der Bewegung ausgedrückt durch die Formel:

$$dd\varphi = -\frac{2fg \sin\varphi dt^2}{f^2+k^2}.$$

Setzt man nun die Länge des isochronen einfachen Pendels $OS=l$, so wird, weil es um denselben Winkel $COS=\varphi$ von

der vertikalen Lage absteht, seine Bewegung eine solche Veränderung erleiden, dass wir haben

$$dd\varphi = -\frac{2g \sin\varphi\, dt^2}{l}.$$

Diese Formel ergibt sich aus der vorhergehenden, indem man $k=0$ und $f=l$ setzt. Da nun beiderseits dieselbe Veränderung herauskommen soll, so erhalten wir

$$l = \frac{f^2+k^2}{f} \text{ oder } l = f + \frac{k^2}{f}.$$

Zusatz 1.

§. 538. Die Länge des isochronen einfachen Pendels OS übertrifft demnach den Abstand des Mittelpunktes der Trägheit I von der Drehungsaxe O, und zwar um den Zwischenraum $IS = \frac{k^2}{f}$. Kennt man aber die Länge $OS = l$, so wird

$$k^2 = f(l-f) = OI.IS,$$

so dass für denselben Körper das Rechteck $OI.IS$ constant wird.

Zusatz 2.

§. 539. Wenn für denselben Körper der Abstand OI sich ändert, so wird offenbar so wohl für $f=0$, als auch für $f=\infty$ die Länge des isochronen einfachen Pendels l unendlich gross werden. Am kürzesten wird aber dasselbe, wenn man $f=k$ annimmt, in welchem Falle

$$l = 2k$$

wird; ausserdem ist stets $l > 2k$.

Zusatz 3.

§. 540. Hat man die Länge des isochronen einfachen Pendels $=l$ gefunden, so wird, weil die sehr kleinen Schwingungen eines Körpers ebenso wie die dieses Pendels isochron sind, die Zeit einer jeden Schwingung in Secunden

$$= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}} \text{ (§. 215.).}$$

Wenn sich daher $l = \frac{2g}{\pi^2}$ ergibt, so werden die einzelnen sehr kleinen Schwingungen des Körpers in einer Secunde ausgeführt.

Anmerkung.

§. 541. Hieraus folgt eine leichte Methode, das Moment der Trägheit eines jeden Körpers praktisch zu bestimmen. Hat

man nämlich den Körper an einer horizontalen Axe aufgehängt, um welche er sich ganz frei drehen kann, so bestimme man zuerst mit aller Sorgfalt den Abstand des Mittelpunktes der Trägheit I von der Drehungsaxe O, nämlich $OI=f$, was ebenfalls praktisch geschehen kann. Hierauf treibe man den Körper an, sehr kleine Schwingungen auszuführen und wenn man deren mehrere in einer gegebenen Zeit gezählt hat, schliesst man hieraus auf die Zeit Einer Schwingung. Ist diese in Secunden $=\tau$, so hat man $l=\frac{2g\tau^2}{\pi^2}$ und wenn diess gefunden ist,

$$k^2=f(l-f).$$

Das Gewicht des Körpers M, multiplicirt durch k^2, wird das Moment der Trägheit in Bezug auf eine Axe, welche durch seinen Mittelpunkt der Trägheit der Drehungsaxe parallel gezogen ist, ergeben. Man kann diesen Versuch auch vervielfältigen, indem man den Körper nach und nach an verschiedenen Axen, welche jedoch unter sich parallel sind, aufhängt, damit wir den wahren Werth von k^2 um so sicherer kennen lernen. Man kann auch selbst umgekehrt hieraus die Länge des einfachen, in einzelnen Secunden schwingenden, Pendels erforschen, wenn man sich nämlich weder einfacher Pendel bedienen, noch die in Einer Secunde hervorgebrachte Fallhöhe g durch Fallversuche hinreichend genau bestimmen kann. Hier muss man aber für einen aufgehängten Körper die Grössen f und k^2 genau kennen, woraus man

$$l=f+\frac{k^2}{f}$$

erhält; wenn alsdann die Zeit τ einer sehr kleinen Schwingung beobachtet ist, erhalten wir

$$g=\frac{\pi^2.l}{2\tau^2}$$

und hieraus die Länge des einfachen, in den einzelnen Secunden schwingenden Pendels

$$=\frac{2g}{\pi^2}=\frac{l}{\tau^2}.$$

Erklärung 10.

§. 542. Der Schwingungsmittelpunkt in einem zusammengesetzten Pendel hat die Eigenschaft, dass, wenn in ihm die ganze Masse des Körpers vereinigt wäre, sich dieselbe schwingende Bewegung ergeben würde. Man nimmt diesen Punkt aber auf der geraden Linie an, welche durch den Mittel-

punkt der Trägheit des Körpers geht und normal auf die Drehungsaxe ist.

Zusatz 1.

§. 543. Der Abstand des Schwingungsmittelpunktes von der Drehungsaxe ist der Länge des isochronen einfachen Pendels gleich und es ist dieser Punkt von der Drehungsaxe O weiter entfernt, als der Mittelpunkt der Trägheit um den Zwischenraum $IS = \frac{k^2}{f}$.

Zusatz 2.

§. 544. Um daher den Schwingungsmittelpunkt S zu finden, muss man das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit I gehende und der Drehungsaxe parallele, Axe kennen. Ist dasselbe $= M.k^2$, so muss man es durch Mf, d. h. das Product der Masse des Körpers M in den Abstand der Drehungsaxe vom Mittelpunkte der Trägkeit, dividiren; alsdann wird der Quotient $\frac{M.k^2}{Mf}$ den Abstand des Schwingungsmittelpunktes vom Mittelpunkte der Trägheit ergeben.

Anmerkung.

§. 545. Auf diese Weise pflegt man die Erforschung der Bewegung zusammengesetzter Pendel auf die Erforschung des Schwingungsmittelpunktes zurückzuführen, obgleich es hinreichend ist, wenn man die Länge des einfachen isochronen Pendels kennt und kein Grund uns dazu drängt, uns dieses Pendel an derselben Aufhängungsaxe und zwar längs der geraden, durch den Mittelpunkt der Trägheit normal auf die Aufhängungsaxe gezogenen, Linie zu denken. Diese Weise, die Sache aufzufassen ist aber die bequemste und wenn der Körper in der Lage der Ruhe hängt, so dass die, durch den Mittelpunkt der Trägheit normal auf die Axe gezogene, gerade Linie zugleich vertikal ist; so wird der Schwingungsmittelpunkt auf derselben Linie, tiefer als der Mittelpunkt der Trägheit liegen; es ist nämlich nicht nöthig, dass man den Körper als in Bewegung befindlich ansehe. Man betrachtet demnach die gerade Linie OI als auf die Vertikale OC fallend, auf welcher der Schwingungsmittelpunkt S tiefer als der Mittelpunkt der Trägheit I liegen wird, und dieser erhält hier in Wahrheit den Namen des Schwerpunktes, so dass der Zwischenraum

$$IS = \frac{M.k^2}{Mf} = \frac{k^2}{f}$$

wird. Die Berechnung des Schwingungsmittelpunktes wird daher sehr leicht mittelst derjenigen Rechnung ausgeführt, welche wir oben zur Auffindung des Momentes der Trägheit gelehrt haben.

Beispiel.

§. 546. (Figur 72.) Die vorher erwähnten Versuche pflegt man mittelst einer Kugel anzustellen, welche aus gleichartiger Materie zusammengesetzt ist und, mittelst des Fadens OB aufgehängt, zu sehr kleinen Schwingungen angetrieben wird; hierbei hat man aber den Faden so dünn anzunehmen, dass man seine Masse, im Vergleich mit der der Kugel, für nichts halten darf. Es sei daher der Radius der Kugel $BI = b$ und der Abstand des Aufhängepunktes O vom Mittelpunkte der Kugel I, der zugleich ihr Mittelpunkt der Trägheit oder ihr Schwerpunkt ist, nämlich $OI = f$; alsdann wird, wie wir oben (§. 506.) gefunden haben, $k^2 = \frac{2}{5} b^2$. Der Schwingungsmittelpunkt wird demnach so in S liegen, dass $IS = \frac{2b^2}{5f}$ wird, oder es werden die Schwingungen mit denjenigen eines einfachen Pendels übereinstimmen, dessen Länge $= f + \frac{2b^2}{5f}$ ist. Damit nun dieses Pendel in einzelnen Secunden schwinge, muss

$$f + \frac{2b^2}{5f} = \frac{2g}{\pi^2} \quad \text{§. 540.)} \quad \text{oder} \quad f^2 = \frac{2gf}{\pi^2} - \frac{2}{5} b^2$$

sein. Hieraus folgt

$$f = \frac{g}{\pi^2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{\pi^4} - \frac{2}{5} b^2},$$

so dass wir für f zwei Werthe erhalten, deren Summe aber $= \frac{2g}{\pi^2}$ ist. Diese beiden Werthe werden einander gleich, wenn man die Kugel so gross annimmt, dass

$$b^2 = \frac{5g^2}{2\pi^4} \text{ und } b = \frac{g}{\pi^2} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

wird, d. h. es muss in Rheinländischen Fussen der Radius der Kugel $= 2{,}50317$ sein. Es wird alsdann ferner der Abstand $OI = f = 1{,}583144$, so dass der Aufhängepunkt oder die Drehungsaxe innerhalb der Kugel angenommen werden muss. Da aber $f = \frac{g}{\pi^2} = b\sqrt{\frac{2}{5}}$ oder $f = k$ ist, so wird die Kugel offenbar in diesem Falle am schnellsten schwingen (§. 539.). Ist nämlich $I\omega = b\sqrt{\frac{2}{5}}$ und zieht man die horizontale Linie $\mu\nu$, welche

die Drehungsaxe darstellen wird, so wird $\cos B\mu = \sqrt{2/5}$, also der Bogen $B\mu = 50^0\ 46'$. Ist aber die Kugel, wie es zu geschehen pflegt, sehr klein, so muss zur Hervorbringung von Secunden

$$OI = \frac{2g}{\pi^2} - \frac{\pi^2 b^2}{5g}$$

sein; damit also die am Punkte B aufgehängte Kugel diess leiste, muss ihr Radius

$$b = \frac{(\sqrt{65} - 5)g}{2\pi^2}, \text{ oder sehr nahe } = 0{,}155136g$$

sein.

Aufgabe 47.

§. 547. Ein um eine horizontale Axe beweglicher starrer Körper besteht aus mehrern Theilen, deren einzelne Mittelpunkte und Momente der Trägheit bekannt sind; man soll den Schwingungsmittelpunkt des ganzen Körpers bestimmen.

Auflösung.

(Figur 73.) Man denke sich die horizontale Drehungsaxe normal auf die Ebene der Figur im Punkte O, und es seien A, B, C und D die Mittelpunkte der Trägheit der Theile, aus denen der Körper zusammengesetzt ist. Die Massen dieser Theile seien A, B, C und D und ihre Momente der Trägheit in Bezug auf Axen, welche der Drehungsaxe parallel durch den Mittelpunkt der Trägheit eines jeden gehen, $A.a^2$, $B.b^2$, $C.c^2$ und $D.\partial^2$; diese Mittelpunkte der Trägheit mögen aber von der Drehungsaxe um die Abstände AO, BO, CO und DO entfernt sein. Es ist nämlich gleichgültig, ob diese Abstände nach demselben Punkte O der Axe, oder nach verschiedenen Punkten gerichtet sind, weil so wohl die Momente der Schwere, als auch die der Trägheit nur von den Abständen von der Axe abhängig sind und die Verschiedenheit der Punkte O nichts dazu beiträgt. Zuerst bestimme man den Mittelpunkt der Trägheit I des ganzen Körpers, dessen Masse $= M = A + B + C + D$ sei und welcher auf einer solchen geraden Linie OI liege, dass wir haben

$$A.AO.\sin AOI + B.BO.\sin BOI = C.CO.\sin COI + D.DO.\sin DOI;$$

alsdann wird

$$M.OI = A.AO.\cos AOI + B.BO.\cos BOI + C.CO \cos COI + D.DO.\cos DOI.$$

Diese Grösse hat man, in der obigen Gleichung $IS = \frac{M.k^2}{Mf}$,

statt Mf zu setzen. Das Moment der Trägheit des ganzen Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe wird aber aus den Theilen so zusammengesetzt, dass wir haben:

$$M(f^2+k^2)=A(AO^2+a^2)+B(BO^2+b^2)+C(CO^2+c^2)+D(DO^2+\partial^2).$$

Da nun $OS=\frac{M(f^2+k^2)}{Mf}$ ist, so erhalten wir

$$OS=\frac{A(AO^2+a^2)+B(BO^2+b^2)+C(CO^2+c^2)+D(DO^2+\partial^2)}{A.AO.\cos AOI+B.BO.\cos BOI+C.CO\cos COI+D.DO.\cos DOI}.$$

Zusatz 1.

§. 548. Betrachtet man die einzelnen Theile für sich und setzt man ihre Schwingungsmittelpunkte in a, b, c und ∂, so wird, weil $Oa=\frac{A(AO^2+a^2)}{A.AO}$ ist,

$$OS=\frac{A.OA.Oa+B.OB.Ob+C.OC.Oc+D.OD.O\partial}{A.AO.\cos AOI+B.BO.\cos BOI+C.CO.\cos COI+D.DO.\cos DOI}.$$

Zusatz 2.

§. 549. Hat man aber den Mittelpunkt der Trägheit oder den Schwerpunkt des ganzen Körpers I gefunden, so kann man statt des Nenners $M.OI$ setzen. Nach den Lehren der Statik findet man aber leicht den Schwerpunkt des ganzen Körpers, wenn die Schwerpunkte seiner Theile gegeben sind.

Beispiel.

§. 550. (Figur 74.) Es sei ein Pendel zusammengesetzt aus dem geraden cylindrischen Stabe ACB und der an ihr befestigten Kugel $BEDF$, dasselbe sei um die horizontale Axe EOF beweglich und man suche seinen Schwingungsmittelpunkt S. Der Stab und die Kugel mögen aus gleichartiger Materie bestehen und man setze die Länge des erstern $AB=a$, sein Gewicht $=A$, den Abstand des Endpunktes B von der Drehungsaxe O oder $BO=b$, den Radius der Grundfläche dieses Cylinders $=c$; alsdann wird sein Mittelpunkt der Trägheit in C liegen, so dass

$$AC=BC=\tfrac{1}{2}a \text{ und } OC=b-\tfrac{1}{2}a,$$

sein Moment der Trägheit aber in Bezug auf eine Axe, welche durch C der Drehungsaxe parallel gezogen ist,

$$=A(\tfrac{1}{12}a^2+\tfrac{1}{4}c^2) \quad (\S.\ 501.)$$

wird. Ferner sei die Masse der angefügten Kugel $=E$, ihr Radius $BG=e$, alsdann wird ihr Mittelpunkt der Trägheit in G liegen und ihr Moment der Trägheit

$$=\tfrac{2}{5}E.e^2 \text{ (§. 506.).}$$

Liegt nun der Mittelpunkt der Trägheit des ganzen Körpers in I, so hat man

$$(A+E)\,OI = A(b-\tfrac{1}{2}a)+E(b+e)=Mf.$$

Es wird nun das Moment der Trägheit in Bezug auf die Drehungsaxe

$$=A[\tfrac{1}{12}a^2+\tfrac{1}{4}c^2+(b-\tfrac{1}{2}a)^2]+E[\tfrac{2}{5}e^2+(b+e)^2],$$

welcher Werth statt $M(f^2+k^2)$ substituirt werden muss. Der Schwingungsmittelpunkt wird demnach so in S liegen, dass man hat

$$OS=\frac{A[\tfrac{1}{3}a^2-ab+b^2+\tfrac{1}{4}c^2]+E[b^2+2be+\tfrac{7}{5}e^2]}{A[b-\tfrac{1}{2}a]+E[b+e]}$$

und weil $OG=b+e$ ist, erhalten wir

$$GS=\frac{A[be+\tfrac{1}{2}ab-\tfrac{1}{2}ae-\tfrac{1}{3}a^2-\tfrac{1}{4}c^2]-\tfrac{2}{5}E.e^2}{A[b-\tfrac{1}{2}a]+E[b+e]}.$$

Zusatz 1.

§. 551. Nimmt man die Drehungsaxe in der Spitze A des Stabes, also $b=a$ an, so wird

$$OS=\frac{A[\tfrac{1}{3}a^2+\tfrac{1}{4}c^2]+E[a^2+2ae+\tfrac{7}{5}e^2]}{A.\tfrac{1}{2}a+E[a+e]}$$

und

$$GS=\frac{A[\tfrac{1}{2}ae+\tfrac{1}{6}a^2-\tfrac{1}{4}c^2]-E.\tfrac{2}{5}e^2}{A.\tfrac{1}{2}a+E[a+e]};$$

indem wir annehmen, dass der Punkt S oberhalb G liege.

Zusatz 2.

§. 552. Es sei z. B. $E=30A$, $a=b=3$ Fuss, $e=\tfrac{1}{12}$ Fuss und $c=\tfrac{1}{500}$ Fuss, so dass man c^2 mit Sicherheit vernachlässigen kann. Alsdann wird

$$OG=3\tfrac{1}{12}=3{,}0833$$

und

$$OS=\frac{3+285\tfrac{7}{24}}{\tfrac{3}{2}+92\tfrac{1}{2}}=\frac{288+\tfrac{7}{24}}{94}=3{,}0669$$

und es liegt in diesem Falle der Punkt S oberhalb G. Wenn aber die Masse des Stabes verschwindend klein wäre, so würde $OS=3{,}0842$ und in diesem Falle S unterhalb G liegen.

Anmerkung.

§. 553. Dieser letzte Fall ist desshalb bemerkenswerth, weil gewöhnlich der Faden, wenn er sehr dünn und leicht im Vergleich mit der Kugel ist, kaum etwas zum Schwingungsmittelpunkte beizutragen scheint, hier nämlich würde, obgleich die Kugel 30mal so schwer als der Faden ist, die Rücksicht

auf diesen ohne einen bemerkbaren Irrthum nicht vernachlässigt werden können. Setzen wir nämlich, dass dieses Pendel seine Schwingungen in Secunden ausgeführt habe und dass man hieraus die Länge des isochronen einfachen Pendels bestimmen solle. Diese würde sich daher, wenn man die Masse des Fadens vernachlässigt hätte, $=3',0842$ ergeben, während sie doch in Wahrheit $=3',0669$ ist, so dass ein höchst unsicher zu ertragender Fehler von $0',0173=2,5$ Linien begangen werden würde.

Wenn aber bei übrigens gleich bleibenden Dimensionen der Faden noch leichter und $E=60A$ wäre, so würde sich

$$OS=\frac{3+570\,{}^7\!/_{12}}{{}^3\!/_2+185}=3,0782$$

ergeben und wenn man statt dessen 3,0842 annehme, so würde der begangene Fehler $0',0060={}^{13}\!/_{15}$ Linie betragen.

Aufgabe 48.

§. 554. (Figur 75.) Ein Pendel besteht aus einem sehr dünnen Stabe OB, welcher frei von Trägheit aber doch starr ist und der Kugel $BEDF$; man soll den Ort finden, wo eine andere gegebene Kugel an dem Stab befestigt werden muss, damit die Schwingungen am schnellsten ausgeführt werden.

Auflösung.

Während die Drehungsaxe sich in O befindet, sei der Abstand $OG=b$, der Radius der unten befestigten Kugel $BG=c$, die Masse derselben $=B$; ferner die Masse der andern zu befestigenden Kugel $=L$, ihr Radius $QK=e$ und für ihren gesuchten Ort $OQ=q$. Diess vorausgesetzt, sei I der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Trägheit, alsdann wird

$$(B+L)OI=Bb+Lq=Mf;$$

ferner das Moment der Trägheit des ganzen Pendels in Bezug auf die Drehungsaxe

$$=B[{}^2\!/_5c^2+b^2]+L[{}^2\!/_5e^2+q^2]=M[f^2+k^2].$$

Setzt man daher den Schwingungsmittelpunkt in S; so wird

$$OS=\frac{B[{}^2\!/_5c^2+b^2]+L[{}^2\!/_5e^2+q^2]}{Bb+Lq}$$

und diese Länge muss am kleinsten sein, damit die Schwingungen die schnellsten werden. Hieraus ergibt sich die folgende Gleichung

$$2BLbq-BL[{}^2\!/_5c^2+b^2]-{}^2\!/_5L^2e^2+L^2q^2=0$$

oder $Lq=-Bb+\sqrt{B^2b^2+BLb^2+{}^2\!/_5BLc^2+{}^2\!/_5L^2e^2},$

wodurch $OQ = q$ bekannt wird. Ferner erhält man hieraus die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$OS = \frac{2}{L}\sqrt{B^2b^2 + BLb^2 + \tfrac{2}{5}BLc^2 + \tfrac{2}{5}L^2e^2} - \frac{2Bb}{L} = 2q.$$

Bestehen nun beide Kugeln aus derselben Materie, so erhält man, weil $B : L = c^3 : e^3$,

$$OS = \frac{2\sqrt{c^6b^2 + c^3e^3b^2 + \tfrac{2}{5}c^5e^3 + \tfrac{2}{5}e^8} - 2c^3b}{e^3}$$

und $$OQ = \frac{\sqrt{c^6b^2 + c^3e^3b^2 + \tfrac{2}{5}c^5e^3 + \tfrac{2}{5}e^8} - c^3b}{e^3} = q.$$

Zusatz 1.

§. 555. Sind die Durchmesser der Kugeln sehr klein, so dass man c^2 und e^2 gegen b^2 vernachlässigen kann, so muss der Abstand $OQ = q$ so angenommen werden, dass man habe

$$OQ = \frac{-B + \sqrt{B(B+L)}}{L}.b$$

und es wird die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$OS = 2OQ = \frac{-B + \sqrt{B(B+L)}}{L}.2b.$$

Zusatz 2.

§. 556. Wenn man die zweite Kugel *KLMN* durchaus unbeachtet lässt, so wird

$$OS = b + \frac{2c^2}{5b},$$

welche Länge grösser ist als in dem Falle, dass man diese Kugel hinzugefügt hat, wenn

$$b + \frac{2c^2}{5b} > 2e\sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

Wenn demnach nicht $e > \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left[b + \frac{2c^2}{5b}\right]$ ist, so können durch Hinzufügung dieser zweiten Kugel die Schwingungen beschleunigt werden.

Zusatz 3.

§. 557. Ist aber $e = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left[b + \frac{2c^2}{5b}\right]$, so muss, wie gross auch die Masse L dieser Kugel sein mag, um die schnellsten Schwingungen zu erhalten,

$$OQ = q = \tfrac{1}{2}b + \frac{c^2}{5b}$$

angenommen werden und es wird alsdann die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$=b+\frac{2c^2}{5b},$$

ganz als ob die Kugel *KLMN* entfernt wäre.

Zusatz 4.

§. 558. Sind beide Kugeln einander gleich, also $L=B$ und $e=c$, so ergeben sich die schnellsten Schwingungen, indem man

$$OQ=q=-b+\sqrt{2b^2+{}^4/_5c^2}$$

annimmt und, im Fall man c^2 gegen b^2 vernachlässigen kann, indem man

$$OQ=OG(\sqrt{2}-1)$$

setzt. Hieraus folgt die Länge des isochronen einfachen Pendels $=2OG(\sqrt{2}-1)=0{,}828427.OG.$

Zusatz 5.

§. 559. Bestehen beide Kugeln aus derselben Materie, so kann man den Radius e der Kugel *KLMN* so bestimmen, dass, wenn man sie nach der Vorschrift anbringt, die Schwingungen am schnellsten ausgeführt werden; man muss nämlich den Werth von e aus der Gleichung

$$16e^{10}-48c^5e^5-120b^2c^3e^5-600b^2c^6e^2+9c^6(5b^2+2c^2)^2=0$$

suchen.

Anmerkung.

§. 560. Uebrigens wird offenbar, je kleiner der Radius e der Kugel *KLMN* ist, während ihre Masse L unverändert bleibt, desto kleiner der Abstand $OQ=q$ sich ergeben und es werden daher die Schwingungen desto schneller erfolgen. Bleibt aber der Radius e unverändert, so erfolgen die Schwingungen am schnellsten, wenn die Masse L der hinzuzufügenden Kugel so gross als möglich ist. Wäre nämlich $L=0$, so würde

$$OS=b+\frac{2c^2}{5b}\ (\S.554.),$$

welches der grösste Werth ist, wenn man durch Hinzufügung der zweiten Kugel die Schwingungen schneller machen kann. Ist aber

$$5b^2+2c^2=2be\sqrt{10},\ \text{oder}\ e=\frac{5b^2+2c^2}{2b\sqrt{10}},$$

so bleiben, wie gross auch die Masse L dieser Kugel sein mag, wenn diese nach der Vorschrift angebracht wird, die Schwingungen von derselben Dauer (§. 557.) und wenn die

Kugel noch grösser wird, werden die Schwingungen selbst langsamer ausfallen.

Sind beide Kugeln aus gleich schwerer Materie angefertigt, so muss die Grösse der hinzuzufügenden, damit die schwingende Bewegung die geschwindeste werde, aus der Gleichung vom 10ten Grade hergeleitet werden. Geht aber die Axe durch den Mittelpunkt G der Kugel $BCDF$, so dass $b=0$ ist, so folgt aus jener Gleichung

$$e=c\sqrt[5]{3/2}$$

für den Radius der hinzuzufügenden Kugel, und zur Bestimmung ihres Ortes hat man

$$OQ=q=\sqrt{2/5\frac{c^5}{e^3}+2/5e^2}=c\sqrt[10]{8/27},$$

so wie auch die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$=2c\sqrt[10]{8/27}.$$

Die durch den Mittelpunkt der ersten Kugel gehende Drehungsaxe muss daher bei der andern so vorbeigehen, dass sie von ihrem Mittelpunkte um den Abstand

$$OQ=c\sqrt[10]{8/27}$$

entfert sei, welcher Abstand kleiner ist, als ihr Radius $e=c\sqrt[5]{3/2}$.

Derartige Fragen in Betreff der schwingenden Bewegung könnten noch mehrere aufgestellt werden, allein sie lassen sich nach den hier aufgestellten Principien ohne Schwierigkeit lösen. Sehr viel kommt aber darauf an, zu erforschen, wie grosse Kräfte die Drehungsaxe selbst während der Bewegung auszuhalten hat.

Aufgabe 49.

§. 561. (Figur 76.) Während ein schwerer starrer Körper sich um die horizontale feste Axe OA dreht, soll man zu jeder Zeit die Kräfte bestimmen, welche eben diese Axe in zwei gegebenen Punkten O und A auszuhalten hat.

Auflösung.

Es stelle das Papier eine vertikale Ebene vor, welche durch die Drehungsaxe OA geht und es befinde sich jetzt der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers ausserhalb dieser Ebene in I, von wo aus man so wohl auf die vertikale Ebene, als auf die Axe die Perpendikel IK und IG fälle; alsdann wird

der Winkel $IGK=\varphi$ die Ausweichung des Körpers von der natürlichen Lage und, wenn man den Abstand $IG=f$ setzt,

$$KI=f\sin\varphi \text{ und } GK=f\cos\varphi.$$

Ferner sei die Masse des Körpers $=M$ und da diese zugleich sein Gewicht ausdrückt, so wird die antreibende Kraft, welche in der vertikalen Richtung IV drängt, $=M$ und es strebt ihr Moment $=Mf\sin\varphi$ dahin, den Winkel IGK zu vermindern. Hierauf betrachte man ein beliebiges Element dM des Körpers in Z, fälle von hier auf die vertikale Ebene und auf die Axe die Perpendikel ZY und ZX, und setze die Coordinaten $OX=x$, $XY=y$ und $YZ=z$; alsdann wird

$$OG=\frac{\int xdM}{M},\quad GK=\frac{\int ydM}{M} \text{ und } KI=\frac{\int zdM}{M}.$$

Setzt man nun aber den Abstand $XZ=\sqrt{y^2+z^2}=r$, so drückt $\int r^2dM$ das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axe OA aus, es sei dasselbe $=Mk^2$; endlich setze man den gegenseitigen Abstand der Punkte auf der Axe oder $OA=a$ und ziehe durch beide die geraden Linien BOb, COc und EAe, FAf parallel den Linien KG und KI. Nach diesen Vorbereitungen bemerke ich zuerst, dem §. 413. entsprechend, dass keine Kraft da ist, deren Richtung mit der Axe in derselben Ebene liegt; da aber hier das Moment der Kraft $Mf\sin\varphi$ im entgegengesetzten Sinne von dem dort angenommenen wirkt, so wird

$$Vf=-Mf\sin\varphi.$$

Es hat daher in Folge der Kraft $IV=M$, welche an der Axe im Punkte G längs der Richtung GK angebracht zu denken ist, die Axe in den Punkten O und A diese Kräfte auszuhalten:

längs OB die Kraft $=\frac{M.AG}{a}$ und längs AE die Kraft $=\frac{M.OG}{a}$

Mit diesen hat man diejenigen zu verbinden, welche aus den entgegengesetzt angebrachten elementaren Kräften entspringen; es sind diese:

für den Endpunkt O $\begin{cases} \text{längs } Ob \text{ die Kraft} = \dfrac{f\sin\varphi\int(a-x)zdM}{a.k^2} \\ \quad\text{"}\quad OC \quad\text{"}\quad\text{"} = \dfrac{f\sin\varphi\int(a-x)ydM}{a.k^2} \end{cases}$

für den Endpunkt $A \begin{cases} \text{längs } Ae \text{ die Kraft} = \dfrac{f\sin\varphi \int xz\,dM}{a.k^2} \\ \text{ - } AF \text{ - - } = \dfrac{f\sin\varphi \int xy\,dM}{a.k^2} \end{cases}$

und zwar hat die Axe diese Kräfte in Folge der Wirksamkeit der Schwere des Körpers auszuhalten. In Folge der Bewegung aber, mit welcher der Körper sich bereits dreht, hat die Axe, wenn wir die Drehungsgeschwindigkeit Ω nennen, in den Punkten O und A folgende Kräfte auszuhalten:

für den Endpunkt $O \begin{cases} \text{längs } OB \text{ die Kraft} = \dfrac{\Omega^2 \int (a-x)y\,dM}{2ag} \\ \text{ - } OC \text{ - - } = \dfrac{\Omega^2 \int (a-x)z\,dM}{2ag} \end{cases}$

für den Endpunkt $A \begin{cases} \text{längs } AE \text{ die Kraft} = \dfrac{\Omega^2 \int xy\,dM}{2ag} \\ \text{ - } AF \text{ - - } = \dfrac{\Omega^2 \int xz\,dM}{2ag}. \end{cases}$

Zusatz 1.

§. 562. Setzt man die Abstände der Endpunkte O und A vom Punkte G, nämlich $OG=b$ und $AG=c$, so dass $a=b+c$ wird, ferner $GX=u$, wonach $x=b-u$ und $a-x=c+u$ wird; so erhalten wir

$$\int(a-x)z\,dM = \int(c+u)z\,dM = Mc.KI + \int uz\,dM,$$
$$\int(a-x)y\,dM = \int(c+u)y\,dM = Mc.GK + \int uy\,dM,$$
$$\int xz\,dM = \int(b-u)z\,dM = Mb.KI - \int uz\,dM$$

und
$$\int xy\,dM = \int(b-u)y\,dM = Mb.GK - \int uy\,dM.$$

Zusatz 2.

§. 563. Führt man diese Werthe ein, so hat die Axe im Punkte O folgende Kräfte auszuhalten:

erstens längs der Richtung OB die Kraft

$$\frac{Mc}{a} - \frac{Mcf\sin\varphi.KI}{ak^2} - \frac{f\sin\varphi \int uz\,dM}{a.k^2} + \frac{\Omega^2 Mc.GK}{2ag} + \frac{\Omega^2 \int uy\,dM}{2ag},$$

zweitens längs der Richtung OC die Kraft

$$\frac{Mcf\sin\varphi.GK}{a.k^2} + \frac{f\sin\varphi \int uy\,dM}{a.k^2} + \frac{\Omega^2 Mc.KI}{2ag} + \frac{\Omega^2 \int uz\,dM}{2ag};$$

im Punkte A aber erstens längs der Richtung AE die Kraft

$$\frac{Mb}{a} - \frac{Mbf\sin\varphi.KI}{a.k^2} + \frac{f\sin\varphi \int uz\,dM}{a.k^2} + \frac{\Omega^2 Mb.GK}{2ag} - \frac{\Omega^2 \int uy\,dM}{2ag},$$

zweitens längs der Richtung AF die Kraft

$$\frac{Mbf\sin\varphi.GK}{a.k^2} - \frac{f\sin\varphi \int uy\,dM}{a.k^2} + \frac{\Omega^2 Mb.KI}{2ag} - \frac{\Omega^2 \int uz\,dM}{2ag}.$$

Zusatz 3.

§. 564. Ist der Körper so beschaffen, dass er durch die Ebene IGK in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt wird und ist $GO = GA = \frac{1}{2}a$, so wird, weil $\int uz dM = 0$ und $\int uy dM = 0$ ist, die Axe im Punkte O die folgenden Kräfte auszuhalten haben:

$$\text{längs } OB \text{ die Kraft} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mf \sin\varphi . KI}{2k^2} + \frac{\Omega^2 M . GK}{4g},$$

$$\text{- } OC \text{ - - } = \frac{Mf \sin\varphi . GK}{2k^2} + \frac{\Omega^2 M . KI}{4g};$$

im Punkte A aber

$$\text{längs } AE \text{ die Kraft} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mf \sin\varphi . KI}{2k^2} + \frac{\Omega^2 M . GK}{4g},$$

$$\text{- } AF \text{ - - } = \frac{Mf \sin\varphi . GK}{2k^2} + \frac{\Omega^2 M . KI}{4g}.$$

In diesem Falle sind daher die Kräfte von der Grösse des Abstandes $OA = a$ unabhängig.

Zusatz 4.

§. 565. In diesem Falle, wo $\int uy dM = 0$ und $\int uz dM = 0$ ist, hindert uns nichts, den Abstand $OA = a$ als verschwindend anzunehmen und es wird die Axe in dem einzigen Punkte G festgehalten werden können. Hier hat sie nämlich je zwei Kräfte auszuhalten,

$$\text{die eine längs } GK = M - \frac{Mf^2 \sin\varphi^2}{k^2} + \frac{M\Omega^2 f \cos\varphi}{2g}$$

$$\text{und die andere längs } GH = \frac{Mf^2 \sin\varphi \cos\varphi}{k^2} + \frac{M\Omega^2 f \sin\varphi}{2g},$$

wobei $GH \# KI$ ist.

Anmerkung.

§. 566. Die Körper, welche man gewöhnlich zur schwingenden Bewegung anzuwenden pflegt, sind so beschaffen, dass sie durch eine Ebene, welche durch ihren Mittelpunkt der Trägheit normal auf die Drehungsaxe gelegt ist, in zwei gleiche und ähnliche Theile zerschnitten werden; bei ihnen kann daher die Axe in einem einzigen Punkte festgehalten werden. Wenn nämlich die Figur 71. eine vertikale Ebene darstellt, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit I eines solchen Körpers gelegt und auf die Drehungsaxe normal ist, welche letztere wir uns in O normal auf der Figur stehend denken; so wird, wenn OC eine vertikale und OH eine in dieser Ebene horizontale Linie ist, die Axe im Punkte O die eben angegebenen Kräfte

auszuhalten haben. Setzt man nämlich den Winkel $COI = \varphi$, den Abstand $OI = f$, die Masse des Körpers $= M$, sein Moment der Trägheit in Bezug auf die Drehungsaxe $= M.k^2$, ist ferner seine Winkelgeschwindigkeit in diesem Zustande $= \Omega$, mag diese nach Vergrösserung oder Verkleinerung des Winkels COI streben; so hat die Axe O die zwei Kräfte auszuhalten:

die eine längs $OC = M - \frac{Mf^2 \sin\varphi^2}{k^2} + \frac{M\Omega^2 f \cos\varphi}{2g}$

und die andere längs $OH = \frac{Mf^2 \sin\varphi \cos\varphi}{k^2} + \frac{M\Omega^2 f \sin\varphi}{2g}$.

Durch die erste Kraft wird sie demnach abwärts angetrieben und es hat eine Unterlage dieselbe auszuhalten, in Folge der andern Kraft aber wird die Axe das Bestreben erlangen, nach der Seite hin, auf welcher sich der Mittelpunkt der Trägheit befindet, horizontal über der Unterlage fortzuschreiten, welche Wirkung man angemessen mittelst eines Riegels aufhebt. Wenn der Mittelpunkt der Trägheit auf die entgegengesetzte Seite fällt, nimmt diese horizontale Kraft ebenfalls die entgegengesetzte Richtung an. Uebrigens bestehen beide Kräfte aus zwei Theilen, von denen der eine aus der Wirksamkeit der Schwere, der andere aus der drehenden Bewegung entspringt. Zieht man nun OL auf OI normal, so werden diese Theile dermaassen auf wenigere zurückgebracht, dass die Axe im Punkte O durch folgende Kräfte angetrieben wird:

längs OC durch die Kraft $= M$,

- OL - - - $= \frac{Mf^2 \sin\varphi}{k^2}$

und - OI - - - $= \frac{Mf\Omega^2}{2g}$.

Haben wir nicht $\int uydM = 0$ und $\int uzdM = 0$, so hat die Axe ausser diesen Kräften noch in den Punkten O und A (Figur 76.) die Theile der Kräfte in §. 563. auszuhalten, welche diese Integralformeln enthalten, weil man die übrigen von ihnen freien Theile auf einen einzigen Punkt reduciren konnte.

Aufgabe 50.

§. 567. (Figur 77.) Ist die Axe OA, um welche ein starrer schwerer Körper beweglich ist, nicht horizontal; so soll man die drehende Bewegung, wie auch die Kräfte bestimmen, welche die Axe auszuhalten hat.

Auflösung.

Man denke sich durch die Axe OA eine vertikale Ebene gelegt, in welcher GC eine vertikale Linie ist und setze den Winkel $OGC = \zeta$, alsdann ergibt das Complement des letztern oder $90^0 - \zeta$ die Neigung der Axe OA gegen den Horizont. Es befinde sich nun der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers I ausserhalb der vertikalen Ebene und man fälle von ihm auf die Axe die Normale $IG = f$, ferner errichte man aus G in der vertikalen Ebene, ebenfalls normal auf die Axe, die Linie GK; alsdann wird die Ebene IGK normal auf die vertikale Ebene. Ferner setze man den Winkel $IGK = \varphi$, derselbe misst die Ausweichung des Körpers von seiner natürlichen Lage, indem nämlich die gerade Linie GI sich in der Ebene IGK bewegen wird. Man setze die Masse des Körpers oder sein Gewicht $= M$ und sein Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe OA $= M.k^2$, welches man eben so erhält, als wenn diese Axe horizontal wäre, indem die Neigung sich nur auf die antreibende Kraft bezieht. Die Wirkung der Schwere kommt aber darauf hinaus, dass der Körper im Punkte I nach der vertikalen Richtung IV durch eine Kraft $= M$ angetrieben wird und um diese zu zerlegen, ziehe man $IM \# GO$ und $IN \# GK$; alsdann werden IM, IV und IN in einer vertikalen Ebene liegen und der Winkel $MIV = \zeta$ sein. Hiernach entspringen aus der Kraft $IV = M$ die folgenden zwei Kräfte, die eine längs $IM = M \cos\zeta$ und die andere längs $IN = M \sin\zeta$. Da die erste der Axe parallel ist, so trägt sie durchaus nichts zur Bewegung bei, sondern wird ganz auf die Axe verwandt, wie wir oben gelehrt haben. Für die Bewegung bleibt demnach allein die Kraft $IN = M \sin\zeta$ übrig und da ihre Richtung parallel GK ist, so entsteht das Moment

$$= Mf \sin\zeta \sin\varphi,$$

welches dahin strebt, den Winkel IGK zu vermindern. Ferner werden zur Bestimmung der Bewegung die oben für eine horizontale Axe gefundenen Formeln gelten, nur muss man statt des Momentes der antreibenden Kraft, welches vorher $= Mf \sin\varphi$ war, hier $Mf \sin\zeta \sin\varphi$ schreiben; oder man muss, insofern als M das Gewicht des Körpers bezeichnet, statt desselben $M \sin\zeta$ setzen, insofern es aber in das Moment der Trägheit eintritt, muss es unverändert bleiben. Die Bewegung wird daher der eines einfachen Pendels, dessen Länge $= \frac{M.k^2}{Mf \sin\zeta} = \frac{k^2}{f \sin\zeta}$ ist, um eine horizontale Axe ähnlich sein, wodurch die Bewegung vollkommen

bestimmt wird. Was aber die Kräfte anbetrifft, welche die Axe inzwischen in den beliebig gegebenen Punkten O und A auszuhalten hat, so wird zuerst, in Folge der Kraft $IM = M\cos\zeta$, die Axe längs ihrer Richtung AO durch eine eben so grosse Kraft angetrieben, ausserdem aber in den beiden Punkten O und A durch eine Kraft $= \frac{GI}{OA} \cdot M\cos\zeta$, nämlich in A nach der GI parallelen Richtung, in O aber nach der entgegengesetzten. (§. 372.) Ferner wird die Axe, ausser durch diese Kräfte, in den Punkten O und A durch dieselben Kräfte angetrieben, welche wir in der vorhergehenden Aufgabe bestimmt haben, indem man nur diess beobachtet, dass $M\sin\zeta$ statt M und $f\sin\zeta\sin\varphi$ statt $f\sin\varphi$ gesetzt werden muss. Ist nämlich in der Figur 76. OA unsere geneigte Axe und bleibt alles übrige wie in der vorhergehenden Aufgabe, so hat die Axe ausser den, aus der Kraft $IM = M\cos\zeta$ entspringenden Kräften noch überdem die folgenden auszuhalten. Erstens im Punkte O, nach der Richtung OB die Kraft

$$\frac{Mc\sin\zeta}{a} - \frac{Mcf^2\sin\varphi^2\sin\zeta}{a.k^2} - \frac{f\sin\varphi\sin\zeta fuzdM}{a.k^2} + \frac{Mcf\Omega^2\cos\varphi}{2ag} + \frac{\Omega^2 fuydM}{2ag}$$

und nach der Richtung OC die Kraft

$$\frac{Mcf^2\sin\zeta\sin\varphi\cos\varphi}{a.k^2} + \frac{f\sin\zeta\sin\varphi fuydM}{a.k^2} + \frac{Mcf\Omega^2\sin\varphi}{2ag} + \frac{\Omega^2 fuzdM}{2ag};$$

zweitens im Punkte A, nach der Richtung AE die Kraft

$$\frac{Mc\sin\zeta}{a} - \frac{Mbf^2\sin\zeta\sin\varphi^2}{a.k^2} + \frac{f\sin\zeta\sin\varphi fuzdM}{a.k^2} + \frac{Mbf\Omega^2\cos\varphi}{2ag} - \frac{\Omega^2 fuydM}{2ag}$$

und nach der Richtung AF die Kraft

$$\frac{Mbf^2\sin\zeta\sin\varphi\cos\varphi}{a.k^2} - \frac{f\sin\zeta\sin\varphi fuydM}{a.k^2} + \frac{Mbf\Omega^2\sin\varphi}{2ag} - \frac{\Omega^2 fuzdM}{2ag}$$

nach §. 563., indem $OA = a$, $OG = b$, $AG = c$ und die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ ist und die Integrale so genommen werden, wie wir dort festgesetzt haben.

Zusatz 1.

§. 568. Da die Länge des einfachen isochronen Pendels $= \frac{k^2}{f\sin\zeta}$ ist, so wird der Körper seine Schwingungen um die

geneigte Axe langsamer ausführen, als wenn dieselbe horizontal wäre und wenn die Schwingungen sehr klein sind, wird die Dauer einer einzelnen $=\pi\sqrt{\frac{k^2}{2fg\sin\zeta}}$ Secunden (§. 540.).

Zusatz 2.

§. 569. (Figur 77.) Ist die Axe geneigt, so hat sie auch längs ihrer Richtung AO eine Kraft $=M\cos\zeta$ auszuhalten, alle übrigen Kräfte sind auf die Axe normal und können auf zwei gegebene Punkte O und A zurückgeführt werden.

Zusatz 3.

§. 570. Wird der Körper durch die Ebene IGK in zwei gleiche und ähnliche Theile zerschnitten, so verschwinden die Werthe der Integrale $\int uydM$ und $\int uzdM$ und es lassen sich alle Kräfte, die aus der Kraft IM entspringenden ausgenommen, auf einen einzigen Punkt G zurückführen, wie oben.

Anmerkung.

§. 571. Diess hielten wir für angemessen über die drehende Bewegung starrer Körper um eine feste Axe vorzutragen, wobei übrigens die Bestimmung der Bewegung selbst darauf zurückgeführt ist, dass sie nicht mehr Schwierigkeit hat, als die Bewegung eines kleinen Körpers um eine feste Axe, wenn nur das Moment der Trägheit erforscht worden ist. Die Kräfte aber, welche die Drehungsaxe während der Bewegung auszuhalten hat, erfordern meistentheils eine lästigere Rechnung, weil aus der Figur des Körpers die Werthe der zwei Integrale $\int xydM$ und $\int xzdM$ hergeleitet werden müssen. Diese Erforschung ist aber von der grössten Wichtigkeit, wenn wir zur Bewegung starrer Körper um nicht feste Axe fortschreiten wollen; wobei es zwar angemessen ist, diejenigen Fälle aufmerksamer zu entwickeln, in denen die Axe von freien Stücken unbeweglich bleibt, wenn sie auch von aussen her nicht festgehalten wird. Liegt demnach ein beliebiger starrer Körper vor, so hat man zu untersuchen, ob es in demselben derartige Axen gibt, um welche der Körper eine drehende Bewegung annehmen kann, ohne dass sie dadurch Kräfte auszuhalten haben. Ferner muss man darauf sehen, welche Kräfte den um eine solche Axe sich bewegenden Körper antreiben müssen, damit auch hieraus keine, nach Fortbewegung der Axe strebenden, Kräfte entspringen.

Kapitel VIII.

Von der freien Drehunsaxe und der Bewegung starrer Körper um solche Axen.

Erklärung 11.

§. 572. Eine freie Drehungsaxe ist in einem beliebigen starren Körper eine solche Axe, welche, während der Körper sich um sie dreht, keine Kräfte in Folge dieser Bewegung auszuhalten hat.

Zusatz 1.

§. 573. Wenn daher ein Körper angefangen hat, sich um eine freie Axe zu drehen, so wird diese von selbst in Ruhe bleiben und es wird nicht nöthig sein, dass sie von aussen her in ihrer Lage festgehalten werde. Dies ist aber nur so zu verstehen, wenn der Körper durch keine Kräfte angetrieben wird.

Zusatz 2.

§. 574. Ein keinen Kräften unterworfener Körper wird demnach, wenn er um eine solche freie Axe eine beliebige drehende Bewegung angenommen hat, mit dieser Bewegung beständig fortfahren sich gleichförmig zu drehen, eben so als ob die Axe fest wäre.

Anmerkung.

§. 575. Hier haben wir daher einen anderen Fall der freien Bewegung, welche starre Körper betrifft und deren Erklärung deutlich ist. Der erste Fall war nämlich der, wo, wie wir gesehen haben, ein solcher Körper mit fortschreitender Bewegung frei fortgetragen wird, gingen aber die antreibenden Kräfte durch seinen Mittelpunkt der Trägheit, so haben wir die Störung der

Bewegung schon bestimmt. Zweitens habe ich gezeigt, dass ein Körper, welchem eine drehende Bewegung um eine feste Axe beigebracht war, dieselbe Bewegung stets beibehalten wird, während jene Axe festgehalten wird. Nun ist es einleuchtend, dass, wenn diese Axe so beschaffen ist, dass die von ihr auszuhaltenden Kräfte sich wechselseitig aufheben, dieselbe von selbst unbewegt bleiben und der Körper die drehende Bewegung beständig fortsetzen wird; diess ist daher der Fall einer freien Bewegung. Hierbei ist es nun nicht zweifelhaft, dass es auch Kräfte geben werde, welche, während sie die drehende Bewegung beschleunigen oder verzögern, auf die Axe nicht einwirken, so dass diese noch in Ruhe verharren wird; hiervon werden wir später handeln. Vor allem müssen wir aber nothwendiger Weise untersuchen, ob es in einem jeden Körper solche freie Drehungsaxen gibt und auf welche Weise dieselben aufzufinden sind. Hierbei wird dasjenige den höchsten Nutzen bringen, was wir oben über die drei Hauptaxen eines jeden Körpers gelehrt haben, indem wir finden werden, dass diese zugleich freie Drehungsaxen sind.

Aufgabe 51.

§. 576. Man soll die Bedingungen der freien Axen bestimmen, welche gar keine Kräfte auszuhalten haben, während Körper, die durch keine Kräfte angetrieben werden, sich um sie drehen.

Auflösung.

(Figur 33.) Diese Aufgabe wird nach §. 338. leicht gelöst. Dreht sich nämlich ein Körper um eine beliebige Axe OA mit der Winkelgeschwindigkeit $=\gamma$ und nimmt man für ein beliebiges, in Z gelegenes Element dM die rechtwinkligen Coordinaten $OX=x$, $XY=y$ und $YZ=z$ an, wovon x auf der Drehungsaxe selbst angenommen wird; so haben wir gesehen, dass im allgemeinen in Folge dieser Bewegung die Axe zwei Kräfte Ee und Ff auszuhalten hat und zwar ist

$$\text{die Kraft } Ee=\frac{\gamma^2}{2g}\int y\,dM \text{ und die Kraft } Ff=\frac{\gamma^2}{2g}\int z\,dM.$$

Dieselben sind ferner in den Punkten E und F angebracht, so dass wir haben

$$OE=\frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM} \text{ und } OF=\frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}.$$

Damit nun diese Drehungsaxe eine freie sei, müssen zuerst die beiden Kräfte Ee und Ff, jede für sich, verschwinden

und es muss daher so wohl $\int y dM = 0$ als auch $\int z dM = 0$ sein; es muss also die Axe OA durch des Körpers Mittelpunkt der Trägheit I gehen, weil, wenn man die Masse des Körpers $= M$ setzt,

$$\int y dM = M.GK \text{ und } \int z dM = M.KI$$

ist. Die erste Bedingung freier Drehungsaxen ist demnach, dass sie durch den Mittelpunkt der Trägheit I des Körpers gehen; allein wenn auch diese zwei Kräfte verschwinden, werden doch, weil die Abstände OE und OF unendlich gross werden, ihre Momente zur Drehung der Axe um den Punkt O sich gleich $\frac{\gamma^2}{2g}\int xy dM$ und $= \frac{\gamma^2}{2g}\int xz dM$ ergeben und wenn diese nicht ebenfalls verschwinden, wird auch die Axe nicht von freien Stücken in Ruhe verharren. Damit daher die Drehungsaxe OA eine freie sei, ist es nicht hinreichend, dass dieselbe durch den Mittelpunkt der Trägheit I des Körpers geht, sondern sie muss auch die Eigenschaft haben, dass für sie

$$\text{so wohl } \int xy dM = 0, \text{ als auch } \int xz dM = 0$$

werde. Da diess nun die oben erwiesene Eigenschaft der Hauptaxen ist, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit ihre grössten oder kleinsten Werthe haben, so werden offenbar die Hauptaxen eines jeden Körpers, welche zu finden wir eben gelehrt haben, zugleich freie Drehungsaxen sein.

Zusatz 1.

§. 577. In jedem freien Körper gibt es demnach gewiss drei freie Drehungsaxen, die nämlich seine Hauptaxen sind, um welche er sich so frei drehen kann, dass die Axen von freien Stücken in Ruhe verharren.

Zusatz 2.

§. 578. Sind die drei Hauptmomente einander ungleich, so gibt es nur drei freie Drehungsaxen, und es kann sich der Körper um keine andere Axe, wenn sie auch durch den Mittelpunkt der Trägheit geht, drehen, ohne dass es äusserer Kräfte zur Festhaltung der Axe bedarf.

Zusatz 3.

§. 579. Ist aber das mittlere Moment dem grössten oder kleinsten gleich, so werden zwei Hauptaxen nicht bestimmt, sondern es werden alle auf die dritte normalen die gleiche Eigenschaft haben und daher auch freie Drehungsaxen sein.

Zusatz 4.

§. 580. Sind aber alle drei Hauptmomente einander gleich, wie in der Kugel und im Würfel, so werden durchaus alle durch den Mittelpunkt der Trägheit gehenden geraden Linien die Eigenschaft der Hauptaxen haben und der Körper sich frei um sie drehen können.

Anmerkung.

§. 581. Das, was wir oben in Betreff der Hauptaxen aller Körper gelehrt haben, hat nicht nur bei der Auffindung des Momentes der Trägheit den grössten Nutzen, sondern macht auch bei der gegenwärtigen Untersuchung die ganze Arbeit aus; da in jedem Körper die Hauptaxen und diese allein freie Drehungsaxen sind, um welche sich ein Körper so drehen kann, dass es keiner äussern Kraft bedarf, um dieselben in Ruhe zu erhalten. So wie daher in jedem starren Körper der Mittelpunkt der Trägheit ein höchst merkwürdiger Punkt ist, dessen Verhältniss sich durch die ganze Mechanik sehr weit erstreckt, ebenso sind die Hauptaxen, welche zugleich freie Drehungsaxen sind, in jedem Körper nicht weniger bemerkenswerth, weil sich auf sie die ganze Lehre von der freien Bewegung der Körper stützt. Unter den mechanischen Eigenschaften der Körper nehmen daher diese Hauptaxen nach dem Mittelpunkte der Trägheit den Hauptplatz ein, und man wird bei jedem Körper, dessen Bewegung man zu prüfen unternimmt, sich vorzüglich darauf legen müssen, dass man seine Hauptaxen erforsche. Es gibt nämlich eine dreifache Kenntniss der Körper, erstens die geometrische, bei welcher ihre Ausdehnung gemessen wird; zweitens die mechanische, bei welcher man ihre Masse oder Trägheit betrachtet und drittens die physische, bei welcher die übrigen Eigenschaften erwogen werden. Man muss daher annehmen, dass die mechanische Kenntniss vorzüglich im Mittelpunkte der Trägheit und in den Hauptaxen enthalten sei.

Aufgabe 52.

§. 582. Während ein Körper sich um eine freie Drehungsaxe bewegt, soll man bestimmen, durch welche Kräfte derselbe angetrieben werden muss, damit aus ihnen keine Wirkung auf die Axe entspringe und diese auch jetzt von freien Stücken in Ruhe verharre.

Auflösung.

Welche drehende Bewegung auch ein Körper um die Haupt-

oder freie Axe angenommen haben mag, so haben wir eben gesehen, dass er diese Bewegung immer beibehalten und die Axe von freien Stücken in Ruhe verharren wird, da die aus der Bewegung entspringenden Kräfte sich wechselseitig vollständig aufheben. Jetzt wollen wir daher sehen, wie die antreibenden Kräfte beschaffen sein müssen, damit die Axe keine Einwirkung von ihnen erleide; diess wird man nach Aufgabe 17. (§. 385.) leicht durchschauen können. Zuerst werden aber offenbar die schief wirkenden Kräfte ausgeschlossen, aus denen nämlich durch Zerlegung der Axe parallele Kräfte entspringen, welche durch die elementaren Kräfte nicht aufgehoben werden können. Es bleiben demnach die Kräfte übrig, deren Richtungen in Ebenen liegen, welche auf der Axe normal stehen. Wir haben aber gezeigt, dass derartige Kräfte so auf die Axe einwirken, dass diese zuerst dieselben Kräfte, jede in ihrer Ebene auf die Axe übertragen, auszuhalten hat; ferner aber ausserdem die den elementaren entgegengesetzten, gleichfalls auf die Axe übertragenen Kräfte. Da aber wegen der Eigenschaft der Hauptaxen

$$\int xy\,dM=0,\ \int xz\,dM=0,\ \int(a-x)y\,dM=0 \text{ und } \int(a-x)z\,dM=0$$

ist, so verschwinden die aus den elementaren entspringenden Kräfte, welche in der Aufgabe 17. an den Punkten O und A angebracht waren; es wird daher die Axe nur die antreibenden und auf die Axe übertragenen Kräfte auszuhalten haben. Die antreibenden Kräfte müssen daher so beschaffen sein, dass, wenn sie einzeln in Ebenen, die auf der Axe normal stehen, an dieser nach ihren Richtungen angebracht werden, sie sich wechselseitig aufheben. Je zwei beliebige und entgegengesetzte Kräfte, welche in derselben auf die Axe normalen Ebene angebracht sind, werden daher bewirken, dass die Axe von ihnen gar keine Einwirkung erleidet. (Figur 78.) Ist nämlich IA eine freie Drehungsaxe und denkt man sich im beliebigen Punkte L eine auf sie normale Ebene, in welcher die zwei gleichen und entgegengesetzten Kräfte Nn und Mm wirken; so wird durch sie, in so fern sie in verschiedenen Abständen von der Axe angebracht sind, die drehende Bewegung zwar verändert werden, allein die Axe wird nichts desto weniger von freien Stücken in Ruhe verharren. Wieviel derartige Paare von je zwei Kräften daher auch am Körper angebracht sein mögen, so wird die Axe von ihnen auf keine Weise eine Einwirkung erleiden.

Zusatz 1.

§. 583. Ist demnach eine beliebige Kraft *Nn* gegeben, deren Richtung in einer auf die Axe normalen Ebene liegt und schneidet die letztere jene Axe im Punkte *L*, so wird, wenn man ausserdem in diesem Punkte eine gleiche und entgegengesetzte Kraft *Ll* anbringt, die Axe durch diese zwei Kräfte gar keine Einwirkung erleiden.

Zusatz 2.

584. Wird daher ein Körper durch zwei derartige Kräfte *Nn* und *Ll* angetrieben, so bleibt die Axe unbewegt und es wird nur die drehende Bewegung durch die Momente derselben gestört werden. Da aber die Kraft *Ll* gar kein Moment hat, so wird die Aenderung der Bewegung durch das Moment der Kraft *Nn* allein bestimmt werden müssen.

Zusatz 3.

§. 585. Ist nun die Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$, das Moment der Kraft $Nn = Vf$ und das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axe $IA = M.k^2$; so wird (§. 425.)

$$d\Omega = \pm \frac{2Vfgdt}{M.k^2},$$

wo das doppelte Zeichen entweder eine Beschleunigung oder eine Verzögerung anzeigt.

Anmerkung.

§. 586. Wenn daher ein starrer Körper sich um eine beliebige seiner Hauptaxen dreht und zugleich durch beliebige Kräfte dieser Art angetrieben wird, welche einzeln ihnen gleiche und entgegengesetzte, an der Axe angebrachte, Kräfte gleichsam als ihre Begleiter haben; so sind wir im Stande, die Fortsetzung der Bewegung anzugeben, weil die Axe von freien Stücken in Ruhe bleibt und die Bewegung eben so verändert wird, als wenn die Axe festgehalten würde, welchen Fall wir oben schon entwickelt haben. Diese Bestimmung ist aber an dieses Verhältniss der antreibenden Kräfte gebunden und es ist noch keineswegs klar, was für eine Wirkung andere Kräfte hervorbringen werden. Diess sieht man zwar wenigstens ein, dass die Axe nicht in Ruhe bleiben wird, ob sie aber eine einfache fortschreitende Bewegung annehmen oder sich neigend fortschreiten wird, ist noch nicht zu ersehen. Inzwischen geht der Fall, in welchem der Axe eine fortschreitende Bewegung beigebracht

wird, so einfach aus diesem, wo sie in Ruhe verharret, hervor, dass wir seine Entwickelung zu unternehmen im Stande sind. Man hat nämlich zu bemerken, dass, wenn mit einer beliebigen Bewegung eine fortschreitende gleichförmige und geradlinige verbunden wird, die Wirksamkeit der Kräfte durchaus keine Störung erleidet; dieses Princip wollen wir nun unserm gegenwärtigen Vorhaben anpassen.

Lehrsatz 4.

§. 587. Die drehende Bewegung, welche ein starrer Körper um eine ruhende Axe ausführt, wird er um dieselbe auch fortsetzen können, wenn sie gleichförmig in gerader Linie fortschreitet; wird nur der Körper durch dieselben Kräfte angetrieben.

Beweis.

Während die Axe ruhet und der Körper sich auf beliebige Weise um sie drehet, zerlege man die Bewegungen der einzelnen Elemente längs je dreier Axen, denen man die Coordinaten x, y und z parallel setzt; alsdann werden, wenn man das Zeitelement $= dt$ setzt, diese Seitengeschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ sein, ferner stellen $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$ und $\frac{ddz}{dt}$ die Wirkungen der den Körper antreibenden Kräfte dar, so weit die einzelnen Elemente von ihnen afficirt werden. Setzen wir nun voraus, dass dem Körper ausserdem eine fortschreitende Bewegung zugetheilt werde, vermöge welcher die Axe, mit ihr selbst paralleler Bewegung, gleichförmig und geradlinig mit einer Geschwindigkeit $= c$ und längs der Richtung, welcher parallel man die Coordinaten x annimmt, fortschreite. Es werden alsdann die Geschwindigkeiten der einzelnen Elemente

$$c + \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt} \text{ und } \frac{dz}{dt}$$

sein, deren Differentiale von den vorhergehenden nicht abweichen. Die drehende Bewegung um eine gleichförmig und geradlinig fortschreitende Axe wird sich daher eben so verhalten, als ob diese sich in Ruhe befände; die etwa vorhandenen Kräfte werden die drehende Bewegung auf gleiche Weise stören, mag die Axe ruhen oder gleichförmig in gerader Linie fortschreiten.

Zusatz 1.

§. 588. Wird daher einem Körper, während er sich um eine Hauptaxe dreht, eine fortschreitende Bewegung zugetheilt

und wird er durch keine Kräfte angetrieben, so wird er beide Bewegungen gleichförmig fortsetzen.

Zusatz 2.

§. 589. Wird inzwischen der Körper durch derartige Kräfte angetrieben, welche die drehende Bewegung allein verändern, auf die Axe aber nicht einwirken, so wird auch die drehende Bewegung eine Veränderung erleiden, die fortschreitende wird aber gleichförmig und geradlinig bleiben.

Zusatz 3.

§. 590. Wird aber der Körper inzwischen durch eine Kraft angetrieben, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Trägheit geht, so wirkt dieselbe nur auf die fortschreitende Bewegung ein. Da nämlich aus dieser Kraft weder irgend ein Moment in Bezug auf die Drehungsaxe entspringt, noch die Axe aus der ihr selbst parallelen Lage gebracht wird, so erleidet die drehende Bewegung keine Veränderung.

Anmerkung.

§. 591. Die Wahrheit dieses Lehrsatzes wird auch durch dasjenige, was wir oben über die absolute und respective Bewegung aus einander gesetzt haben, wenn der Körper, auf welchen man die Bewegung bezieht, sich gleichförmig in gerader Linie bewegt, genügend bestätigt. Da nämlich ein Körper, welcher eine drehende Bewegung um eine gewisse Hauptaxe angenommen hat, diese Bewegung beständig so beibehält, dass die Axe von freien Stücken in Ruhe bleibt; so muss nothwendig dasselbe eintreten, wenn der Körper sich in einem gleichförmig und geradlinig fortgeführten Raume befindet und in Bezug auf diesen seine Axe ruhet. Alsdann kommt nämlich die Sache auf dasselbe hinaus, als ob der Körper absolut gleichförmig in gerader Linie fortschritte und sich zugleich um die Hauptaxe, welche beständig eine ihr selbst parallele Lage beibehielte, gleichförmig drehete. Hiernach kann die Sache so aufgefasst werden, als ob in dem Körper eine doppelte Bewegung stattfände, eine drehende, bei welcher der Körper sich um eine gewisse Hauptaxe dreht, die andere aber eine fortschreitende, durch welche die Axe mit dem Körper so fortgeführt wird, dass sie beständig eine ihr selbst parallele Lage beibehält. Man ersieht ferner auch hieraus, dass durch die oben bestimmten Kräfte die drehende Bewegung eben so beschleu

nigt oder verzögert werden muss, als ob die Axe sich in Ruhe befände und dass zugleich die Kräfte, welche, wie wir oben gezeigt haben, nur auf die fortschreitende Bewegung einwirken, gar nichts in der drehenden Bewegung verändern, so dass man jede von beiden Bewegungen für sich, als ob sie allein da wäre, betrachten kann. Dieses also, worin der so ausgezeichnete Fall der freien Bewegung starrer Körper enthalten ist, verdient durchaus eine sorgfältigere Entwickelung.

Erklärung 10.

§. 592. Eine aus fortschreitender und drehender gemischte Bewegung ist eine solche, bei welcher ein Körper sich theils um eine Haupt- oder freie Axe dreht, theils aber ausserdem sich so bewegt, dass seine Axe immer eine ihr selbst parallele Lage beibehält.

Zusatz 1.

§. 593. Um eine solche gemischte Bewegung zu erkennen, muss man zu jeder beliebigen Zeit

1) die Winkelgeschwindigkeit um die Drehungsaxe,
2) die Geschwindigkeit, mit welcher die Axe bei der fortschreitenden Bewegung fortrückt und
3) die Richtung dieser fortschreitenden Bewegung, wie sie gegen die Drehungsaxe geneigt ist,

kennen.

Zusatz 2.

§. 594. Die Winkelgeschwindigkeit wird ferner auf dieselbe Weise abgeschätzt, als ob die Axe sich in Ruhe befände; die Geschwindigkeit aber und Richtung der fortschreitenden Bewegung muss nach der Bewegung der Drehungsaxe oder nach der Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit beurtheilt werden.

Erläuterung.

§. 595. Diese Idee der gemischten Bewegung ist aus den beiden Ideen der fortschreitenden und der drehenden Bewegung zusammengesetzt, wesshalb keine von beiden in ihr rein und vollständig enthalten ist. Da wir nämlich die fortschreitende Bewegung so erklärt haben, dass alle geraden Linien, welche man sich im Körper denken kann, sich beständig parallel bleiben, so gilt diese Eigenschaft in der gemischten Bewegung durchaus nicht, sondern ist nur auf die Drehungsaxe beschränkt; indessen ist es doch einleuchtend, dass, wenn die drehende Bewegung aufgehoben würde oder verschwände, die fortschrei-

tende vollständig übrig bleiben würde. Auf ähnliche Weise war die oben gegebene Erklärung der drehenden Bewegung an eine feste oder ruhende Axe gebunden, wird aber jetzt auf eine sich bewegende ausgedehnt, welche Uebertragung durch die Idee des sich bewegenden Raumes verstärkt wird; wenn nur, wie wir hier angenommen haben, die Axe sich immer parallel bleibt. Es ist ferner auch klar, dass, wenn die fortschreitende Bewegung aufgehoben würde oder verschwände, die drehende vollständig, wie wir sie oben beschrieben haben, übrig bleiben würde. Man wird daher um so weniger bezweifeln dürfen, dass eine solche Bewegung ganz richtig eine aus der fortschreitenden und drehenden gemischte genannt wird, weil, wenn eine von beiden aufgehoben wird, die andere ihren Namen mit Recht für sich in Anspruch nimmt.

Anmerkung.

§. 596. In Betreff einer solchen gemischten Bewegung kommen mannigfaltige Fragen in Betracht, deren erste ist, auf welche Weise sich eine solche Bewegung, wenn keine Kräfte hinzutreten, verhalten wird; hier haben wir schon gesehen, dass beide gleichförmig fortgesetzt werden. Wenn ferner Kräfte hinzutreten, so darf man die Aufgabe durchaus nicht im allgemeinen behandeln, dass man nämlich die aus beliebigen Kräften hervorgehende Aenderung beider Bewegungen bestimmen wolle, sondern man muss sie auf bestimmte Arten von Kräften beschränken. Da es nämlich gewisse Kräfte gibt, welche beide Bewegungen, jede für sich, so stören, dass die Art der Bewegung nicht verändert wird, so erlangen wir durch die Verbindung derselben diejenigen Kräfte, deren Wirkung wir in gemischten Bewegungen dieser Art werden bestimmen können. In Betreff der übrigen verbundenen Kräfte wird man aber nichts anderes behaupten können, als dass die Drehungsaxe die ihr selbst parallele Lage n i c h t beständig beibehalten werde. So lange nämlich die Axe sich parallel bleibt, ist die Bewegung immer aus einer fortschreitenden und drehenden gemischt und muss zu der Art, welche wir hier behandeln, gezählt werden; hierin erblickt man ein vorzügliches Kennzeichen dieser Bewegung.

Lehrsatz 5.

§. 597. Ist einem starren Körper eine aus fortschreitender und drehender gemischte Bewegung beigebracht worden, und

wird derselbe ferner durch keine Kräfte angetrieben; so wird er beide Bewegungen gleichförmig fortsetzen und es wird die fortschreitende Bewegung eine geradlinige sein.

Beweis.

Die Wahrheit dieses Lehrsatzes ersieht man deutlich nach dem Vorhergehenden, da jede von beiden Bewegungen für sich durch die Kraft der Trägheit fortdauert, und die Fortsetzung der einen der Fortsetzung der andern nicht hinderlich ist; indem, wenn wir dem Raume eine der fortschreitenden gleiche und entgegengesetzte Bewegung beigelegt dächten, die fortschreitende selbst aufgehoben werden und die drehende Bewegung gleichförmig bleiben würde, nach dem, was wir oben bewiesen haben. Es ist aber, was man wohl zu bemerken hat, nothwendig, dass die Drehungsaxe durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gehe und zugleich eine seiner Hauptaxen sei. Ist nämlich die Axe nicht so beschaffen, so wird die drehende Bewegung bald in eine andere Art übergehen, worüber sich hier noch nichts bestimmen lässt.

Zusatz 1.

§. 598. Bei dieser gemischten Bewegung, welche der Körper vermöge der Kraft der Trägheit verfolgt, wird nicht nur der Mittelpunkt der Trägheit gleichförmig in gerader Linie fortschreiten, sondern auch die Drehungsaxe beständig dieselbe Lage beibehalten und der Körper indessen fortfahren, sich gleichförmig um sie zu drehen.

Zusatz 2.

§. 599. Eine solche Bewegung ist demnach bekannt, wenn man zuerst die Richtung und Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit, zweitens die Winkelgeschwindigkeit und ihren Sinn, endlich drittens die Lage der Drehungsaxe kennt.

Zusatz 3.

§. 600. Weil es in jedem Körper drei Hauptaxen gibt, in manchen aber selbst unendlich viele, welche zugleich freie Drehungsaxen sind, so sind alle Körper fähig, eine solche Bewegung anzunehmen und zwar auf unendlich vielfache Weise.

Anmerkung.

§. 601. (Figur 79.) Um eine derartige Bewegung durch Rechnung zu entwickeln, sei AB die gerade Linie, auf welcher

der Mittelpunkt der Trägheit I gleichförmig fortschreitet, seine Geschwindigkeit sei $= c$. Inzwischen drehe sich aber der Körper um die Hauptaxe MIN, welche mit der geraden Linie AB beständig denselben Winkel AIM bildet und zwar drehe er sich mit der Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$. Wenn nun im Anfange der Mittelpunkt der Trägheit sich in A befunden hat und nach Verlauf der Zeit t nach I gelangt ist, so wird der mit fortschreitender Bewegung beschriebene Weg $AI = ct$ und es wird inzwischen der Körper vermöge der Winkelbewegung um die Axe MN nothwendig einen Winkel $= \gamma t$ beschrieben haben. Uebrigens wird der Zusammenhang des Körpers dieselben Kräfte auszuhalten haben, als ob die fortschreitende Bewegung nicht stattfände. Was endlich die Bewegung eines jeden beliebigen Punktes des Körpers anbetrifft, so hat man dieselbe zuerst so zu bestimmen, als wenn die fortschreitende Bewegung nicht da wäre, hierauf aber mit derselben die fortschreitende Geschwindigkeit, nach den oben gegebenen Vorschriften für die Zerlegung der Bewegung, zu verbinden und wird so die wahre Bewegung desselben Punktes erhalten.

Aufgabe 53.

§. 602. Wird ein starrer Körper durch eine, aus fortschreitender und drehender gemischte, Bewegung fortgeführt, so soll man die Kräfte bestimmen, durch deren Wirksamkeit die Drehungsaxe verhindert wird, aus der ihr selbst parallelen Lage zu weichen, die Bewegung also eine aus fortschreitender und drehender gemischte bleibt.

Auflösung.

(Figur 80.) Zuerst ist es klar, dass alle Kräfte, deren Richtungen durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gehen, gar keine Wirkung auf die drehende Bewegung hervorbringen, sondern nur auf die fortschreitende Bewegung verwandt worden, so dass durch sie die Drehungsaxe nicht aus ihrer Lage abgelenkt wird. Solche Kräfte betreffen daher diejenige Art, welche wir suchen; ferner sind aber auch diejenigen Kräfte hierzu zu zählen, welche nur auf die drehende Bewegung einwirken und, wie wir gesehen haben, so beschaffen sind, dass, wenn AB die Drehungsaxe ist und man sich auf sie im beliebigen Punkte L eine normale Ebene denkt, je zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte Nn und Ll, welche in

dieser Ebene angebracht sind, diese Wirkung hervorbringen, endlich kann man sich die eine von diesen Kräften, *Ll* an der Axe selbst angebracht denken. Je zwei Kräften dieser Art sind aber zwei ähnliche gleichgeltend, welche in der, normal auf die Axe im Mittelpunkte der Trägheit *I* gedachten, Ebene angebracht sind, nämlich *Kk* und *Ii*, welche jenen gleich und parallel sind, und wobei man den Abstand $IK = LN$ angenommen hat; die diesen entgegengesetzten Kräfte würden nämlich mit jenen im Gleichgewichte stehen. Auf diese Weise darf man statt je zwei beliebiger solcher Kräfte *Nn* und *Ll* immer je zwei ähnliche und gleiche substituiren, welche in der, durch den Mittelpunkt der Trägheit *I* normal auf die Axe gelegten, Ebene angebracht sind. Wenn wir daher je zwei beliebige Kräfte dieser Art, *Kk* und *Ii* mit den beliebigen, im Mittelpunkte der Trägheit angebrachten, Kräften verbinden; so werden wir allgemein die Art von Kräften erhalten, durch welche die gemischte Bewegung so verändert wird, dass die Drehungsaxe sich selbst parallel bleibt. Unter den im Mittelpunkte der Trägheit *I* angebrachten Kräften setzen wir nun Eine $I\eta$ der Kraft *Ii* gleich und entgegengesetzt, wodurch diese aufgehoben wird, alsdann kann man die gesuchten Kräfte so beschreiben, dass sie, ausser den im Mittelpunkte der Trägheit *I* angebrachten, beliebige Kräfte umfassen, deren Richtungen sich in einer, durch den Mittelpunkt der Trägheit *I* normal auf die Axe gelegten, Ebene befinden und wieviel derartige Kräfte auch am Mittelpunkte der Trägheit angebracht sein mögen, so wird die gemischte Bewegung keine andere Veränderung erleiden, als wobei die Axe eine ihr selbst parallele Lage beibehält.

Zusatz 1.

§. 603. Hier darf man demnach nur solche Kräfte betrachten, welche entweder im Mittelpunkte der Trägheit selbst angebracht sind, oder deren Richtungen sich in einer, normal auf die Axe durch den Mittelpunkt der Trägheit gelegten, Ebene befinden.

Zusatz 2.

§. 604. Derartige Kräfte wirken daher entweder auf die fortschreitende, oder die drehende Bewegung oder auf beide, jedoch so, dass die Drehungsaxe beständig eine ihr parallele Lage beibehält.

Anmerkung.

§. 605. Diess sind also die Kräfte, auf welche unsere gegenwärtige Abhandlung sich beschränkt, und deren Wirkung hinsichtlich der gemischten Bewegung des Körpers wir nach den bis jetzt aufgestellten Principien bestimmen können. Hinsichtlich anderer beliebiger Kräfte aber, wenn man sie nicht etwa als gleichgeltend auf solche reduciren kann, ist es gewiss, dass durch sie die Drehungsaxe aus ihrer Lage gebracht und die Bewegung in eine andere Art übergeführt werden wird, welche wir auch jetzt nicht zu entwickeln vermögen. Was für eine Art von Wirkung die angegebenen Kräfte hervorbringen, werden wir in drei Aufgaben erforschen und zwar werden wir in der ersten die Wirkung derjenigen Kräfte untersuchen, deren Richtungen durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gehen. In der zweiten werden wir eine andere Art von Kräften betrachten, deren Richtungen in einer, im Mittelpunkte der Trägheit auf die Axe normalen, Ebene liegen. In der dritten endlich werden wir die Wirkung erforschen, welche aus den zugleich antreibenden Kräften beider Arten entspringen. Wir nehmen aber beständig an, es sei dem Körper im Anfange eine derartige gemischte Bewegung beigebracht worden, dass sie eine um die Hauptaxe des Körpers sich drehende werden wird.

Aufgabe 54.

§. 606. Einem starren Körper ist anfangs eine beliebige, aus fortschreitender und um die Hauptaxe drehender zusammengesetzte, Bewegung beigebracht worden und es wird derselbe hierauf durch beliebige Kräfte angetrieben, deren mittlere Richtung beständig durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht; man soll die Bewegung des Körpers bestimmen.

Auflösung.

Weil die mittlere Richtung der Kräfte beständig durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht, wird die drehende Bewegung gar keine Veränderung erleiden, sondern gleichförmig fortgesetzt werden, als ob die Axe sich in Ruhe befände; hiernach wird man zu jeder Zeit sehr leicht erkennen, ein wie grosser Winkel, in Folge der drehenden Bewegung, bereits um die Axe beschrieben worden ist. Die ganze Frage wird daher auf die fortschreitende Bewegung reducirt, welche man aus der Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit vollständig erkennt;

es wird nämlich der Körper so betrachtet, als ob seine ganze Masse im Mittelpunkte der Trägheit vereinigt wäre und aus den Kräften, welche ihn in jedem Augenblick antreiben, wird seine Bewegung auf dieselbe Weise bestimmt, wie wir die freie Bewegung von Punkten, die durch beliebige Kräfte angetrieben werden, zu bestimmen gelehrt haben. Es würde demnach überflüssig sein, diess weiter zu verfolgen. Da aber zu jeder Zeit der Ort des Mittelpunktes der Trägheit bestimmt ist, so wird auch die Lage der Drehungsaxe und die Grösse des Winkels, um welchen der Körper sich bereits um sie gedreht hat, bekannt werden.

Zusatz.

§. 607. Hier kann man beide Bewegungen so von einander getrennt betrachten, als ob die andere gar nicht da wäre; während die drehende Bewegung gleichförmig bleibt, wird die fortschreitende eben so gestört, als ob die ganze im Mittelpunkte der Trägheit vereinigte, Masse des Körpers durch dieselben Kräfte angetrieben würde.

Aufgabe 55.

§. 608. Einem starren Körper ist im Anfange eine, aus fortschreitender und um eine Hauptaxe drehender zusammengesetzte, Bewegung beigebracht worden und es wird derselbe durch Kräfte angetrieben, deren mittlere Richtung sich beständig in einer, normal auf die Axe durch den Mittelpunkt der Trägheit gelegten, Ebene befindet; man soll die Bewegung des Körpers bestimmen.

Auflösung.

(Figur 80.) Da die Axe sich selbst immer parallel bleibt, so habe sie nach Verlauf der Zeit t die Lage AB und wenn man durch den Mittelpunkt der Trägheit I eine auf die Axe normale Ebene legt, sei in dieser Kk die mittlere Richtung der den Körper jetzt antreibenden Kräfte, es sei ferner die jenen gleichgeltende Kraft $Kk = V$. Man denke sich in I dieser gleich und entgegengesetzt die Kraft $Ii = V$ angebracht, welche aber durch eine gleiche entgegengesetzte $I\eta = V$ auf's neue aufgehoben werde, so dass die drei Kräfte Kk, Ii und $I\eta$ den Körper antreiben. Nun wird aber durch die zwei Kräfte Kk und Ii nur auf die drehende Bewegung eingewirkt, und es wird die Aenderung der letztern folgendermaassen bestimmt.

Aus dem Mittelpunkte der Trägheit I fälle man auf die Richtung der Kraft Kk ein Perpendikel, welches $= f$ sei, alsdann wird das Moment dieser Kraft, welches entweder auf Beschleunigung oder Verzögerung einwirkt, $= Vf$; ferner sei die Masse des Körpers $= M$ und sein Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe $AB = M.k^2$. Diess vorausgesetzt, sei die Winkelgeschwindigkeit um die Axe $AB = \Omega$, welche ebenso abgeschätzt wird, als ob die Axe sich in Ruhe befände, und es wird alsdann

$$d\Omega = \pm \frac{2Vfgdt}{M.k^2} \text{ (§. 425.)},$$

woraus man für jede Zeit die Winkelgeschwindigkeit Ω abzuleiten hat. Ferner wirkt die Kraft $I\eta = V$ nur auf die fortschreitende Bewegung und zwar auf keine andere Weise, als ob die ganze Masse M des Körpers im Mittelpunkte der Trägheit I vereinigt wäre, so dass man den Körper als einen Punkt I ansehen kann, welcher jetzt durch die Kraft $I\eta = V$ angetrieben wird. Diese Bestimmung ist im Vorhergehenden gehörig aus einander gesetzt, so dass es klar ist, wie man zu jeder Zeit so wohl die fortschreitende, als auch die drehende Bewegung anzugeben habe.

Zusatz 1.

§. 609. Wenn anfangs keine fortschreitende Bewegung stattfand, so wird der Mittelpunkt der Trägheit in der auf die Axe normalen Ebene sich zu bewegen anfangen, und da die antreibenden Kräfte beständig in derselben Ebene wirken, wird die ganze Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit in derselben Ebene, auf welche die Drehungsaxe überall normal ist, ausgeführt werden.

Zusatz 2.

§. 610. Dasselbe geschieht, wenn die erste Richtung, worin der Mittelpunkt der Trägheit sich bewegt, auf die Drehungsaxe normal gewesen ist; er wird nämlich alsdann beständig in einer, auf die Drehungsaxe normalen, Ebene seine Bewegung fortsetzen. Etwas anderes geschieht aber, wenn die erste Richtung der fortschreitenden Bewegung mit der Drehungsaxe einen schiefen Winkel gebildet hat.

Zusatz 3.

§. 611. Die drehende Bewegung wird demnach durch das Moment der antreibenden Kraft Kk, welches $= Vf$ ist, die

fortschreitende Bewegung durch diese Kraft $Kk = V$ selbst so bestimmt, als ob dieselbe in ihrer Richtung am Mittelpunkte der Trägheit angebracht wäre.

Aufgabe 56.

§. 612. Einem starren Körper ist eine, aus fortschreitender und um irgend eine Hauptaxe drehender gemischte, Bewegung beigebracht worden und er wird hierauf angetrieben zum Theil durch Kräfte, deren mittlere Richtung durch den Mittelpunkt der Trägheit geht, zum Theil aber durch solche Kräfte, deren mittlere Richtung sich in einer, durch den Mittelpunkt der Trägheit normal auf die Axe gelegten, Ebene befindet; man soll die Bewegung des Körpers bestimmen.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe folgt von selbst aus der vorhergehenden, wenn man nur ausserdem das Verhältniss der Kräfte hat, deren mittlere Richtung durch den Mittelpunkt der Trägheit geht und durch welche, wie wir gesehen haben, auf die fortschreitende Bewegung allein eingewirkt wird. Um daher die fortschreitende Bewegung zu bestimmen, denke man sich, ausser den frühern am Mittelpunkte der Trägheit für sich angebrachten Kräften, an demselben Punkte ausserdem alle spätern einzelnen Kräfte nach ihren Richtungen angebracht. Hierauf betrachte man, wenn es beliebt, die ganze Masse des Körpers als in demselben Punkte vereinigt, damit man den Fall eines Punktes oder unendlich kleinen Körperchens erhalte, welches durch beliebige Kräfte angetrieben wird, ein Fall, den wir nach den frühern Vorschriften behandeln können. Ferner betrachte man zur Bestimmung der drehenden Bewegung, indem man alle durch den Mittelpunkt der Trägheit gehenden Kräfte vernachlässigt, nur diejenigen allein, deren mittlere Richtung sich in der, durch den Mittelpunkt der Trägheit normal auf die Axe gelegten, Ebene befindet und schliesse aus den einzelnen oder aus der allen gleichgeltenden Kraft auf ihr Moment in Bezug auf die Drehungsaxe. Ist dasselbe $= Vf$, so leitet man daraus die Aenderung der drehenden Bewegung wie oben ab, kennt man aber jede von beiden Bewegungen für sich, so wird die ganze Bewegung des Körpers von selbst bekannt.

Zusatz 1.

§. 613. Um die fortschreitende Bewegung zu bestimmen,

hat man demnach alle Kräfte, durch welche der Körper angetrieben wird, einzeln in ihren Richtungen nach dem Mittelpunkte der Trägheit zu übertragen und es wird durch sie die fortschreitende Bewegung ebenso bestimmt werden, als ob keine drehende vorhanden wäre.

Zusatz 2.

§. 614. Um aber die drehende Bewegung zu bestimmen, verbinde man die Momente aller antreibenden Kräfte in Bezug auf die Drehungsaxe; hierdurch wird die drehende Bewegung eben so bestimmt werden, als ob keine fortschreitende stattfände, oder als ob die Drehungsaxe festgehalten würde.

Anmerkung.

§. 615. Der erste Zusatz erstreckt sich sehr weit, wie wir unten sehen werden, auf welche Weise auch immerhin die antreibenden Kräfte angebracht sein mögen; hier genüge es aber, ihn wenigstens für solche Kräfte, wie wir sie in der Aufgabe angenommen, zugelassen zu haben. Der zweite Zusatz findet nur statt, wenn die mittlere Richtung der Kräfte, welche selbst nicht durch den Mittelpunkt der Trägheit gehen, in einer durch diesen Punkt normal auf die Axe gelegten Ebene sich befindet, sonst würde nämlich die Axe nicht die ihr parallele Lage beibehalten. Wir sind demnach noch sehr weit von der allgemeinen Aufgabe entfernt, nach welcher die Bewegung eines durch beliebige Kräfte angetriebenen starren Körpers gesucht wird, und um uns derselben beständig zu nähern, wollen wir den starren Körper als ruhend betrachten und, während er durch beliebige Kräfte angetrieben wird, die erste Erzeugung der Bewegung erforschen. Obgleich wir nämlich sogleich an jene Aufgabe gehen könnten, wird es doch besser sein, gleichsam schrittweise zu ihr aufzusteigen, damit wir auf diese Weise eine deutlichere Kenntniss aller Elemente erlangen.

Kapitel IX.

Von der ersten Erzeugung der Bewegung in starren Körpern.

Lehrsatz 6.

§. 616. Ist die Wirkung zweier, bei der Erzeugung der Bewegung in Verbindung wirkenden, Kräfte bekannt und ist die eine am Mittelpunkte der Trägheit angebracht, so kennt man auch die Wirkung der andern für sich thätigen Kraft.

Beweis.

Die im Mittelpunkte der Trägheit angebrachte Kraft erzeugt im Körper eine reine fortschreitende Bewegung, durch welche seine einzelnen Elemente nach der Richtung der Kraft durch gleiche kleine Wege fortgeführt werden und es sind diese, wenn die antreibende Kraft $= V$ und die Masse des Körpers $= M$ ist, im Zeittheilchen dt

$$= \frac{Vgdt^2}{M}.$$

Wenn nun der Körper ausser durch die Kraft V, welche im Mittelpunkte der Trägheit angebracht ist, durch eine andere beliebige Kraft S angetrieben wird und die Wirkung dieser beiden zugleich thätigen Kräfte bekannt ist; so denke man sich die Sache so, als ob der Körper ausserdem durch eine entgegengesetzte, V gleiche und im Mittelpunkte der Trägheit angebrachte, Kraft angetrieben würde. Hierdurch wird die erstere Wirkung so gestört werden, dass der ganze Körper mit fortschreitender Bewegung, nach der Richtung dieser Kraft, durch den kleinen Weg $= \frac{Vgdt^2}{M}$ zurück geführt wird, und wenn man diese Wirkung mit jener verbindet, so ergibt sich die Wirkung der

den Körper antreibenden Kraft S allein; sie wird demnach bekannt werden.

Zusatz 1.

§. 617. Die Wirkung der Kraft S ist nämlich gleich der Wirkung der zwei zugleich thätigen Kräfte V und S, wenn man die Wirkung fortnimmt, welche die Kraft V allein hervorbringen würde, dem gemäss, was wir oben über die Zerlegung der Bewegung gelehrt haben.

Zusatz 2.

§. 618. Wenn daher durch die zwei zugleich antreibenden Kräfte V und S dem Körper eine drehende Bewegung um irgend eine Axe beigebracht wird, so wird ihm die Kraft S allein eine, aus derselben drehenden und derjenigen fortschreitenden Bewegung, welche eine V gleiche und entgegengesetzte Kraft hervorbringen würde, gemischte Bewegung beibringen.

Anmerkung.

§. 619. Den Gesetzen einer richtigen Methode scheint der Umstand entgegen zu stehen, dass wir aus der Wirkung zweier zugleich thätigen Kräfte die Wirkung der einen zu erforschen versuchen. In der Aufgabe 18. (§. 390.) aber, wo wir die Kräfte bestimmt haben, welche auf die Drehungsaxe keine Einwirkung hervorbringen, haben wir gesehen, dass dieselben sehr selten auf eine einzige, stets aber auf zwei reducirt werden können, deren Wirkung auf den ruhenden Körper man demnach anzugeben im Stande sein wird. Damit wir daher die Wirkung Einer Kraft allein anzugeben vermögen, müssen wir bewirken, dass die eine von jenen zwei Kräften durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gehe und so wird uns dieser Lehrsatz den vielfachsten Nutzen bringen. Es kommt hinzu, dass auch beliebige den Körper antreibende Kräfte auf zwei dieser Art zurückgeführt werden können, wie wir nun zeigen werden.

Lehrsatz 7.

§. 620. Wie viel Kräfte einen starren Körper auch antreiben, und auf welche Weise sie immerhin angebracht sein mögen, so kann man sie immer auf zwei zurückführen, deren eine durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers geht.

Beweis.

(Figur 81.) Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers, und durch ihn nach Belieben irgend eine gerade Linie

ID gezogen. Durch die Richtung einer beliebigen antreibenden Kraft lege man eine auf die gerade Linie ID normale Ebene, welche sie im Punkte R durchschneidet; liegt nun die Richtung dieser Kraft nicht in dieser Ebene, so zerlege man sie in die zwei Kräfte Ss und $S\sigma$, von denen jene in der auf ID normalen Ebene, diese aber parallel ID ist. In dem bestimmten festen Punkte D denke man sich eine auf ID normale Ebene und indem man die gerade Linie ISE zieht, kann man statt der Kraft Ss in den Punkten I und E die jener parallelen Kräfte Ii und Ee substituiren, dergestalt dass

$$\text{die Kraft } Ii = Ss.\frac{DR}{ID} \text{ und die Kraft } Ee = Ss.\frac{IR}{ID}$$

sei. Auf ähnliche Weise substituire man statt der Kraft $S\sigma$ die ihr gleichgeltenden und parallelen Kräfte

$$I\eta = S\sigma.\frac{DR}{ID} \text{ und } E\varepsilon = S\sigma\cdot\frac{IR}{ID}.$$

Eine solche Zerlegung stelle man bei allen, den Körper antreibenden, Kräften an, und wird alsdann aus jeder einzelnen je zwei Kräfte erhalten, welche im Mittelpunkte der Trägheit I angebracht sind, ferner aber auch je zwei Kräfte Ee und $E\varepsilon$, von denen jene in der, im Punkte D auf die Axe ID normalen, Ebene liegt, diese aber auf dieselbe Ebene normal oder der Axe ID parallel ist. Hat man alle Kräfte, welche am Mittelpunkte der Trägheit I angebracht sind, in Eine vereinigt, so lassen sich alle Kräfte Ee, weil sie in derselben Ebene liegen, gleichfalls auf Eine reduciren, es sei dieselbe Mm. (Figur 82.) Auf ähnliche Weise können alle Kräfte $E\varepsilon$, weil sie einander parallel sind, ebenfalls auf Eine gebracht werden, es sei dieselbe Nn, der Axe ID eben so parallel, wie jene Mm sich in der auf die Axe normalen Ebene mMD befindet. Auf diese Weise haben wir statt aller antreibenden Kräfte, wieviel ihrer auch da gewesen sein mögen, drei Kräfte erhalten, die eine im Mittelpunkte der Trägheit I angebrachte und die zwei Mm und Nn, welche drei aber ferner auf folgende Weise sich auf zwei reduciren lassen. Man verlängere die gerade Linie IN nach Q, bis ihr Abstand von der Axe QR gleich wird dem Abstande DM, welcher von D durch N bis zum Zusammentreffen mit der Kraft Mm gezogen ist; es wird alsdann

$$ID : IR = DN : DM.$$

Hierauf kann man statt der Kraft Nn die ihr parallelen Ii und Qq substituiren, so dass

die Kraft $Ii = Nn.\frac{MN}{DM}$ und die Kraft $Qq = Nn.\frac{DN}{DM}$ sei. Die erste geht, in Verbindung mit den übrigen im Mittelpunkte der Trägheit angebrachten Kräften, in Eine über, die zweite Qq aber kann man sich längs ihrer Richtung im Punkte M angebracht denken, und sie kann mit der Kraft Mm vereinigt werden; die mittlere Kraft beider sei $M\mu$. Auf diese Weise sind alle antreibenden Kräfte auf zwei zurückgeführt, die eine im Mittelpunkte der Trägheit I angebrachte, die andere aber diese Kraft $M\mu$.

Zusatz 1.

§. 621. Weil man sowohl die Axe ID, als auch auf ihr den Punkt D nach Belieben annehmen kann, so wird man die antreibenden Kräfte auf unendlich vielfache Weise auf je zwei Kräfte dieser Art, von denen die eine im Mittelpunkte der Trägheit angebracht ist, zurückführen können.

Zusatz 2.

§. 622. Hat man aber Eine Reduction dieser Art ausgeführt, so kann man nach denselben Principien statt der Kraft $M\mu$ zwei andere ihr parallele substituiren, von denen die eine auf den Mittelpunkt der Trägheit I einwirkt, die andere aber in einem beliebigen Punkte der geraden Linie IM angebracht ist, woraus hervorgeht, dass alle Reductionen sich auf dieselbe gerade Linie IM beziehen.

Anmerkung.

§. 623. Dieser Lehrsatz ist von der grössten Wichtigkeit bei dem zu entwickelnden Gegenstande dieses Kapitels, wo uns nämlich die Aufgabe gestellt ist, die erste Erzeugung der Bewegung zu erforschen, wann ein ruhender und freier starrer Körper durch beliebige Kräfte angetrieben wird. Da nämlich diese Kräfte, wie viel ihrer auch da sein mögen, immer auf je zwei zurückgeführt werden können, von denen die eine im Mittelpunkte der Trägheit angebracht ist und wobei die Wirkung dieser Kraft sehr leicht bestimmt wird; so kommt die ganze Arbeit darauf hinaus, dass die durch eine einzige beliebige Kraft hervorgebrachte Wirkung bestimmt werde. Sollte diess nicht zu erreichen sein, so wird man mit dieser Kraft eine andere beliebige, im Mittelpunkte der Trägheit angebrachte combiniren können und wenn man die durch sie vereint hervorgebrachte Wirkung angeben kann, wird die ganze Arbeit voll-

endet sein. Zuerst wollen wir demnach untersuchen, auf welche Weise zwei *derartige Kräfte beschaffen* sein müssen, damit durch sie dem Körper eine Bewegung um eine gegebene, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe beigebracht werde; ist diess nämlich geschehen, so werden wir unser Vorhaben leicht weiter verfolgen können.

Aufgabe 57.

§. 624. Man soll zwei an einem starren Körper anzubringende Kräfte, von denen die eine eine durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Richtung hat, bestimmen, damit der durch sie angetriebene Körper anfange, sich um eine gegebene und durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe zu drehen.

Auflösung.

(Figur 46.) Es liege der Mittelpunkt der Trägheit in O und es sei OA die Axe, um welche die drehende Bewegung erzeugt werden soll; die antreibenden Kräfte müssen ferner so beschaffen sein, dass die Axe nichts von ihnen erleide. Diese Aufgabe ist demnach in der oben §. 390. aufgelösten Aufgabe 18. enthalten, wo man die in der Anmerkung §. 394. allgemein dargestellten Kräfte so bestimmen muss, dass für den Endpunkt O alle Kräfte in demselben angebracht seien. Man setze demnach die Kräfte $Pp=0$ und $Qq=0$, und weil $KI=0$ wie auch $OK=0$ ist; so werden die Kräfte

$$O\pi=\frac{\int xydM}{ab} \text{ und } O\varphi=\frac{\int xzdM}{ab}.$$

Ferner nehme man für den Endpunkt A die Kräfte $A\varrho=0$ und $A\sigma=0$, alsdann werden die Kräfte

$$Rr=\frac{\int xydM}{ab} \text{ und } Ss=\frac{\int xzdM}{ab},$$

also $Rr=O\pi$ und $Ss=O\varphi$, wobei aber erforderlich ist, dass man habe:

$$AR\int xydM+AS.\int xzdM=a\int r^2dM.$$

Da die Ebene OAR, wegen der Lage des Mittelpunktes der Trägheit I in O, beliebig angenommen werden kann, so wird man sie so annehmen können, dass

$$\int xzdM=0$$

werde; hiernach bleiben nur zwei der Aufgabe Genüge leistende Kräfte übrig, die eine, im Mittelpunkte der Trägheit angebrachte

$$O\pi=\frac{\int xydM}{ab},$$

die andere, im Abstande $AR = \frac{a\int r^2 dM}{\int xy dM}$ von der Axe anzubringende, $Rr = \frac{\int xy dM}{ab}$.

Hiernach fassen wir die Auflösung der Aufgabe folgendermaassen kurz zusammen: Man verbinde (Figur 83.) mit der vorausgesetzten Drehungsaxe IA zwei andere Axen IB und IC von der Art, dass, wenn man für ein beliebiges Element des Körpers dM die jenen parallelen Coordinaten $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ und dabei $XZ = \sqrt{y^2 + z^2} = r$ setzt, alsdann

$$\int xz dM = 0$$

werde. Nimmt man nun nach Belieben den Abstand $IA = a$ an und zieht IB parallel die gerade Linie

$$AR = \frac{a\int r^2 dM}{\int xy dM},$$

so wird eine beliebige, IC parallel und in R angebrachte, Kraft Rr die vorausgesetzte Wirkung hervorbringen, wenn man nur ausserdem im Mittelpunkte der Trägheit die ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft $I\pi$ anbringt. Setzt man nun diese Kräfte $Rr = I\pi = V$, so wird, da das aus ihnen entspringende Moment in Bezug auf die Drehungsaxe $IA = \frac{Va\int r^2 dM}{\int xy dM}$ ist, im Zeittheilchen dt um die Axe IA der Winkel

$$d\omega = \frac{Vagdt^2}{\int xy dM}$$

erzeugt werden. (§. 361.)

Zusatz 1.

§. 625. Da man den Zwischenraum $IA = a$, von welchem der Abstand AR abhängig ist, beliebig annehmen kann, so befinden sich alle Punkte R auf der geraden Linie IR, welche mit IA einen Winkel bildet, dessen Tangente $= \frac{\int r^2 dM}{\int xy dM}$ ist; wenn man nur die Ebene AIB so annimmt, dass $\int xz dM = 0$ wird.

Zusatz 2.

§. 626. Hat man diese gerade Linie IR gezogen, und ist eine beliebige Kraft in irgend einem Punkte derselben und normal auf die Ebene AIB angebracht, so wird, wenn ausserdem eine ihr gleiche und engegengesetzte Kraft $I\pi$ in I angebracht ist, der Körper anfangen, sich um die Axe IA zu drehen.

Zusatz 3.

§. 627. Ist aber eine beliebige Kraft Rr vorausgesetzt und eine ihr gleiche in I entgegengesetzt angebracht, so wird der Körper anfangen, sich um irgend eine durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe zu drehen, von welcher nur bekannt ist, dass sie in einer, durch den Mittelpunkt der Trägheit I auf die Richtung der antreibenden Kraft normal gelegten, Ebene sich befindet.

Aufgabe 58.

§. 628. Ein ruhender starrer Körper wird durch eine beliebige Kraft angetrieben; man soll den ersten Anfang der Bewegung bestimmen, welche durch diese Kraft im Körper um eine Axe erzeugt werden wird, die in einer auf die Richtung der Kraft normalen Ebene liegt, wenn diess nämlich möglich ist.

Auflösung

(Figur 84.) Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers, durch welchen man sich eine, auf die Richtung der Kraft normale, Ebene gelegt zu denken hat, die Ebene des Papiers stelle dieselbe dar, so dass man sich die antreibende Kraft $Rr = V$ normal auf sie zu denken hat; ferner sei IR normal auf Rr und man setze die Länge $IR = h$. Ausserdem bringe man am Körper, in seinem Mittelpunkte der Trägheit, die Kraft $I\pi$ jener gleich und entgegengesetzt an, so dass diese auf der entgegengesetzten Seite auf die Ebene des Papiers normal sei. Wirken diese zwei Kräfte zugleich, so wird der Körper anfangen, sich um irgend eine durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe zu drehen, und nach dem vorhergehenden §. wird diese Axe offenbar in der Ebene des Papiers liegen. Ist dieselbe demnach IA, so muss man zur Bestimmung ihrer Lage den Winkel $RIA = \eta$ suchen, so dass, wenn man aus R auf sie normal die Linie RA zieht,

$$RA = h \sin \eta \text{ und } IA = h \cos \eta$$

werde. Weil wir aber die Lage dieser Axe noch nicht kennen, beziehen wir die einzelnen Elemente des Körpers auf je drei Axen IR, IP und IQ, von denen die erste durch die Richtung der antreibenden Kraft gegeben wird, die zweite IP in der Ebene des Papiers auf sie normal ist und die dritte IQ auf dieser Ebene normal steht. Es seien demnach die Coordinaten

$$IX = x,\ XY = y \text{ und } YZ = z.$$

Um ferner die mit den obigen Formeln übereinstimmenden

Coordinaten zu erhalten, ziehe man aus Y auf die Drehungsaxe IA normal YX' und es seien diese Coordinaten

$$IX' = x',\quad X'Y = y' \text{ und } YZ = z' = z \text{ wie vorher.}$$

Die zwei erstern von diesen werden durch die vorhergehenden so bestimmt, dass man hat

$$x' = x\cos\eta - y\sin\eta \text{ und } y' = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

Hiernach muss nothwendig $\int x'z\,dM = 0$ und $\operatorname{tg} AIR = \operatorname{tg}\eta = \frac{\int r^2 dM}{\int x'y'dM}$ sein (§. 625.), wo $r^2 = y'^2 + z^2$ ist. Es wird nun aber

$$\int x'z\,dM = \cos\eta \int xz\,dM - \sin\eta \int yz\,dM,$$

$$\int r^2 dM = \sin\eta^2 \int x^2 dM + 2\sin\eta\cos\eta \int xy\,dM + \cos\eta^2 \int y^2 dM + \int z^2 dM$$

und $\int x'y'dM = \sin\eta\cos\eta \int x^2 dM + (\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\int xy\,dM - \sin\eta\cos\eta\int y^2 dM.$

Man setze die über den ganzen Körper ausgedehnten Integrale

$$\int x^2 dM = A,\ \int y^2 dM = B,\ \int z^2 dM = C,\ \int xy\,dM = D,\ \int xz\,dM = E,\ \int yz\,dM = F,$$

und wir haben alsdann die Gleichungen:

$$E\cos\eta - F\sin\eta = 0$$

und $A\sin\eta^2 + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\operatorname{tg}\eta - B\sin\eta^2 = A\sin\eta^2 + 2D\sin\eta\cos\eta + B\cos\eta^2 + C,$

oder $D\operatorname{tg}\eta + B + C = 0.$

Hieraus erhält man auf doppelte Weise

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{E}{F} \text{ und } \operatorname{tg}\eta = -\frac{B+C}{D},$$

und nur, wenn diese zwei Werthe unter sich übereinstimmen, kann die Aufgabe unter der vorausgesetzten Bedingung, wonach die Drehungsaxe in einer auf die Richtung der Kraft normalen Ebene angenommen wird, aufgelöst werden. Setzen wir nun voraus, die Kraft sei so angebracht, dass

$$\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$$

werde, so wird der Körper anfangen sich um die Axe IA zu drehen, welche so in der auf die Richtung der Kraft normalen Ebene liegt, dass

$$\operatorname{tg} RIA = \frac{E}{F} = -\frac{B+C}{D}$$

wird. Da nun das Moment der Kraft $= Vh\sin\eta$, und das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Axe $= \int r^2 dM = A\sin\eta^2 + B\cos\eta^2 + 2D\sin\eta\cos\eta + C$ ist, so wird der Körper sich während des Zeittheilchens dt um den Winkel

$$d\omega = \frac{Vghdt^2 \sin\eta}{A\sin\eta^2 + B\cos\eta^2 + 2D\sin\eta\cos\eta + C}$$

drehen. Da diess die Wirkung der zwei in Verbindung thätigen Kräfte Rr und $I\pi$ ist, so füge man, um die Wirkung der Kraft $Rr = V$ allein zu erhalten, die Kraft $Ip = V$ hinzu und es wird alsdann dem Körper ausser der drehenden, eine reine fortschreitende Bewegung nach der, Rr parallelen, Richtung IQ beigebracht werden, in Folge welcher er im Zeittheilchen dt

den kleinen Weg $= \frac{Vgdt^2}{M}$

zurücklegen wird.

Zusatz 1.

§. 629. Die Auflösung dieser Aufgabe erstreckt sich demnach nur auf diejenigen Fälle, in welchen die antreibende Kraft $Rr = V$ so am Körper angebracht ist, dass nach Ausrechnung der dargestellten Integralformeln

$$\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$$

werde.

Zusatz 2.

§. 630. Findet diese Eigenschaft aber nicht statt, so kennen wir die Auflösung der Aufgabe noch nicht und wissen nur, dass die Drehung nicht um eine Axe erfolgt, welche in einer auf die Richtung der antreibenden Kraft normalen Ebene liegt.

Anmerkung.

§. 631. Es wird allerdings wunderbar erscheinen, dass während die Vorbereitung, welche wir aus den von den Axen auszuhaltenden Kräften oben gefunden haben, eine vollständige Auflösung zu versprechen schien, nun dennoch unendlich viele Fälle ausgeschlossen werden, welche unsere Auflösung nicht umfasst. Da es nämlich gewiss ist, dass die Umdrehung nur um eine solche Axe erfolgen kann, welche durchaus gar keine Kräfte auszuhalten hat, so hätte die Aufgabe 18. eine vollständige Auflösung darbieten müssen, wenn wir dieselbe in aller Ausdehnung gelöst hätten. Man muss aber allerdings bemerken, dass in dieser Aufgabe nur solche Kräfte angenommen worden sind, deren Richtungen sich in, auf die Axe normalen, Ebenen befanden, da wir doch auch schief gerichtete Kräfte hätten einführen können, wenn nur die daraus entspringenden der Axe parallelen Kräfte sich aufgehoben hätten. Und diess

kommt in Wahrheit bei den ausgeschlossenen Fällen in Gebrauch, wo der Körper seine drehende Bewegung um eine Axe beginnen muss, welche gegen die, normal auf die antreibende Kraft durch den Mittelpunkt der Trägheit gelegte, Ebene geneigt ist, weil alsdann aus der Zerlegung der Kraft Rr eine Kraft entspringt, welche einer solchen Axe parallel ist. Hierauf muss man allerdings Rücksicht nehmen, wenn man diese Aufgabe im allgemeinen auflösen will.

Aufgabe 59.

§. 632. Ein ruhender starrer Körper wird durch eine beliebige Kraft angetrieben, und es ist zugleich eine derselben gleiche und entgegengesetzte im Mittelpunkte der Trägheit angebracht; man soll die Axe bestimmen, um welche er zuerst sich zu drehen anfangen wird.

Auflösung.

(Figur 84.) Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers und es stelle, wie vorher, das Papier eine durch I normal auf die Richtung der Kraft $Rr = V$ gelegte Ebene dar, in welcher der Abstand $IR = h$ gesetzt wird. Nun nehme man in dieser Ebene den Winkel $RIA = \eta$ an, so dass, wenn man aus R auf IA das Perpendikel RA fällt,

$$IA = h \cos\eta \text{ und } RA = h \sin\eta$$

wird; man errichte ferner in A auf der Ebene das Perpendikel AD und es sei, wenn man die Linie ID zieht, der Winkel $AID = \theta$, also

$$AD = h \cos\eta \operatorname{tg}\theta \text{ und } ID = \frac{h\cos\eta}{\cos\theta}.$$

Diese Linie ID sei die gesuchte Drehungsaxe, so dass wir die beiden Winkel η und θ zu bestimmen haben. Der Körper muss demnach durch je drei Coordinaten ausgedrückt werden, deren eine wir auf der Axe ID annehmen. Es sei daher eine Relation zwischen den Coordinaten $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ gegeben, die erste derselben werde auf der geraden Linie IR, die zweite in der auf die Kraft normalen Ebene und die dritte der Kraft Rr parallel angenommen. Aus Y ziehe man zuerst auf IA perpendiculär YX', in der auf das Papier normalen Ebene AID aber das Perpendikel $X'y \# YZ$ und $yZ \# X'Y$; alsdann wird, wie wir vorhin gesehen haben:

$$IX' = x\cos\eta - y\sin\eta,\quad X'y = YZ = z \text{ und } X'Y = yZ = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

Hierauf ziehe man in der normalen Ebene aus y auf ID das Perpendikel yx, und man wird dann solche neue Coordinaten erhalten, wie wir sie brauchen, nämlich

$$Ix = X,\ xy = Y \text{ und } yZ = Z.$$

Dieselben werden durch die vorhergehenden folgendermaassen bestimmt:

$$X = x\cos\eta\cos\theta - y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta,$$
$$Y = z\cos\theta - x\cos\eta\sin\theta + y\sin\eta\sin\theta,$$
$$Z = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

(Figur 85.) Diese Coordinaten werden nun, indem man die Ebene IAD auf die Ebene des Papiers projicirt, in der Figur 85. dargestellt, auf welche erstere $AR = h\sin\eta$ normal und wo die Kraft $Rr \mathbin{\#} AD$ ist. Man ziehe nun $DV \mathbin{\#} AR$ und denke sich die Kraft im Punkte V angebracht, so dass die Kraft $Vr = V$ sei. Zieht man nun $Vv \mathbin{\#} xy$ und $Vu \mathbin{\#} Ix$, so wird, weil der Winkel $rVv = \theta$ ist, die Kraft Vr in die zwei

$$Vv = V\cos\theta \text{ und } Vu = V\sin\theta$$

zerlegt. Dieselben werden entgegengesetzt im Punkte I angebracht und zwar die erstere $Ii = V\cos\theta$ jetzt normal auf ID in der Ebene des Papiers, durch die zweite aber wird die Axe längs DI angetrieben. Das Moment der Kraft $Vv = V\cos\theta$ ist, in Bezug auf die Axe $ID = V\cos\theta . h\sin\eta = Vh\sin\eta\cos\theta$ und wenn man $Y^2 + Z^2 = R^2$ setzt; so wird das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf dieselbe Axe $= \int R^2 dM$, wesshalb im Zeittheilchen dt eine Drehung durch den Winkel

$$d\omega = \frac{Vghdt^2 \sin\eta\cos\theta}{\int R^2 dM}$$

erfolgen wird. Da die Axe gar keine Kräfte aushalten soll, so bringe man die Kraft $Vv = V\cos\theta$ an der Axe selbst in D an, so dass $Dd = V\cos\theta$ sei, die Kraft $Vu = V\sin\theta$ denke man sich nach ihrer Richtung am Perpendikel $IT = DV = h\sin\eta$ angebracht, woraus zuerst für die Axe eine längs ID antreibende Kraft entspringt, welche jene obige aufhebt. Indem man hierauf aber den Abstand

$$ID = \frac{h\cos\eta}{\cos\theta} = a$$

setzt, entspringen daraus je zwei auf die Axe und auf die Ebene des Papiers normale Kräfte

$$I\eta = D\delta = \frac{h\sin\eta}{a} \cdot V\sin\theta = V\operatorname{tg}\eta\sin\theta\cos\theta.$$

Ausserdem haben wir aber die Kräfte

$$Ii = Dd = V\cos\theta,$$

welche durch die elementaren Kräfte aufgehoben werden müssen. Nach Aufgabe 16. (§. 380.) ergeben die hier angepassten elementaren Kräfte aber je zwei, in den Punkten P und Q anzubringende, Kräfte Pp und Qq, so dass

$$IP = \frac{\int XZdM}{\int ZdM},\ \text{die Kraft}\ Pp = \frac{Vh\sin\eta\cos\theta\int ZdM}{\int R^2.dM}$$

$$IQ = \frac{\int XYdM}{\int YdM}\ \text{und die Kraft}\ Qq = \frac{Vh\sin\eta\cos\theta\int YdM}{\int R^2.dM}$$

wird. Da aber die Bewegung hier in dem entgegengesetzten Sinne des dort angenommenen ihren Anfang nimmt, so müssen diese Kräfte den vorhergehenden gleich gestellt werden, und da I der Mittelpunkt der Trägheit, also

$$\int YdM = 0\ \text{und}\ \int ZdM = 0$$

ist, so muss alles auf Momente zurückgeführt werden. Es muss demnach

$$Pp.IP = Dd.ID\ \text{und}\ Qq.IQ = D\delta.ID$$

sein und wir erhalten so diese zwei Gleichungen:

$$\frac{Vh\sin\eta\cos\theta\int XZdM}{\int R^2dM} = Vh\cos\eta$$

und

$$\frac{Vh\sin\eta\cos\theta\int XYdM}{\int R^2dM} = Vh\sin\eta\sin\theta$$

oder

$$\sin\eta\cos\theta\int XZdM = \cos\eta\int R^2dM\ \text{und}\ \cos\theta\int XYdM = \sin\theta\int R^2dM.$$

Setzt man nun die aus den Hauptcoordinaten x, y und z gebildeten Integrale

$$\int x^2dM = A,\ \int y^2dM = B,\ \int z^2dM = C,$$
$$\int xydM = D,\ \int xzdM = E\ \text{und}\ \int yzdM = F;$$

so wird, weil $R^2 = Y^2 + Z^2$ ist:

$$\int R^2dM = A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2\sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2\sin\theta^2)$$
$$+ C\cos\theta^2 + 2D\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta + 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta,$$
$$\int XYdM = -A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta + C\sin\theta\cos\theta$$
$$+ 2D\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta + E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - F\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2),$$
$$\int XZdM = A\sin\eta\cos\eta\cos\theta - B\sin\eta\cos\eta\cos\theta$$
$$+ D\cos\theta(\cos\eta^2 - \sin\eta^2) + E\sin\eta\sin\theta + F\cos\eta\sin\theta.$$

Substituirt man diese Werthe, so nehmen die zwei gefundenen Gleichungen folgende Gestalt an:

$$\text{I.}\quad -A\cos\eta\sin\theta^2 - B\cos\eta - C\cos\eta\cos\theta^2 - D\sin\eta\cos\theta^2$$
$$+ E(1 + \cos\eta^2)\sin\theta\cos\theta - F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$\text{II.}\quad -A\sin\theta - B\sin\theta + E\cos\eta\cos\theta - F\sin\eta\cos\theta = 0.$$

Die zweite ergibt

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E\cos\eta - F\sin\eta}{A+B},$$

wenn man dagegen beide nach der Bezeichnung II. $\times \cos\eta \sin\theta$ — I. mit einander verbindet, so erhält man

$$B\cos\eta\cos\theta^2 + C\cos\eta\cos\theta^2 + D\sin\eta\cos\theta^2 - E\sin\theta\cos\theta = 0$$

oder
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(B+C)\cos\eta + D\sin\eta}{E}.$$

Wir haben demnach endlich

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{E^2 - (A+B)(B+C)}{(A+B)D + EF},$$

wonach beide Winkel $RIA = \eta$ und $AID = \theta$, also auch die Drehungsaxe ID bekannt werden.

Zusatz 1.

§. 633. (Figur 84.) Wird demnach eine beliebige Kraft $Rr = V$ vorausgesetzt und zugleich eine ihr gleiche im Mittelpunkte der Trägheit I entgegengesetzt angebracht, so lege man durch I eine auf die Richtung der Kraft normale Ebene PIR und errichte auf ihr das Perpendikel IQ. Diesen drei Coordinatenaxen IR, IP und IQ parallel nehme man, zur Bestimmung eines jeden in Z gelegenen Elementes des Körpers dM, die Coordinaten $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ an und bestimme mittelst derselben, der Natur des Körpers entsprechend, die folgenden sechs Werthe:

$$\int x^2 dM = A,\ \int y^2 dM = B,\ \int z^2 dM = C,\ \int xy dM = D,$$
$$\int xz dM = E \text{ und } \int yz dM = F.$$

Zusatz 2.

§. 634. Hat man diese gefunden, so nehme man in der auf die Richtung der Kraft normalen Ebene RIP, auf der entgegengesetzten Seite der positiven Coordinaten $XY = y$ oder in der Gegend der negativen, den Winkel $RIA = \eta$ so an, dass

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{E^2 - (A+B)(B+C)}{(A+B)D + EF}$$

werde und hat man diesen gefunden, so errichte man über dieser Ebene, in der Gegend der positiven Coordinaten $YZ = z$, den Winkel $AID = \theta$ so, dass

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E\cos\eta - F\sin\eta}{A+B} \text{ oder } \operatorname{tg}\theta = \frac{(B+C)\cos\eta + D\sin\eta}{E}$$

werde; alsdann wird ID die Drehungsaxe sein.

Zusatz 3.

§. 635. Setzt man den Abstand $IR = h$, so wird in Bezug auf diese Axe ID das Moment der antreibenden Kraft $= Vh \sin\eta \cos\theta$ und das Moment der Trägheit $= \int R^2 dM$, welches letztere auch $= \operatorname{tg}\eta \cos\theta \int XZdM = \operatorname{cotg}\theta \int XYdM$ ist und dessen Werth nach dem Vorhergehenden leicht ermittelt wird. Hiernach wird aber im Zeitelement dt eine Umdrehung durch den Winkel

$$d\omega = \frac{Vghdt^2 \sin\eta \cos\theta}{\int R^2 dM}$$

erfolgen.

Anmerkung.

§. 636. Hiermit ist also unsere allgemeine Aufgabe, in welcher die Summe dieses Kapitels sich befindet, vollkommen gelöst; aus derselben folgt von selbst der vorher behandelte Fall, in welchem nämlich der Winkel $\theta = 0$ ist. Alsdann ergibt sich nämlich aus der ersten Formel

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{E}{F}$$

und aus der zweiten

$$\operatorname{tg}\eta = -\frac{B+C}{D},$$

und nur wenn diese Werthe mit einander übereinstimmen, kann jener Fall stattfinden. Umgekehrt wird, wenn

$$DE + (B+C)F = 0$$

ist, weil $B + C = -\frac{DE}{F}$,

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{E}{F} \text{ und } \operatorname{tg}\theta = 0.$$

Uebrigens bemerke ich, dass wir nach dem, was oben über die Hauptaxen gelehrt worden ist,

$$\int XYdM = -\frac{d.\int R^2 dM}{2d\theta}, \text{ wo nur } \theta \text{ und}$$

$$\int XZdM = \frac{d.\int R^2 dM}{2d\eta.\cos\theta}, \text{ wo nur } \eta \text{ veränderlich ist,}$$

haben. Substituirt man diese Werthe, so verlangen die zwei Hauptbedingungen, dass

$$\frac{\sin\eta d.\int R^2 dM}{2d\eta} = \cos\eta \int R^2 dM \text{ und } -\frac{\cos\theta d.\int R^2 dM}{2d\theta} = \sin\theta \int R^2 dM$$

sei, wobei in der ersten nur η und in der zweiten nur θ veränderlich ist. Das Integral beider ist dasselbe, nämlich

$$\int R^2 dM = \alpha \sin\eta^2 \cos\theta^2,$$

woraus ich umgekehrt schliesse, dass die Winkel η und θ so bestimmt werden müssen, dass die Grösse

$$\frac{\sin\eta^2 \cos\theta^2}{\int R^2 dM}$$

ein Minimum werde, weil hieraus dieselben zwei aufzulösenden Gleichungen hervorgehen. Diese Formel entsteht aber auch, wenn man $d\omega^2 \int R^2 dM$ oder $\int dM . R^2 d\omega^2$ zu einem Minimum macht und da in diesem Ausdruck $R d\omega$ die Geschwindigkeit des Elementes dM bezeichnet und daher $dM . R^2 d\omega^2$ seine so genannte lebendige Kraft ist; so schliessen wir hieraus auf folgenden ausgezeichneten Lehrsatz.

Lehrsatz 8.

§. 637. Wird ein ruhender starrer Körper durch eine beliebige Kraft angetrieben und ist ausserdem an seinem Mittelpunkte der Trägheit eine gleiche und entgegengesetzte Kraft angebracht; so wird demselben um eine derartige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe im ersten Augenblick eine solche drehende Bewegung beigebracht werden, dass der ganze Körper dadurch die kleinste lebendige Kraft erlangt, welche letztere dem Aggregate aller Elemente, multiplicirt durch die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten, gleich ist.

Beweis.

Welche durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe man nämlich auch annehmen mag, so wird in Bezug auf sie die vorausgesetzte Kraft V ein bestimmtes Moment erlangen, welches $= Vf$ sei; ferner wird der Körper in Bezug auf dieselbe Axe ein bestimmtes Moment der Trägheit haben, welches $= \int R^2 dM$ sei; beide werden von der Lage der angenommenen Axe abhängig sein. Hieraus wird aber im Zeittheilchen dt um diese Axe ein Winkel

$$d\omega = \frac{Vfg dt^2}{\int R^2 dM}$$

und die unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{2 Vfg dt}{\int R^2 dM}$$

entspringen; es wird demnach die Geschwindigkeit des Elementes dM, welches von der Axe um den Zwischenraum R entfernt ist, $= R\Omega$ und seine lebendige Kraft $= R^2 \Omega^2 dM$. Die im unendlich kleinen Zeittheilchen dt erlangte lebendige Kraft des ganzen Körpers wird daher

$$= \Omega^2 \int R^2 dM = \frac{4 V^2 f^2 g^2 dt^2}{\int R^2 dM},$$

welche, weil V, g und dt constant sind, ein Minimum sein wird, wenn

$$\frac{f^2}{\int R^2 dM}$$

zu einem solchen gemacht wird und durch diese Bedingung wird die Lage der Axe bestimmt. Hieraus ergibt sich aber dieselbe Bestimmung der Axe, welche wir vorher gefunden haben, so dass aus diesem Princip des Minimum dieselbe Auflösung hätte hergeleitet werden können.

Anmerkung.

§. 638. Was den Gebrauch der vorher gefundenen Auflösung betrifft, so ist der Umstand noch zu lästig, dass für eine jede antreibende Kraft die Natur des Körpers auf besondere Coordinaten zurückgeführt werden muss. Für diese Unbequemlichkeit ergibt sich ein Mittel durch dasjenige, was wir oben über die Hauptaxen eines jeden Körpers gelehrt haben, indem, wenn man in Bezug auf diese die Momente der Trägheit einmal gefunden hat, man sehr leicht daraus auf die Momente in Bezug auf alle andern Axen schliessen kann. Ferner genügt es auch für den gegenwärtigen Zweck, die Relation des Körpers auf Coordinaten, welche den Hauptaxen parallel sind, zu kennen, weil man hieraus die Relation auf jede andere drei Coordinaten ableiten kann. Ich werde daher die obige Aufgabe so auflösen, dass ich die antreibende Kraft als in Bezug auf die Hauptaxen gegeben annehme und die Auflösung selbst nach dem schon aufgestellten Princip, dass die kleinste lebendige Kraft erzeugt werde, suche.

Aufgabe 60.

§. 639. Es sind die Hauptaxen eines starren Körpers und in Bezug auf sie die Momente der Trägheit gegeben, ferner wird derselbe durch eine beliebige Kraft angetrieben und es ist eine andere dieser gleiche und entgegengesetzte Kraft im Mittelpunkte der Trägheit des Körpers angebracht; man soll die Axe bestimmen, um welche er zuerst sich zu drehen anfangen wird.

Auflösung.

(Figur 86.) Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers und die geraden Linien IA, IB, IC seine drei Hauptaxen, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit $M.a^2$,

$M.b^2$, $M.c^2$ sind. Nun werde der Körper durch eine beliebige Kraft angetrieben und ihr Durchgangspunkt durch die Ebene, welche durch die Hauptaxen IA und IB gelegt ist, bezeichnet; derselbe liege in V und vom Punkte I um den Abstand $IV = h$ entfernt, wobei der Winkel $AIV = \delta$ ist. Nun zerlege man die Kraft, als ob sie in diesem Punkte angebracht wäre, in die drei den Axen parallele $VP = P$, $VQ = Q$ und $VR = R$, alsdann hat man sich diesen gleiche und entgegengesetzte im Punkte I angebracht zu denken. Vermöge dieser Kräfte wird der Körper anfangen, sich um irgend eine durch den Mittelpunkt der Trägheit I gehende Axe zu drehen, es sei dieselbe IF, welche gegen die Ebene BIA um den Winkel $FIE = \theta$ geneigt und wobei der Winkel $AIE = \eta$ ist; diese zwei Winkel hat man zu bestimmen. Zuerst suche man das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Axe IF, welches, weil $\cos AIF = \cos\eta\cos\theta$, $\cos BIF = -\sin\eta\cos\theta$ und $\cos CIF = \sin\theta$ ist, nach dem Frühern (§. 452.) sein wird

$$= M[a^2\cos\eta^2\cos\theta^2 + b^2\sin\eta^2\cos\theta^2 + c^2\sin\theta^2].$$

Ferner hat man die Momente der Kräfte P, Q, R in Bezug auf diese Axe IF zu erforschen; es geht aber aus dem Frühern hervor, dass, wenn man VM auf IE normal zieht, so dass $VM = h\sin(\delta + \eta)$ ist, alsdann das Moment der Kraft $VR = R$ sein wird

$$= R.VM.\cos\theta = Rh\sin(\delta + \eta)\cos\theta.$$

(Figur 87.) Um aber die Momente der übrigen Kräfte leichter finden zu können, betrachten wir die Punkte V, A, B, C, E, F als auf der Oberfläche einer Kugel liegend, deren Mittelpunkt sich in I befindet. Es werden demnach die Bogen AB, AC und BC Quadranten, $AV = \delta$, $AE = \eta$ und $EF = \theta$ sein, und man zerlege die in V angebrachten Kräfte P, Q, R in je zwei, von denen die einen normal auf die Oberfläche der Kugel sind, die andern dieselbe berühren. Die erstern gehen alsdann durch den Mittelpunkt und bilden gar keine Momente, wesshalb es genügt, die letztern allein zu betrachten und zwar werden diese folgende Werthe haben:

längs VA die Kraft $= P\sin AV$
- VB - - $= Q\sin BV$
- CV - - $= R\sin CV = R$,

weil CV ein Quadrant ist. Diese Kräfte zerlege man nun ferner nach der Richtung VF und einer darauf senkrechten, wobei die erstern mit der Axe IF in derselben Ebene liegen und

daher kein Moment bilden. Die andern Kräfte werden aber zusammen

$$P \sin AV \sin AVF - Q \sin BV \sin BVF - R \sin CVF,$$

und da ihre Richtung normal auf die Ebene IFV ist, so wird sie sich auch in einer auf die Axe IF normalen Ebene befinden. Da ferner ihr Abstand von der Axe $= h \sin FV$ ist, so wird, weil $AV = \delta$ und $\sin BVF = \sin AVF$ ist, das gesuchte Moment

$$= h[(P \sin\delta - Q \cos\delta) \sin AVF \sin FV - R \cos AVF \sin FV].$$

Es ist aber $\sin AVF \sin FV = \sin FE = \sin\theta$ und $\cos AVF \sin FV = \cos FE \sin VE = \sin(\delta+\eta)\cos\theta$, und so das gesuchte Moment

$$= Ph \sin\delta \sin\theta - Qh \cos\delta \sin\theta - Rh \sin(\delta+\eta)\cos\theta.$$

Der im Zeittheilchen dt erzeugte Winkel wird hiernach

$$d\omega = \frac{ghdt^2 [P \sin\delta \sin\theta - Q \cos\delta \sin\theta - R \sin(\delta+\eta)\cos\theta]}{M[a^2 \cos\eta^2 \cos\theta^2 + b^2 \sin\eta^2 \cos\theta^2 + c^2 \sin\theta^2]},$$

wesshalb der Ausdruck

$$\frac{[(P \sin\delta - Q \cos\delta)\sin\theta - R \sin(\delta+\eta)\cos\theta]^2}{a^2 \cos\eta^2 \cos\theta^2 + b^2 \sin\eta^2 \cos\theta^2 + c^2 \sin\theta^2}$$

ein Minimum werden muss. Setzen wir zuerst nur θ veränderlich, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}&2[a^2\cos\eta^2\cos\theta^2 + b^2\sin\eta^2\cos\theta^2 + c^2\sin\theta^2][(P\sin\delta - Q\cos\delta)\cos\theta \\ &\quad + R\sin(\delta+\eta)\sin\theta] = 2[-a^2\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta - b^2\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + c^2\sin\theta\cos\theta][(P\sin\delta - Q\cos\delta)\sin\theta - R\sin(\delta+\eta)\cos\theta].\end{aligned}$$

Dieselbe lässt sich auf folgende Form bringen:

$$(P\sin\delta - Q\cos\delta)(a^2\cos\eta^2 + b^2\sin\eta^2)\cos\theta + Rc^2\sin(\delta+\eta)\sin\theta = 0,$$

woraus wir erhalten

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)(a^2\cos\eta^2 + b^2\sin\eta^2)}{Rc^2\sin(\delta+\eta)}.$$

Nimmt man jetzt η als veränderlich an, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}&2[a^2\cos\eta^2\cos\theta^2 + b^2\sin\eta^2\cos\theta^2 + c^2\sin\theta^2][-R\cos(\delta+\eta)\cos\theta] \\ &\quad = 2[-a^2\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 + b^2\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2] \\ &\quad\quad [(P\sin\delta - Q\cos\delta)\sin\theta - R\sin(\delta+\eta)\cos\theta],\end{aligned}$$

welche sich auf folgende Form bringen lässt:

$$\begin{aligned}&R\cos\theta[a^2\cos\delta\cos\eta\cos\theta^2 - b^2\sin\delta\sin\eta\cos\theta^2 + c^2\cos(\delta+\eta)\sin\theta^2] \\ &\quad = (Q\cos\delta - P\sin\delta)(b^2 - a^2)\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta^2.\end{aligned}$$

Setzt man hierin statt $Q\cos\delta - P\sin\delta$ den Werth aus der obigen Gleichung

$$\frac{Rc^2\sin(\delta+\eta)\operatorname{tg}\theta}{a^2\cos\eta^2 + b^2\sin\eta^2},$$

und reducirt man hierauf, so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$[a^2\cos\delta\cos\eta - b^2\sin\delta\sin\eta]\,[(a^2\cos\eta^2 + b^2\sin\eta^2)\cos\theta^2 + c^2\sin\theta^2] = 0.$$

Hieraus folgen die zwei Gleichungen

$$a^2\cos\delta\cos\eta - b^2\sin\delta\sin\eta = 0$$

und $$(a^2\cos\eta^2 + b^2\sin\eta^2)\cos\theta^2 + c^2\sin\theta^2 = 0,$$

von denen die zweite unmöglich ist, weil alle ihre Theile positiv sind. Aus der ersten erhalten wir demnach, zur Bestimmung des Winkels η,

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{a^2\cos\delta}{b^2\cos\delta}$$

und ferner, zur Bestimmung von θ,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)\,a^2b^2}{Rc^2\sqrt{a^4\cos\delta^2 + b^4\sin\delta^2}},$$

oder, damit die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens keinen Zweifel übrig lasse,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)a^2\cos\eta}{Rc^2\sin\delta} = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)\,b^2\sin\eta}{Rc^2\cos\delta}.$$

Nachdem wir nun diese Axe gefunden haben, erhält man, wenn man statt $Q\cos\delta - P\sin\delta$ den obigen Werth substituirt, das Moment der antreibenden Kräfte in Beziehung auf diese Axe

$$= \frac{Rh\sin(\delta+\eta)\,[a^2\cos\eta^2\cos\theta^2 + b^2\sin\eta^2\cos\theta^2 + c^2\sin\theta^2]}{(a^2\cos\eta^2 + b^2\sin\eta^2)\cos\theta};$$

es wird also der im Zeittheilchen dt um die Axe erzeugte Winkel

$$d\omega = \frac{Rghdt^2\sin(\delta+\eta)}{M\cos\theta\,(a^2\cos\eta^2 + b^2\sin\eta^2)} = \frac{Rghdt^2\sqrt{a^4\cos\delta^2 + b^4\sin\delta^2}}{Ma^2b^2\cos\theta},$$

wenn man für $\sin\eta$ und $\cos\eta$ ihre Werthe setzt, die sich aus dem obigen Ausdruck von $\operatorname{tg}\eta$ ergeben.

Zusatz 1.

§. 640. (Figur 86.) Aus der Lage des Punktes V, in welchem die Richtung der antreibenden Kraft die Ebene AIB durchschneidet, findet man sogleich in derselben Ebene die gerade Linie IE, auf welche die Drehungsaxe IF sich stützt. Setzt man nämlich den Winkel $AIV = \delta$, so wird

$$\operatorname{tg} AIE = \operatorname{tg}\eta = \frac{a^2\cos\delta}{b^2\sin\delta}$$

und ist daher nicht von der Richtung der Kraft abhängig.

Zusatz 2.

§. 641. Geht demnach die antreibende Kraft durch die Hauptaxe IA, so wird der Winkel $AIE = 90^0$ und es wird sich

die Drehungsaxe IF in einer auf die Axe IA normalen Ebene befinden. Da aber $\delta=0$, also $\eta=90$ ist, so wird

$$\operatorname{tg} EIF = \operatorname{tg}\theta = \frac{Qb^2}{Rc^2}.$$

Zusatz 3.

§. 642. Sind die Momente der Trägheit in Beziehung auf die Axen IA und IB einander gleich, ist also $a^2=b^2$, so wird

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{cotg}\delta = \operatorname{tg}(90^0-\delta), \text{ also } VIE=90^0.$$

In diesem Falle ist daher die Drehungsaxe IF normal auf die gerade Linie IV und es wird

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)a^2}{Rc^2}.$$

Zusatz 4.

§. 643. Wirkt die antreibende Kraft, welche $=V$ sei, deren Richtung die Ebene AIB im Punkte V durchschneidet und aus deren Zerlegung die Kräfte P, Q und R entspringen, allein auf den Körper; so flösst sie diesem die angegebene Bewegung um die gefundene Axe IF ein, ausserdem aber bringt sie ihm eine fortschreitende Bewegung längs ihrer Richtung bei, vermöge welcher er im Zeittheilchen dt den kleinen Weg

$$= \frac{Vgdt^2}{M}$$

zurücklegen wird.

Anmerkung.

§. 644. Bei der Auflösung dieser Aufgabe war es sehr angenehm zu sehen, auf welche Weise die Rechnung, die im Anfange nicht wenig verwickelt zu sein schien, beständig gleichsam von selbst zur grössern Einfachheit gebracht wurde, worin man ein vorzügliches Kennzeichen der Wahrheit erblickt. Meistentheils trifft man nämlich eine solche Bequemlichkeit der Rechnung an, während man sich in der Erforschung der Wahrheit mit glücklichem Erfolge befindet, da man hingegen in unentwirrbare Rechnungen zu versinken pflegt, im Fall man von der Bahn zur Wahrheit abirrt. Und zwar bot der Grundsatz des Minimums, dessen ich mich hier bedient habe, die elegante Auflösung dar, welche sich weit verwickelter ergeben haben würde, wenn wir sie vorher aus den ersten Principien der Mechanik hätten ableiten wollen. Nun werden wir demnach die Aufgabe, womit das gegenwärtige Kapitel beschlossen wird, im allgemeinen behandeln können.

Aufgabe 61.

§. 645. **Wird ein ruhender starrer Körper durch beliebige Kräfte angetrieben, so soll man die erste elementare Bewegung bestimmen, welche in ihm erzeugt werden wird.**

Auflösung.

Nach Lehrsatz 7. (§. 620.) werden alle antreibenden Kräfte, wie viel ihrer auch da sein mögen, auf zwei reducirt, von denen die eine im Mittelpunkte der Trägheit angebracht, die andere aber ausserhalb desselben gerichtet ist; die erstere sei $= S$, die zweite $= V$. Hat man diese zwei Kräfte gefunden, so betrachte man zuerst die Kraft V allein und denke sich eine ihr gleiche im Mittelpunkte der Trägheit entgegengesetzt angebracht, damit dieser auch jetzt in Ruhe erhalten werde. Man bestimme nun, wo die Richtung jener Kraft V eine zwischen je zwei Hauptaxen liegende Ebene durchschneidet und suche nach der vorhergehenden Aufgabe sowohl die Drehungsaxe, um welche der Körper zuerst sich zu drehen anfängt, als auch den unendlich kleinen, im ersten Zeittheilchen hervorgebrachten Winkel. Es wird aber dem Körper ausserdem eine fortschreitente Bewegung beigebracht werden, und um diese zu finden, denke man sich jene zweite Kraft V nach ihrer Richtung selbst auch im Mittelpunkte der Trägheit angebracht, so dass sie jetzt in Verbindung mit der frühern Kraft S den Körper antreibe. Da beide im Mittelpunkte der Trägheit angebracht sind, so entspringt aus ihnen eine reine fortschreitende Bewegung, und wenn man diese mit der vorhergefundenen drehenden Bewegung verbindet, erhält man die ganze durch die vorausgesetzten Kräfte hervorgebrachte Wirkung.

Zusatz 1.

§. 646. Verschwindet die Kraft V, d. h. ergibt sich die einzige im Mittelpunkte der Trägheit angebrachte Kraft S als allen antreibenden Kräften gleichgeltend, so wird, wie wir oben gesehen haben, dem Körper nur eine fortschreitende Bewegung beigebracht.

Zusatz 2.

§. 647. Ist aber die Kraft S gleich V, hat sie jedoch die entgegengesetzte Richtung, was der Fall ist, wenn die antreibenden Kräfte so beschaffen sind, dass sie alle, jede nach ihrer Richtung, am Mittelpunkte der Trägheit angebracht sich

wechselseitig aufheben; so wird dieser Mittelpunkt in Ruhe verharren und nur eine drehende Bewegung erzeugt werden.

Zusatz 3.

§. 648. In allen übrigen Fällen wird in dem Körper eine gemischte Bewegung erzeugt werden, die eine eine fortschreitende, die andere um eine gewisse durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe, von welchen beiden man jede getrennt betrachten und bestimmen kann.

Anmerkung.

§. 649. Dieselbe Wirkung wird durch diese antreibenden Kräfte hervorgebracht werden, wenn auch der Körper sich in Bewegung befindet, sie wird aber in Folge der Vermischung mit dieser Bewegung schwerer erkannt werden können. Dreht sich nämlich der Körper schon um eine andere Axe und wird er nun angetrieben, so wird nicht nur die Winkelgeschwindigkeit, sondern auch die Drehungsaxe selbst sich ändern, so dass er nun anfängt, sich um eine andere, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe zu drehen. In dieser Veränderung der Axe liegt ferner die grösste Störung der Bewegung und um dieselbe zu entwickeln, wird es zuerst angemessen sein, eine augenblickliche Störung dieser Art genau zu bestimmen; diesen Gegenstand wollen wir im folgenden Kapitel behandeln.

Kapitel X.

Von der durch Kräfte hervorgebrachten augenblicklichen Veränderung der Drehungsaxe.

Aufgabe 62.

§. 650. Ein starrer Körper wird, während er sich um eine, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe dreht, durch solche Kräfte angetrieben, welche ihm, wenn er in Ruhe wäre, eine drehende Beweguug um eine andere Axe beibringen würden; man soll die Veränderung der Bewegung bestimmen, welche in einem sehr kleinen Zeittheilchen hervorgebracht wird.

Auflösung.

(Figur 88.) Da sowohl bei der schon inwohnenden, als auch bei der durch Kräfte beigebrachten Bewegung der Mittelpunkt der Trägheit ruhet, so wird er auch bei beiden vereint in Ruhe verharren. Man betrachte demnach den Mittelpunkt der Trägheit I als den Mittelpunkt einer Kugel, auf deren Oberfläche sich der Pol O befindet und es sei IO die Axe, um welche sich der Körper schon mit der Winkelgeschwindigkeit Ω dreht und zwar in dem Sinne, dass der Punkt S nach s geführt werde. Nun werde aber der Körper durch solche Kräfte angetrieben, dass er, wenn er ruhete, sich um den Pol S oder die Axe IS im Zeittheilchen dt durch den Winkel qdt^2 drehen würde, indem wir nämlich gesehen haben, dass dieser Winkel mit dem Quadrat der Zeit dt homogen ist und es erfolge diese Umdrehung in dem Sinne, dass der Punkt O nach ω geführt werde. Es wird demnach der Winkel, welchen diese zwei Axen OI und SI in I bilden, oder auf der sphärischen Oberfläche der Bogen des grössten Kreises $OS = s$ gegeben und es wird

im Zeittheilchen dt dieser Bogen OS, in Folge der inwohnenden Bewegung, sich um den Pol O durch den Winkel $SOs = \Omega dt$ drehen und in die Lage Os gelangen, so dass der kleine Bogen

$$Ss = \Omega dt \sin s$$

wird. In Folge der beigebrachten Bewegung wird aber derselbe Bogen OS sich um den Pol S durch den Winkel $OS\omega = qdt^2$ drehen und in die Lage $S\omega$ gelangen, so dass der kleine Bogen

$$O\omega = qdt^2 \sin s$$

wird. Durch diese beiden Bewegungen zugleich wird daher der Punkt S nach s und der Punkt O nach ω übertragen werden, weil keine von beiden Uebertragungen die andere stört; alle übrigen Punkte werden aber an beiden Bewegungen Theil nehmen. Ein beliebiger auf dem Bogen OS so, dass $Oo = \omega$ ist, angenommener Punkt o wird in Folge der inwohnenden Bewegung um O nach m übertragen werden, so dass $om = \Omega dt \sin \omega$ wird; in Folge der erzeugten Bewegung aber wird er um S nach μ übertragen werden, so dass $o\mu = qdt^2 \sin(s - \omega)$ wird. Je nachdem nun $om > o\mu$ oder $om < o\mu$ ist, wird der Punkt o in Folge beider Bewegungen vereint gegen m oder μ hin, durch den Unterschied dieser kleinen Bogen sich bewegen. Ist daher $om = o\mu$, so wird der Punkt o in der Wirklichkeit ruhen und desswegen der Pol sein, um welchen der Körper als jetzt sich drehend gedacht werden muss; so dass in Folge der antreibenden Kräfte die Drehungsaxe IO im Zeittheilchen dt nach Io übertragen werden würde. Um daher diese augenblickliche Veränderung der Axe zu finden, setzen wir $om = o\mu$ oder $\Omega dt \sin \omega = qdt^2 \sin(s - \omega)$, wonach

$$\Omega \sin \omega = qdt \sin s \cos \omega - qdt \cos s \sin \omega$$

wird; hieraus geht hervor, dass der Bogen $Oo = \omega$ unendlich klein ist, und wenn wir daher $\sin \omega = \omega$ und $\cos \omega = 1$ setzen, so erhalten wir

$$\omega = \frac{qdt \sin s}{\Omega + qdt \cos s} = \frac{qdt \sin s}{\Omega}.$$

Um diese Axe Io dreht sich der Körper mit einer eben so grossen Winkelgeschwindigkeit, als mit welcher im Zeittheilchen dt die Punkte O und S nach ω und s übertragen werden, woraus man dieselbe wird erkennen können. Da nämlich mit derselben im Zeittheilchen dt der Winkel

$$\frac{O\omega}{Oo} = \frac{qdt^2 \sin s}{\omega} = dt(\Omega + qdt \cos s)$$

beschrieben wird, im vorhergehenden Zeittheilchen aber in

Folge einer ähnlichen Kraft, welche letztere man nämlich nicht als plötzlich entstanden annehmen kann, der beschriebene Winkel

$$= dt(\Omega - q\,dt\cos s)$$

geschätzt werden muss, ihr Unterschied also

$$= 2q\,dt^2\cos s$$

ist, so hat die Winkelgeschwindigkeit den Zuwachs

$$2q\,dt\cos s$$

erhalten. Aus einem ähnlichen Grunde hat man, weil der Werth q, während er zur Bestimmung continuirlicher Aenderungen eingeführt wird, verdoppelt werden muss, auch den kleinen Weg Oo doppelt so gross anzunehmen. Während nämlich in der Rechnung der Punkt O als beständig fortschreitend, hier aber als in o ruhend angenommen wird, ist der hier gefundene Zwischenraum Oo verschieden von dem kleinen Wege, durch welchen der Drehungspol fortgeführt wird; man denke sich nämlich den Punkt o' so, dass

$$Oo' = 2\,Oo$$

ist, alsdann wird o' der Drehungspol nach der Zeit dt sein, während es anfänglich O war. Unter dieser Voraussetzung wird nämlich offenbar der Punkt o inzwischen unbewegt bleiben. Da wir nun hier

$$Oo = \frac{q\,dt\sin s}{\Omega}$$

gefunden haben, so wird der kleine Weg, durch welchen man den Drehungspol als fortgeschritten ansehen muss, doppelt so gross oder

$$Oo' = \frac{2q\,dt\sin s}{\Omega}$$

angenommen werden müssen. Die Kräfte, welche dem Körper, wenn er ruhete, eine drehende Bewegung um die Axe IS im Sinne $O\omega$ beibringen würden, vermöge welcher im Zeittheilchen dt der Winkel

$$OS\omega = q\,dt^2$$

beschrieben werden würde, stören demnach die dem Körper schon inwohnende drehende Bewegung um die Axe IO, im Sinne Ss und mit der Winkelgeschwindigkeit Ω, dermaassen, dass nach Verlauf des Zeittheilchens dt die Drehungsaxe die gerade Linie Io ist, welche von der vorhergehenden IO gegen IS hin um den Winkel

$$OIo = \frac{2q\,dt\sin s}{\Omega}$$

absteht und dass zugleich die Geschwindigkeit der Drehung Ω den Zuwachs $= 2qdt \cos s$
erhält.

Zusatz 1.

§. 651. Wenn die antreibenden Kräfte im entgegengesetzten Sinne gerichtet wären, so müsste man die Grösse q negativ annehmen, es würde der Punkt o auf die Verlängerung des Bogens SO jenseits O fallen und die Drehungsgeschwindigkeit vermindert werden.

Zusatz 2.

§. 652. Verschwindet der Bogen OS oder ist er einem Halbkreise gleich, so wird die Drehungsaxe IO nicht verändert, sondern die ganze Wirkung auf eine Beschleunigung oder Verzögerung der frühern drehenden Bewegung verwandt. Diess ist der schon oben (§. 403.) behandelte Fall, wo wir gezeigt haben, dass die Zu- oder Abnahme der Winkelgeschwindigkeit $= 2qdt$ ist.

Zusatz 3.

§. 653. Ist der Bogen OS der Quadrant eines Kreises, also $\cos s = 0$, so wird die Winkelgeschwindigkeit Ω keine Aenderung erleiden, sondern die ganze Wirkung der Kräfte auf eine Veränderung der Drehungsaxe verwandt werden, indem diese entweder S genähert oder davon weiter entfernt wird.

Anmerkung 1.

§. 654. Hier haben wir nur solche Kräfte betrachtet, welche dem Körper, wenn er ruhete, eine einfache drehende Bewegung beibringen würden, wobei der Mittelpunkt der Trägheit unbewegt bliebe, welche Wirkung beliebige Kräfte hervorbringen, wenn nur ihnen gleiche und entgegengesetzte im Mittelpunkte der Trägheit angebracht werden, wie diess im obigen Kapitel ausführlich gezeigt worden ist. Für andere Kräfte wird aber die Untersuchung nicht schwieriger sein, da diese immer dieselbe Wirkung hervorbringen, als wenn ihnen gleiche und entgegengesetzte im Mittelpunkte der Trägheit angebracht wären; eine fortschreitende Bewegung, welche sie ausserdem dem Körper einflössen, würde nämlich auch hier nichts in der, dem Körper schon inwohnenden, drehenden Bewegung verändern. Selbst wenn auch in dem Körper, ausser der drehenden Bewegung um die Axe IO, schon eine fortschreitende Bewegung stattfände, würde diese durch die um die Axe IS er-

zeugte drehende Bewegung gar nicht verändert werden. Hier nach erstreckt sich die Auflösung dieser Aufgabe sehr weit und kann auch auf die fortschreitende Bewegung, welche der Körper entweder schon hat oder durch antreibende Kräfte erlangt, ausgedehnt werden. Da nun diese Combination der fortschreitenden Bewegung mit der drehenden keine Schwierig keit hat, so war es hier vorzüglich nöthig, sorgfältig zu bestimmen, wie sehr eine drehende Bewegung in Folge einer andern, aus Kräften entspringenden drehenden Bewegung gestört wird.

Anmerkung 2.

§. 655. Wenn die Axe IO, um welche der Körper sich jetzt nach der Annahme dreht, eine der Hauptaxen wäre, so würde der Körper diese Bewegung, im Fall keine Kräfte ihn antrieben, beständig beibehalten, wie wir im Vorhergehenden bewiesen haben. Ist aber IO keine Hauptaxe, so wird, wenn auch keine Kräfte von aussen her einwirken, die Bewegung doch nicht beibehalten werden können, weil diese selbst Kräfte hervorbringt, welche dahin streben die Drehungsaxe abzulenken. Wollen wir in diesem Falle erforschen, eine wie grosse Veränderung in der Drehungsaxe erzeugt wird, so ist es nicht hinreichend, die von aussen her auf den Körper wirkenden Kräfte zu betrachten; sondern man muss mit ihnen auch die aus der drehenden Bewegung entspringenden Kräfte verbinden, welche auf die Axe einwirken, wie wir oben gezeigt haben. Da diese Kräfte nun von der Lage der Drehungsaxe IO in Beziehung auf die Hauptaxen des Körpers abhängig sind, so wird es zur Sache gehören, ehe wir weiter fortschreiten, im allgemeinen zu erforschen, auf welche Weise durch beliebige Kräfte die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers verändert wird.

Aufgabe 63.

§. 656. Es ist die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die drei Hauptaxen gegeben, und es wird dieselbe durch an treibende Kräfte so verändert, dass der Körper nach Verlauf eines sehr kleinen Zeittheilchens sich um eine andere Axe drehet; man soll die Lage dieser veränderten Axe in Bezug auf die Hauptaxen bestimmen.

Auflösung.

(Figur 89.) Man betrachte wieder eine sphärische Ober-

fläche, in deren Mittelpunkte sich des Körpers Mittelpunkt der Trägheit I befindet, es seien nun die Radien IA, IB, IC die Hauptaxen des Körpers und es drehe sich derselbe um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Da die Lage dieser Axe in Bezug auf die Hauptaxen gegeben ist, so setze man die Bogen $AO=\alpha$, $BO=\beta$ und $CO=\gamma$, so dass

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

werde. Hierauf setze man aber die Winkel $BAO=\lambda$, $CBO=\mu$ und $ACO=\nu$, alsdann wird, weil AB, BC und CA Quadranten sind:

$$\cos\beta=\sin\alpha\cos\lambda,\quad \cos\gamma=\sin\beta\cos\mu \text{ und } \cos\alpha=\sin\gamma\cos\nu.$$

Hieraus folgt:

$$\cos\lambda=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\quad \cos\mu=\frac{\cos\gamma}{\sin\beta},\quad \cos\nu=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma},$$

$$\sin\lambda=\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha},\quad \sin\mu=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta},\quad \sin\nu=\frac{\cos\beta}{\sin\gamma};\ \text{also}$$

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta},\quad \operatorname{tg}\mu=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad \operatorname{tg}\nu=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \text{ und } \operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}\nu=1.$$

Diess ist eine Relation zwischen den drei Winkeln λ, μ und ν, wodurch die Bogen α, β und γ so bestimmt werden, dass man hat:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\nu}{\cos\lambda}=\frac{\operatorname{cotg}\mu}{\sin\lambda},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos\mu}=\frac{\operatorname{cotg}\nu}{\sin\mu}$$

$$\text{und } \operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\mu}{\cos\nu}=\frac{\operatorname{cotg}\lambda}{\sin\nu}.$$

Mittelst der angeführten Relationen werden, wenn $BAO=\lambda$ und $AO=\alpha$ gegeben sind, die übrigen Werthe so bestimmt, dass man hat

$$\cos\beta=\sin\alpha\cos\lambda,\quad \cos\gamma=\sin\alpha\sin\lambda,\quad \operatorname{tg}\mu=\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sin\lambda}$$

$$\text{und } \operatorname{tg}\nu=\operatorname{tg}\alpha\cos\lambda.$$

Wenn nun vermöge der antreibenden Kräfte im Zeittheilchen dt die Drehungsaxe IO nach Io übergeht, so kann man den ganzen Körper betrachten, als ob er sich inzwischen um die Axe Io gedreht hätte, bei welcher Bewegung die Punkte A, B, C ihre Abstände vom Punkte o beibehalten werden, so dass nach Verlauf des Zeittheilchens dt der Drehungspol o von den Hauptpolen A, B, C die Abstände Ao, Bo, Co haben wird. Ist daher der elementare Winkel $OAo=d\lambda$ und $Ao=\alpha+d\alpha$ gegeben, so erhält man die Veränderungen der übrigen Winkel und Bogen durch gewöhnliche Differentiation:

$$d\beta = \frac{d\lambda \sin\alpha \sin\lambda - d\alpha \cos\alpha \cos\lambda}{\sin\beta},$$
$$d\gamma = \frac{- d\lambda \sin\alpha \cos\lambda - d\alpha \cos\alpha \sin\lambda}{\sin\gamma},$$
$$d\mu = \frac{- d\alpha \sin\lambda - d\lambda \sin\alpha \cos\alpha \cos\lambda}{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \sin\lambda^2},$$
$$d\nu = \frac{d\alpha \cos\lambda - d\lambda \sin\alpha \cos\alpha \sin\lambda}{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \cos\lambda^2}.$$

Zusatz 1.

§. 657. Könnte man von diesen Differentialen zu den Integralen fortschreiten, so würde man im Körper zu jeder Zeit diejenige Axe, um welche er sich alsdann drehte und ihre Lage in Bezug auf die Hauptaxen angeben können.

Zusatz 2.

§. 658. Wir nehmen hier nämlich keine Rücksicht auf die Bewegung des Körpers, sondern es handelt sich nur darum, die augenblickliche Veränderung der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen kennen zu lernen; daher ist die Drehungsgeschwindigkeit hier nicht in die Rechnung eingetreten.

Zusatz 3.

§. 659. Da in der vorhergehenden Aufgabe der kleine Bogen Oo bestimmt worden ist, so wird hier

$$Oo = \sqrt{d\alpha^2 + d\lambda^2 \sin\alpha^2}$$

und ferner, zur Bestimmung seiner Lage in Bezug auf den Bogen AO oder Ao

$$\operatorname{tg} AoO = \frac{d\lambda \sin\alpha}{d\alpha} \text{ oder } \sin AoO = \frac{d\lambda . \sin\alpha}{Oo} \text{ und } \cos AoO = \frac{d\alpha}{Oo};$$

so dass wir hierdurch jetzt die Elemente

$$d\alpha = Oo . \cos AoO \text{ und } d\lambda = \frac{Oo . \sin AoO}{\sin\alpha}$$

haben.

Anmerkung.

§. 660. Sind daher die Kräfte bekannt, durch welche ein Körper angetrieben wird, während er sich um irgend eine Axe dreht, so kann man nach dem vorhergehenden Kapitel die Axe bestimmen, um welche er sich, wenn er ruhete, zu drehen anfangen würde. Mittelst der vorhergehenden Aufgabe wird man ferner die in der Drehungsaxe eingetretene Aenderung erforschen können. Wenn sich aber der Körper zuerst

nicht um irgend eine Hauptaxe drehet, muss man ausser den äussern Kräften, durch welche der Körper etwa angetrieben wird, vorzüglich diejenigen in Betracht ziehen, welche aus der drehenden Bewegung selbst und der Centrifugalkraft entspringen. Haben wir diese Kräfte oben auch im allgemeinen angegeben, so muss man sie doch nun von neuem in Bezug auf die Hauptaxen, in so weit die Drehungsaxe von ihnen abweicht, bestimmen. Sind diese bekannt, so wollen wir, da es leicht ist sie mit äussern Kräften zu verbinden, sie künftig allein betrachten und genau erforschen, wie stark die Lage der Drehungsaxe durch sie gestört wird.

Aufgabe 64.

§. 661. Dreht sich ein starrer Körper um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe, deren Lage in Bezug auf die Hauptaxen gegeben ist; so soll man die Kräfte finden, welche hieraus für die Störung der Drehungsaxe hervorgehen.

Auflösung.

(Figur 91.) Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit, ferner seien IA, IB und IC die Hauptaxen und Ma^2, Mb^2 und Mc^2 die Momente der Trägheit in Bezug auf sie. Es drehe sich aber der Körper um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ und man fälle aus dem beliebigen Punkte O dieser Axe auf die Ebene AIB das Perpendikel OL und wenn man nun die gerade Linie IL zieht, sei der Winkel $AIL=m$ und $LIO=n$. Wir haben daher zur Bestimmung der Lage dieser Axe IO in Bezug auf die Hauptaxen:

$$\cos AIO=\cos m\cos n,\ \cos BIO=\sin m\cos n \text{ und } \cos CIO=\sin n.$$

Nimmt man nun die Hauptaxen als Coordinatenaxen an, so ziehe man ihnen parallel die drei Coordinaten $IX=x$, $XY=y$ und $YZ=z$, und wenn man ferner in Z ein Element dM des Körpers annimmt; so hat man nach der Natur der Hauptaxen:

$$\int xy\,dM=0,\ \int xz\,dM=0 \text{ und } \int yz\,dM=0 \ (\text{§. 452.}).$$

Ausserdem hat man

$$\int(y^2+z^2)dM=Ma^2, \int(x^2+z^2)dM=Mb^2 \text{ und } \int(x^2+y^2)dM=Mc^2,$$

also

$$\int x^2dM=\tfrac{1}{2}M[b^2+c^2-a^2],\ \int y^2dM=\tfrac{1}{2}M[a^2+c^2-b^2]$$
$$\text{und } \int z^2dM=\tfrac{1}{2}M[a^2+b^2-c^2].$$

Hierauf ziehe man in der Ebene AOB die Linie IP nor-

mal auf IL und in der Ebene LOC die Linie IQ normal auf IO, so dass die geraden Linien IO, IP und IQ auf einander normal sind; alsdann wollen wir diese als Coordinatenaxen anwenden. Zu diesem Ende ziehen wir zuerst $YS \# IP$ in der Ebene AIB, alsdann wird

$$IS = x\cos m + y\sin m \text{ und } YS = y\cos m - x\sin m.$$

Ferner ziehe man aus Z die Linie $Zy \# YS$, welche erstere auf die Ebene LIO normal und wobei

$$Zy = y\cos m - x\sin m \text{ und } Sy = YZ = z$$

sein wird. Endlich fälle man aus y auf IO das Perpendikel yx, so dass nun die verlangten Coordinaten

$$Ix = X,\ xy = Y \text{ und } yZ = Z$$

sind und wir haben:

$X = IS\cos n + Sy\sin n = x\cos m\cos n + y\sin m\cos n + z\sin n,$

$Y = yS\cos n - IS\sin n = z\cos n - x\cos m\sin n - y\sin m\sin n$ und

$Z = y\cos m - x\sin m.$

Da nun das in Z gelegene Element dM, in Folge der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$, eine Centrifugalkraft $= \frac{\Omega^2 xZdM}{2g}$ (§. 331.) ausübt, so entsteht hieraus eine längs xy gerichtete Kraft $= \frac{\Omega^2 YdM}{2g}$ und eine, nach der yZ parallelen Richtung in x angebrachte Kraft $= \frac{\Omega^2 ZdM}{2g}$. Da aber diese Kräfte, weil $\int YdM = 0$ und $\int ZdM = 0$ ist, sich wechselseitig aufheben, so hat man nur ihre Momente in Betracht zu ziehen. Nimmt man demnach $IO = f$ an, so ergibt sich in O die IQ parallele und allen Kräften yZ gleichgeltende Kraft Oq, wenn man nur die diesen Kräften gleichen und entgegengesetzten im Mittelpunkte der Trägheit I anbringt. Wegen der Momente hat man nun

$$Oq.IO = \frac{\Omega^2}{2g}\int XYdM \text{ und } Op.IO = \frac{\Omega^2}{2g}\int XZdM,$$

also

$$\text{die Kraft } Oq = \frac{\Omega^2}{2fg}\int XYdM \text{ und die Kraft } Op = \frac{\Omega^2}{2fg}\int XZdM.$$

Geht man aber auf die Hauptcoordinaten zurück, so hat man

$$\int XYdM = \sin n\cos n[\int z^2dM - \cos m^2\int x^2dM - \sin m^2\int y^2dM]$$

und $$\int XZdM = \sin m\cos m\cos n[\int y^2dM - \int x^2dM];$$

also mittelst der angegebenen Momente:

$$\int XYdM = M\sin n\cos n\,[a^2\cos m^2 + b^2\sin m^2 - c^2]$$

und $$\int XZdM = M\sin m\cos m\cos n\,[a^2 - b^2].$$

Aus der drehenden Bewegung entstehen folglich diese Kräfte

$$Op = \frac{M\Omega^2 \sin m \cos m \cos n\,(a^2 - b^2)}{2fg}$$

und

$$Oq = \frac{M\Omega^2 \sin n \cos n\,[a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2 - c^2]}{2fg},$$

welche im Punkte O nach den, OP und OQ parallelen, Richtungen angebracht sind, wobei man sich aber ihnen gleiche und entgegengesetzte im Mittelpunkte der Trägheit I angebracht zu denken hat.

Zusatz 1.

§. 662. Da die Kraft Oq auf die Drehungsaxe IO in O normal ist, so wird sie verlängert die Ebene AOB in einem Punkte M schneiden, welcher auf der verlängerten Linie IL liegt und es wird, weil IOM ein rechter Winkel ist,

$$IM = \frac{f}{\cos n} \text{ und } OM = f \operatorname{tg} n.$$

Zusatz 2.

§. 663. Die Richtung der andern Kraft Op ist aber auf die Ebene LIO normal, weil sie der, in der Ebene AIB auf IL normalen, IP parallel ist; es wird ferner die Ebene pOq erweitert gegen die Ebene AIB unter einem Winkel $= 90^0 - n$ geneigt sein und dieselbe in einer auf IM normalen geraden Linie schneiden.

Zusatz 3.

§. 664. Weil diese aus der drehenden Bewegung entsprungenen Kräfte ihnen gleiche und entgegengesetzte im Mittelpunkte der Trägheit angebracht haben, werden sie nur die drehende Bewegung stören und dem Körper durchaus keine fortschreitende Bewegung beibringen, so dass der Mittelpunkt der Trägheit in Ruhe verharren wird.

Aufgabe 65.

§. 665. Nachdem man die Kräfte gefunden hat, welche aus der drehenden Bewegung als diese störend entspringen, soll man die Axe bestimmen, um welche diese Kräfte den Körper, wenn er in Ruhe wäre, drehen würden.

Auflösung.

(Figur 92.) Bleibt alles wie in der vorhergehenden Aufgabe, so dass IA, IB und IC Hauptaxen und die Momente der Trägheit in Bezug auf sie Ma^2, Mb^2 und Mc^2 sind, so sei IO die Axe, um welche sich jetzt der Körper mit der Ge-

schwindigkeit Ω dreht und deren Lage durch die Winkel $AIL=m$ und $LIO=n$ bestimmt wird. Dabei sei die gerade Linie OL normal auf die Ebene AOB, so dass, wenn man $IO=f$ setzt,

$$IL=f\cos n \text{ und } OL=f\sin n$$

werde. Zieht man nun aber aus O auf IO die Normale OM, so wird

$$IM=\frac{f}{\cos n} \text{ und } OM=f\operatorname{tg} n;$$

zieht man ferner auf IM, in der Ebene AIB die Normale MA, so wird

$$IA=\frac{f}{\cos m\cos n} \text{ und } MA=\frac{f\operatorname{tg} m}{\cos n}.$$

Nun hat man aber in O die Kräfte Op und Oq, von denen die erstere parallel AM, die letztere mit OM in einer geraden Linie liegt und es sind diese Kräfte

$$Op=\frac{M\Omega^2\sin m\cos m\cos n\,(a^2-b^2)}{2fg}$$

und

$$Oq=\frac{M\Omega^2\sin n\cos n\,[a^2\cos m^2+b^2\sin m^2-c^2]}{2fg}.$$

Die Richtung ihrer mittlern Kraft wird die Ebene AIB irgendwo in V auf der geraden Linie MA schneiden, so dass

$$MO:MV=Oq:Op$$

wird, woraus man

$$MV=\frac{f\sin m\cos m\,(a^2-b^2)}{\cos n[a^2\cos m^2+b^2\sin m^2-c^2]}$$

und

$$\operatorname{tg} MIV=\frac{\sin m\cos m\,(a^2-b^2)}{a^2\cos m^2+b^2\sin m^2-c^2},$$

erhält. Hieraus schliesst man, dass

$$\operatorname{tg} AIV=\operatorname{tg}(m-MIV)=\frac{(b^2-c^2)\sin m}{(a^2-c^2)\cos m},$$

welchen Winkel AIV wir oben (§. 639.) δ genannt haben, und der Abstand

$$IV=\frac{f\sqrt{a^4\cos m^2+b^4\sin m^2+c^4-2c^2(a^2\cos m^2+b^2\sin m^2)}}{\cos n\,[a^2\cos m^2+b^2\sin m^2-c^2]}$$

sei, welchen letztern wir oben h genannt haben, so dass

$$h=\frac{f(b^2-c^2)\sin m}{\cos n\sin\delta\,[a^2\cos m^2+b^2\sin m^2-c^2]}$$

$$=\frac{f(a^2-c^2)\cos m}{\cos n\cos\delta\,[a^2\cos m^2+b^2\sin m^2-c^2]}$$

wird. Wir können uns daher jetzt im Punkte V jene Kräfte angebracht denken, nämlich

die Kraft $VM = \frac{M\Omega^2 \sin m \cos m \cos n (a^2 - b^2)}{2fg}$

und $VT = \frac{M.\Omega^2 \sin n \cos n [a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2 - c^2]}{2fg}$,

von denen die letztere, längs $VR \# LO$ und längs $VN \# ML$ zerlegt, ergibt

die Kraft längs $VR = \frac{M.\Omega^2 \sin n \cos n^2 [a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2 - c^2]}{2fg}$

und

die Kraft längs $VN = \frac{M.\Omega^2 \sin n^2 \cos n [a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2 - c^2]}{2fg}$,

wo die erstere die oben mit dem Buchstaben R bezeichnete Kraft ist. Der obige Ausdruck der auf IV in der Ebene AIB normalen Kraft, nämlich $Q \cos \delta - P \sin \delta$ ist hier $VM.\cos MIV - VN.\sin MIV$, woraus sich ergibt

$$Q\cos\delta - P\sin\delta = \frac{M.\Omega^2 \sin m \cos m \cos n^3 (a^2 - b^2)(a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2 - c^2)}{2fg\sqrt{a^4 \cos m^2 + b^4 \sin m^2 + c^4 - 2c^2[a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2]}}.$$

Da ferner

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(b^2 - c^2) \sin m}{(a^2 - c^2) \cos m}$$

ist, so wird

$$\cos \delta = \frac{(a^2 - c^2) \cos m}{\sqrt{a^4 \cos m^2 + b^4 \sin m^2 + c^4 - 2c^2 (a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2)}}.$$

Nachdem diese Ausdrücke bestimmt sind, sei IF diejenige Axe, um welche diese Kräfte den Körper, wenn er ruhete, drehen würden, fällt man nun aus F auf die Ebene AIB das Perpendikel FE und setzt man die Winkel $AIE = \eta$ und $EIF = \theta$, so haben wir nach Aufgabe 60. (§. 639.)

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{a^2 \cos \delta}{b^2 \sin \delta} = \frac{a^2 (a^2 - c^2) \cos m}{b^2 (b^2 - c^2) \sin m}$$

und $\operatorname{tg} \theta = \frac{Q \cos \delta - P \sin \delta}{Rc^2 \cos \delta} \cdot b^2 \sin \eta = \frac{\sin m \cos n (a^2 - b^2) b^2 \sin \eta}{c^2 (a^2 - c^2) \sin n}$.

Endlich wird im Zeittheilchen dt um diese Axe IF ein Winkel $d\omega$ erzeugt werden, so dass wir haben

$$d\omega = \frac{\Omega^2 dt^2 \sin n \cos n \sqrt{a^4 (a^2 - c^2)^2 \cos m^2 + b^4 (b^2 - c^2)^2 \sin m^2}}{2a^2 b^2 \cos \theta}$$

$$= \frac{\Omega^2 (a^2 - c^2) dt^2 \cos m \sin n \cos n}{2b^2 \sin \eta \cos \theta}$$

$$= \frac{\Omega^2 (b^2 - c^2) dt^2 \sin m \sin n \cos n}{2a^2 \cos \eta \cos \theta}.$$

Zusatz 1.

§. 666. Werden zur Bestimmung der vorausgesetzten Axe

IO die Winkel $OIA = \alpha$, $OIB = \beta$ und $OIC = \gamma$, zur Bestimmung der Axe der elementaren Drehung *IF* aber die Winkel $FIA = \mathfrak{A}$, $FIB = \mathfrak{B}$ und $FIC = \mathfrak{C}$ gesetzt; so haben wir:

$$\cos\alpha = \cos m \cos n,\ \cos\beta = \sin m \cos n,\ \cos\gamma = \sin n$$

und $$\cos\mathfrak{A} = \cos\eta\cos\theta,\ \cos\mathfrak{B} = -\sin\eta\cos\theta,\ \cos\mathfrak{C} = \sin\theta.$$

Zusatz 2.

§. 667. Da ferner

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{a^2(a^2-c^2)\cos\alpha}{b^2(b^2-c^2)\cos\beta},$$

so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\sqrt{a^4(a^2-c^2)^2\cos\alpha^2 + b^4(b^2-c^2)^2\cos\beta^2} = W$$

setzt,

$$\sin\eta = \frac{a^2(a^2-c^2)\cos\alpha}{W} \text{ und } \cos\eta = \frac{b^2(b^2-c^2)\cos\beta}{W}.$$

Setzt man nun ferner

$$\sqrt{\left\{\begin{matrix} a^4b^4(a^2-b^2)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2 + a^4c^4(a^2-c^2)^2\cos\alpha^2\cos\gamma^2 \\ + b^4c^4(b^2-c^2)^2\cos\beta^2\cos\gamma^2 \end{matrix}\right\}} = \Psi,$$

so erhält man

$$\cos\mathfrak{A} = \frac{b^2c^2(b^2-c^2)\cos\beta\cos\gamma}{\Psi},$$

$$\cos\mathfrak{B} = \frac{a^2c^2(c^2-a^2)\cos\alpha\cos\gamma}{\Psi},$$

$$\cos\mathfrak{C} = \frac{a^2b^2(a^2-b^2)\cos\alpha\cos\beta}{\Psi}$$

und $$d\omega = \frac{\Omega^2\Psi dt^2}{2a^2b^2c^2}.$$

Anmerkung.

§. 668. Was den Sinn betrifft, in welchem die Drehung um die Axe *IF* erfolgt, so hat man, weil

$$d\omega = \frac{\Omega^2\Psi dt^2}{2a^2b^2c^2}$$

immer positiv ist, zu bemerken, dass bei der Aufsuchung dieses Werthes die Kraft *VR* als positiv betrachtet worden ist, wesshalb nach der Figur der Punkt *E* im Sinne *Ee* gegen *A* hin, bei der drehenden Bewegung fortgeführt wird. Obgleich dieses Verhältniss nur in der Figur, wo die Winkel m, n, η, θ positiv und kleiner als 90° sind, stattfindet, so kann man doch hieraus richtig auf das Verhältniss des Sinnes schliessen. Ist dieses einmal in die Rechnung eingeführt, so werden wir hierauf allgemein bei der Wahrheit bleiben. Uebrigens ist es klar,

dass, wenn die Axe IO in eine der Hauptaxen fällt, $d\omega=0$ sein wird; denn wenn $\alpha=0$ ist, wird $\beta=\gamma=90^0$, also $\cos\beta=\cos\gamma=0$ und es verschwindet in diesem Falle die Grösse Ψ. Zugleich sieht man ein, dass in keinem andern Falle diese Störung $d\omega$ verschwinden kann und es daher nicht mehr als drei freie Drehungsaxen geben wird, wenn nicht etwa zwei Hauptmomente einander gleich sind.

Aufgabe 66.

§. 669. Dreht sich ein Körper um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende und von den Hauptaxen verschiedene Axe; so soll man die augenblickliche Aenderung bestimmen, welche so wohl die Drehungsaxe, als auch die Winkelgeschwindigkeit erleidet.

Auflösung

(Figur 93.) Man übertrage alles, was wir in der vorhergehenden Aufgabe gefunden haben, auf eine um den Mittelpunkt der Trägheit I beschriebene sphärische Oberfläche, auf welcher A, B, C die Pole der Hauptaxen und in Bezug auf welche letztern Ma^2, Mb^2, Mc^2 die Momente der Trägheit sind. Ferner sei O der Pol derjenigen Axe, um welche sich der Körper jetzt mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ im Sinne ABC dreht. Hat man aus C durch O den grössten Kreis COM gezogen, welcher ein Quadrant ist, so werden die Bogen $AM=m$ und $MO=n$. Ferner nehme man auf der Verlängerung des Quadranten BA den Bogen $AE=\eta$ und auf dem nun gezogenen Quadranten CE den Bogen $ES=\theta$ an; so dass man habe

$$\operatorname{tg}\eta=\frac{a^2(a^2-c^2)\cos m}{b^2(b^2-c^2)\sin m} \text{ oder } \frac{b^2\sin m\sin\eta}{a^2-c^2}=\frac{a^2\cos m\cos\eta}{b^2-c^2}$$

und

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b^2\sin m\sin\eta\,(a^2-b^2)\cos n}{c^2(a^2-c^2)\sin n}=\frac{a^2\cos m\cos\eta\,(a^2-b^2)\cos n}{c^2(b^2-c^2)\sin n}.$$

Hat man dieses auf solche Weise bestimmt, so wird in Folge der Centrifugalkräfte des Körpers derselbe das Bestreben haben, sich um den Pol S im Sinne Ee zu drehen, so dass er im Zeittheilchen dt den Winkel

$$d\omega=\frac{\Omega^2(a^2-c^2)dt^2\cos m\sin n\cos n}{2b^2\sin\eta\cos\theta}=\frac{\Omega^2(b^2-c^2)dt^2\sin m\sin n\cos n}{2a^2\cos\eta\cos\theta}$$

oder

$$d\omega=\frac{\Omega^2(a^2-b^2)dt^2\sin m\cos m\cos n^2}{2c^2\sin\theta}.$$

beschreiben würde. Man ziehe demnach den Bogen des grössten Kreises OS, derselbe sei $=s$ und wir haben ihn hernach zu bestimmen, ferner wird in der Aufgabe 62. (§. 650.)

$$q=\frac{\Omega^2(a^2-b^2)\sin m\cos m\cos n^2}{2c^2\sin\theta}.$$

Hiernach wird sich der Körper, in Folge der elementaren drehenden Bewegung, so um den Pol o drehen, dass der kleine Bogen

$$Oo=\frac{\Omega(a^2-b^2)dt\sin m\cos m\cos n^2\sin s}{c^2\sin\theta}$$

ist; die Winkelgeschwindigkeit Ω wird aber einen Zuwachs

$$d\Omega=\frac{\Omega^2(a^2-b^2)dt\sin m\cos m\cos n^2\cos s}{c^2\sin\theta}$$

empfangen.

Man muss daher nun zuerst die Lage des Bogens OS oder den Winkel COS, um welchen er gegen den Bogen CO geneigt ist, suchen. Zu diesem Ende betrachte man das Dreieck OCS, in welchem $OC=90^0-n$, $CS=90^0-\theta$ und der Winkel $OCS=m+\eta$ ist und woraus man findet

$$\operatorname{cotg} COS=\frac{\cos n\operatorname{tg}\theta}{\sin(m+\eta)}-\frac{\sin n\cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg}(m+\eta)=\frac{a^2(a^2-c^2)\cos m^2+b^2(b^2-c^2)\sin m^2}{(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)\sin m\cos m}$$

und $$\frac{\cos n\operatorname{tg}\theta}{\sin(m+\eta)}=\frac{a^2b^2(a^2-b^2)\sin m\cos m\cos n^2}{c^2\sin n[b^2(b^2-c^2)\sin m^2+a^2(a^2-c^2)\cos m^2]};$$

also

$$\operatorname{tg} COS=\frac{c^2\sin n[a^2(a^2-c^2)\cos m^2+b^2(b^2-c^2)\sin m^2]}{(a^2-b^2)\sin m\cos m[a^2b^2\cos n^2+c^2(a^2+b^2)\sin n^2-c^4\sin n^2]}.$$

Man erhält ferner aus demselben Dreieck COS

$$\begin{aligned}\cos s&=\cos(m+\eta)\cos n\cos\theta+\sin n\sin\theta\\&=\sin\theta\left[\sin n+\frac{\cos n\cos(m+\eta)}{\operatorname{tg}\theta}\right]\\&=\frac{\sin n\sin\theta[a^2b^2-(a^2+b^2)c^2+c^4]}{a^2b^2}\\&=\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\sin n\sin\theta}{a^2b^2},\end{aligned}$$

woraus man ableitet

$$d\Omega=\frac{\Omega^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\sin m\cos m\sin n\cos n^2}{a^2b^2c^2}dt.$$

Setzt man endlich $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$, so wird der kleine Bogen

$$Oo = \frac{\Omega dt}{a^2b^2c^2} \cdot \sqrt{[a^4b^4(a^2-b^2)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2 + a^4c^4(a^2-c^2)^2\cos\alpha^2\cos\gamma^2}$$
$$\overline{+ b^4c^4(b^2-c^2)^2\cos\beta^2\cos\gamma^2 - (a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2(b^2-c^2)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2\cos\gamma^2]}$$

und
$$d\Omega = \frac{\Omega^2 (a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{a^2b^2c^2}\,dt.$$

Fällt man aber aus o auf CO das Perpendikel op, so werden nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie die elementaren Bogen Op und op rational ausgedrückt, dass man hat:

$$Op = \frac{\Omega (a^2-b^2)\,dt\cos\alpha\cos\beta\,[a^2b^2 - (a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2]}{a^2b^2c^2\sin\gamma}$$

und

$$op = \frac{\Omega\,dt\cos\gamma\,[a^2(a^2-c^2)\cos\alpha^2 + b^2(b^2-c^2)\cos\beta^2]}{a^2b^2\sin\gamma}.$$

Zusatz 1.

§. 670. Da

$$d\Omega = \frac{\Omega^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{a^2b^2c^2}\,dt$$

ist, so ersieht man deutlich, dass, wenn von den drei Hauptmomenten zwei einander gleich sind, die Winkelgeschwindigkeit sich durchaus nicht ändern wird.

Zusatz 2.

§. 671. Führt man die Abstände α, β, γ des Pols O von den Hauptaxen A, B, C ein, so wird

$$\operatorname{tg} COS = \frac{c^2\cos\gamma\,[a^2(a^2-c^2)\cos\alpha^2 + b^2(b^2-c^2)\cos\beta^2]}{(a^2-b^2)\cos\alpha\cos\beta\,[a^2b^2 - (a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2]},$$

und wenn man den Bogen AO gezogen hat,

$$\operatorname{tg} AOC = -\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma};$$

hieraus schliesst man

$$\operatorname{tg} AOS = \frac{a^2\cos\alpha\,[b^2(b^2-a^2)\cos\beta^2 + c^2(c^2-a^2)\cos\gamma^2]}{(b^2-c^2)\cos\beta\cos\gamma\,[(b^2-a^2)(c^2-a^2)\cos\alpha^2 - b^2c^2]}.$$

Zusatz 3.

§. 672. Diese Formel zur Bestimmung des Winkels AOS ist jener für den Winkel COS analog und geht aus derselben hervor, wenn man die Buchstaben a, b, c, wie auch die α, β, γ in ihrer Reihefolge um Eine Stelle versetzt. Auf diese Weise würde sich aber ein negatives Zeichen ergeben, was mit der Natur der Sache übereinstimmt, da der Winkel AOS auf die entgegengesetzte Seite in Bezug auf den erstern fällt.

Zusatz 4.

§. 673. Schneidet der Bogen OS den Quadranten AC im Punkte R, so erhält man

$$\operatorname{tg} AR = \frac{a^2 \cos\alpha [b^2(a^2-b^2)\cos\beta^2 + c^2(a^2-c^2)\cos\gamma^2]}{c^2\cos\gamma[a^2(a^2-c^2)\cos\alpha^2 + b^2(b^2-c^2)\cos\beta^2]},$$

und wenn derselbe Bogen SO verlängert den Quadranten BA in Q trifft, so wird analog

$$\operatorname{tg} BQ = \frac{b^2\cos\beta[c^2(b^2-c^2)\cos\gamma^2 + a^2(b^2-a^2)\cos\alpha^2]}{a^2\cos\alpha[b^2(b^2-a^2)\cos\beta^2 + c^2(c^2-a^2)\cos\gamma^2]} = \operatorname{cotg} AQ.$$

Zusatz 5.

§. 674. Da im Zeittheilchen dt der Bogen $CO=\gamma$ um das Theilchen Op kleiner wird, so wird durch Differentiale

$$a^2b^2c^2 d\gamma \sin\gamma = \Omega(b^2-a^2)dt\cos\alpha\cos\beta[a^2b^2 - (a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2] \quad (§. 669)$$

und hieraus nach der Analogie

$$a^2b^2c^2 d\beta\sin\beta = \Omega(a^2-c^2)dt\cos\gamma\cos\alpha[a^2c^2-(c^2-b^2)(a^2-b^2)\cos\beta^2],$$
$$a^2b^2c^2 d\alpha\sin\alpha = \Omega(c^2-b^2)dt\cos\beta\cos\gamma[b^2c^2-(b^2-a^2)(c^2-a^2)\cos\alpha^2].$$

Anmerkung.

§. 675. Wir haben, was gehörig zu bemerken ist, in der Auflösung angenommen, dass der Körper sich um die Axe IO im Sinne ABC drehe, welchem Falle demnach die gefundenen Formeln angepasst sind. Dreht sich aber der Körper im entgegengesetzten Sinne, so werden die Formeln sehr leicht dem selben angepasst, indem man die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung Ω negativ setzt.

Wir haben so diese sehr schwierige Aufgabe, worin die augenblickliche Veränderung gesucht wird, während der Körper sich um eine Axe dreht, die keine der Hauptaxen ist, ziemlich bequem aufgelöst, da die letzten Formeln, auf die endlich die Auflösung zurückgeführt ist, sich nicht so verwickelt darstellen, dass man einfachere hätte erwarten dürfen. Auch findet kein Verdacht irgend eines in der Rechnung be gangenen Fehlers statt, da die Formel, durch welche die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit $d\Omega$ ausgedrückt wird, zu allen drei Hauptaxen gleiche Beziehung hat; ferner bestätigt die Herleitung des Winkels AOS aus dem COS die Sache auf sehr kräftige Weise. Endlich findet man, dass die im letzten Zusatz dargestellten Formeln die Eigenschaft haben, dass

$$d\alpha\sin\alpha\cos\alpha + d\beta\sin\beta\cos\beta + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma = 0$$

wird, wie es die Hauptbedingung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

erfordert. Die drei letzten Gleichungen, in Verbindung mit derjenigen, welche das Differential $d\Omega$ bestimmt, enthalten die vollständige Auflösung der Aufgabe, wobei man eine beliebige jener drei Gleichungen vernachlässigen kann.

Würde der Körper ausserdem durch äussere Kräfte angetrieben, so wäre die Auflösung nicht viel schwieriger, wie wir in der folgenden Aufgabe zeigen werden.

Aufgabe 67.

§. 676. Ein starrer Körper wird, während er sich um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe dreht, durch beliebige Kräfte angetrieben; man soll die hieraus entspringende Aenderung so wohl in der Axe, als auch in der Winkelgeschwindigkeit bestimmen.

Auflösung.

(Figur 93.) Es sei IO die Axe, um welche der Körper sich jetzt mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ im Sinne ABC dreht, und man bestimme zuerst ihre Lage in Beziehung auf die Hauptaxen IA, IB und IC, in Bezug auf welche die Momente der Trägheit Ma^2, Mb^2 und Mc^2 sind. Setzt man ferner die Bogen $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$, so suche man nach der vorhergehenden Aufgabe, um wieviel sich im Zeittheilchen dt so wohl die Drehungsaxe IO, als auch die Winkelgeschwindigkeit in Folge der drehenden Bewegung allein verändern muss. Geht nämlich der Drehungspol von O nach o über, so haben wir gesehen, dass das Increment des Abstandes $CO=\gamma$ oder

$$Co - CO = \frac{\Omega(a^2-b^2)dt\cos\alpha\cos\beta\,[a^2b^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2]}{a^2b^2c^2\sin\gamma},$$

und das Increment des Winkels BCO oder

$$OCo = \frac{\Omega dt\cos\gamma\,[a^2(a^2-c^2)\cos\alpha^2 + b^2(b^2-c^2)\cos\beta^2]}{a^2b^2\sin\gamma^2}$$

sein wird, welche Elemente die Lage des Punktes o ohne Zweideutigkeit bestimmen. Ausser dieser Veränderung der Drehungsaxe wird aber die Winkelgeschwindigkeit Ω ein Increment

$$= \frac{\Omega^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{a^2b^2c^2}dt$$

erhalten. Hierauf erwäge man, ob die antreibenden Kräfte dem Körper eine fortschreitende Bewegung beibringen, was

sehr leicht zu beurtheilen ist, indem man sich alle Kräfte, jede längs ihrer Richtung, am Mittelpunkte der Trägheit angebracht denkt. Wenn sich nämlich dieselben wechselseitig im Gleichgewichte halten, wird dem Körper gar keine fortschreitende Bewegung beigebracht werden; gibt es aber eine ihnen gleichgeltende Kraft, so wird diese eine fortschreitende Bewegung im Körper erzeugen, welche nach den ersten Principien leicht zu bestimmen ist. Hierauf bringe man eine, dieser gleichgeltenden gleiche und entgegengesetzte, Kraft im Mittelpunkte der Trägheit selbst an, damit dieser Punkt in Ruhe erhalten werde und indem man nun diese Kraft mit denjenigen Kräften verbindet, durch welche der Körper wirklich angetrieben wird, reducire man alle auf zwei, von denen die eine im Mittelpunkte der Trägheit, die andere in einem gewissen anderen Punkte angebracht sei und welche zwei Kräfte einander gleich und entgegengesetzt sein werden. Man suche ferner nach dem vorhergehenden Kapitel die Axe, um welche der Körper vermöge dieser Kräfte sich zu drehen anfängt und zugleich den Winkel der augenblicklichen Drehung. Hieraus suche man nach Aufgabe 62. (§. 650.), ohne irgend eine Rücksicht auf die schon gefundene Veränderung, weil diese unendlich klein ist, als ob der Körper sich noch um die Axe IO drehete, die in der Axe und der Winkelgeschwindigkeit eintretende Veränderung und reducire jene auf die, im Bogen CO und im Winkel BCO entstandenen, Incremente oder Decremente. Endlich verbinde man diese drei Elemente mit denjenigen, welche schon vorher durch die drehende Bewegung bestimmt worden sind und wird so die wahre, sowohl in der Axe IO, als auch in der Winkelgeschwindigkeit aus beiden Ursachen zugleich hervorgegangene, Veränderung erhalten.

Anmerkung.

§. 677. Indem man die Wirkung der antreibenden Kräfte erforscht, kann man die daraus entspringende Veränderung der Axe auf dieselbe Weise durch den elementaren Winkel OCo und den Unterschied der Bogen CO und Co ausdrücken, deren wir uns hier bedient haben. Man suche nämlich zuerst die Axe, um welche der Körper, wenn er sich in Ruhe befände, durch die Kräfte gedreht werden würde, es sei dieselbe IS und ferner qdt^2 der im Zeittheilchen dt hervorgebrachte Drehungswinkel um S und im Sinne $O\omega$. Zur Bestimmung des

Punktes S setze man den Bogen $AE=\eta$ und $ES=\theta$, welche Werthe von den vorhergehenden, die aus der drehenden Bewegung hervorgegangen waren, gehörig zu unterscheiden sind. Da nun $AM=ACM=m$, also

$$\cos m=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} \text{ und } \sin m=\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

ist, so wird $MCE=m+\eta$ und man findet aus dem Dreieck OCS

$$\cos OS=\cos s=\cos(m+\eta)\sin\gamma\cos\theta+\cos\gamma\sin\theta$$

und

$$\operatorname{cotg} COS=\frac{\sin\gamma\operatorname{tg}\theta}{\sin(m+\eta)}-\frac{\cos\gamma\cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Nun wird, nach Aufgabe 62. (§. 650.), der Drehungspol O nach o übertragen, so dass

$$Oo=\frac{2qdt\sin s}{\Omega}$$

und das Increment der Winkelgeschwindigkeit

$$2qdt\cos=2qdt[\sin\gamma\cos\theta\cos(m+\eta)+\cos\gamma\sin\theta]$$

wird, hierauf erhält man aus Oo

$$Op=Oo.\cos COS=\frac{2qdt\sin s}{\Omega}\cos COS$$

und

$$op=Oo.\sin COS=\frac{2qdt\sin s}{\Omega}\sin COS$$

$$=\frac{2qdt}{\Omega}\cos\theta\sin(m+\eta) \quad (\text{§. 669.});$$

also den Winkel

$$OCo=\frac{2qdt\cos\theta\sin(m+\eta)}{\Omega\sin\gamma}.$$

Hieraus leitet man aber ferner

$$CO-Co=Op=op.\operatorname{cotg} COS=\frac{2qdt}{\Omega}[\sin\gamma\sin\theta-\cos\gamma\cos\theta\cos(m+\eta)]$$

ab. Es bleibt demnach nur noch übrig, diese Elemente mit denjenigen, welche aus der drehenden Bewegung hergeleitet sind, zu combiniren, um die veränderte Drehungsaxe und zugleich das Increment oder Decrement der Winkelgeschwindigkeit zu erhalten.

Aufgabe 68.

§. 678. Es ist für eine gewisse Zeit die Lage eines starren Körpers, welcher sich um irgend eine durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe dreht, gegeben und es verändert sich so wohl die Drehungsaxe, als auch die Winkelge-

schwindigkeit auf beliebige Weise; man soll die augenblickliche, hieraus hervorgehende Veränderung in der Lage des Körpers bestimmen.

Auflösung.

(Figur 94.) Da der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers sich in Ruhe befindet, so beziehe man die Lage des letztern auf eine feste, um denselben Mittelpunkt beschriebene Kugel, innerhalb welcher der Körper seine Bewegung ausführt. Auf dieser Kugel nehme man den grössten Kreis $VXZY$ und auf demselben den festen Punkt Z an, und es entsprechen zu einer gegebenen Zeit $=t$ die Hauptaxen des Körpers den Punkten A, B, C auf der Kugelfläche, so dass AB, BC, CA Quadranten sind. Um die Lage derselben durch Symbole darzustellen, seien die Bogen der grössten Kreise $ZA=l$, $ZB=m$, $ZC=n$; alsdann wird

$$\cos l^2+\cos m^2+\cos n^2=1.$$

Setzt man ferner die Winkel $XZA=\lambda$, $XZB=\mu$, $XZC=\nu$, so wird nach der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos(\mu-\lambda)=-\operatorname{cotg} l\operatorname{cotg} m;\ \cos(\nu-\mu)=-\operatorname{cotg} m.\operatorname{cotg} n;$$
$$\cos(\nu-\lambda)=-\operatorname{cotg} l.\operatorname{cotg} n;$$

demnach

$$\cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda)=\operatorname{cotg} l^2\operatorname{cotg} m\operatorname{cotg} n=-\operatorname{cotg} l^2\cos(\nu-\mu)$$

und so

$$\operatorname{cotg} l^2=-\frac{\cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda)}{\cos(\nu-\mu)},$$
$$\operatorname{cotg} m^2=-\frac{\cos(\lambda-\mu)\cos(\nu-\mu)}{\cos(\nu-\lambda)}$$

und

$$\operatorname{cotg} n^2=-\frac{\cos(\lambda-\nu)\cos(\mu-\nu)}{\cos(\mu-\lambda)}.$$

Da nun aber

$$\cos(\nu-\mu)-\cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda)=\sin(\mu-\lambda)\sin(\nu-\lambda)$$

ist, so wird

$$\cos l^2=-\operatorname{cotg}(\mu-\lambda)\operatorname{cotg}(\nu-\lambda),\ \cos m^2=-\operatorname{cotg}(\lambda-\mu)\operatorname{cotg}(\nu-\mu)$$

und

$$\cos n^2=-\operatorname{cotg}(\lambda-\nu)\operatorname{cotg}(\mu-\nu).$$

Nachdem wir diese Relationen zwischen den Grössen l, m, n, λ, μ, ν, welche im Zeittheilchen dt als um ihre Differentiale wachsend angesehen werden müssen, aufgeführt haben, sei nun O der Drehungspol und $AO=\alpha$, $BO=\beta$, $CO=\gamma$; so dass

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

ist. Wir haben alsdann

$$\cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \text{ und } \sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha},$$

im Dreieck ZAB ist aber

$$\cos ZAB = \frac{\cos m}{\sin l} \text{ und } \sin ZAB = -\cos ZAC = -\frac{\cos n}{\sin l};$$

so dass zur Bestimmung des Dreiecks ZAO

$$\sin ZAO = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\sin l}$$

und

$$\cos ZAO = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\sin l}$$

wird. Hieraus schliesst man

$$\cos ZO = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n$$

und

$$\operatorname{cotg} AZO = \frac{\cos\alpha - \cos l[\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n]}{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n},$$

wodurch zu jeder beliebigen Zeit der Drehungspol O bekannt wird. Setzt man nun die Winkelgeschwindigkeit im Sinne $ABC = \Omega$, so beschreibt im Zeittheilchen dt der Punkt A um O den kleinen Bogen $Aa = \Omega dt \sin\alpha$ und man erhält, indem man $a\alpha$ auf ZA normal zieht,

$$A\alpha = \Omega dt \frac{\cos\lambda\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin l}$$

und

$$a\alpha = \Omega dt \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin l},$$

woraus man die Differentiale der Grössen l und λ ableitet, nämlich

$$dl.\sin l = \Omega dt[\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m]$$
$$-d\lambda.\sin l^2 = \Omega dt[\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n].$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$dm.\sin m = \Omega dt[\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n],$$
$$-d\mu.\sin m^2 = \Omega dt[\cos\gamma\cos n + \cos\alpha\cos l],$$
$$dn.\sin n = \Omega dt[\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l]$$

und

$$-d\nu.\sin n^2 = \Omega dt[\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m].$$

Sind demnach zur beliebigen Zeit t die Grössen α, β, γ und Ω, also auch ihre im Zeittheilchen dt entstandenen Differentiale gegeben; so schliesst man hieraus auf die, in demselben Zeittheilchen in den Bogen l, m, n und den Winkeln λ, μ, ν hervorgebrachten Veränderungen. Ausserdem aber kann man leicht auf die, im Drehungspole O entstandene Aenderung schliessen, weil man nur nöthig hat, den Bogen ZO und den Winkel AZO zn differentiiren, indem man die Bogen α, β, γ

allein veränderlich setzt; denn auf diese Weise wird der Pol O nach seiner nächstfolgenden Lage übertragen.

Es wird demnach

$$(Zo - ZO)\sin ZO = d\alpha \sin\alpha \cos l + d\beta \sin\beta \cos m + d\gamma \sin\gamma \cos n,$$

und da

$$\operatorname{cotg} AZO[\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n] = \cos\alpha - \cos l \cos ZO$$

ist; so erhalten wir

$$\frac{OZo}{\sin AZO^2}[\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n]$$
$$+ \operatorname{cotg} AZO[d\gamma \sin\gamma \cos m - d\beta \sin\beta \cos n]$$
$$= d\alpha \sin\alpha \sin l^2 - d\beta \sin\beta \cos l \cos m - d\gamma \sin\gamma \cos l \cos n.$$

Hieraus ergibt sich durch Reduction

$$\frac{OZo}{\sin AZO^2} = \frac{\sin l^2 [d\alpha \sin\alpha(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) + d\beta\sin\beta(\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l) + d\gamma\sin\gamma(\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m)]}{[\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n]^2}$$

und endlich der elementare Winkel

$$OZo = \frac{d\alpha\sin\alpha[\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n] + d\beta\sin\beta[\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l] + d\gamma\sin\gamma[\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m]}{1 - [\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n]^2},$$

in welche Formel die Buchstaben α, β, γ und l, m, n zweimal eintreten, wie es die Natur der Sache verlangt.

Zusatz 1.

§. 679. Zieht man aus O auf Zo den kleinen Bogen Op perpendiculär, so wird

$$po = \frac{d\alpha\sin\alpha\cos l + d\beta\sin\beta\cos m + d\gamma\sin\gamma\cos n}{\sin ZO}$$

und

$$Op = \frac{d\alpha\sin\alpha[\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n] + d\beta\sin\beta[\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l] + d\gamma\sin\gamma[\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m]}{\sin ZO}.$$

Zusatz 2.

§. 680. Ferner erhält man aus

$$\sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} \text{ und } \cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

den Winkel

$$OAo = \frac{-d\alpha\cos\alpha\cos\gamma - d\gamma\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\beta},$$

und hieraus das Element

$$Oo = \frac{\sqrt{(d\alpha^2 + d\gamma^2)\sin\alpha^2\sin\gamma^2 + 2d\alpha d\gamma\sin\alpha\cos\alpha\sin\gamma\cos\gamma}}{\cos\beta}.$$

Da dieser Ausdruck gleiche Beziehung zu α, β, γ hat, so erhält man, vermöge der Gleichung

$$d\alpha\sin\alpha\cos\alpha + d\beta\sin\beta\cos\beta + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma = 0,$$

$$Oo = \sqrt{d\alpha^2\sin\alpha^2 + d\beta^2\sin\beta^2 + d\gamma^2\sin\gamma^2}.$$

Zusatz 3.

§. 681. Setzen wir $ZO = v$, so wird, weil

$$\cos v = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n$$

ist,

$$\operatorname{tg} AZO = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\cos\alpha - \cos l\cos v}$$

und analog, weil B auf die andere Seite von ZO in der Figur fällt,

$$-\operatorname{tg} BZO = \frac{\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l}{\cos\beta - \cos m\cos v}.$$

Hieraus erhält man

$$\operatorname{tg} AZB = \operatorname{tg}(\mu - \lambda) = \frac{\cos n}{\cos l\cos m},$$

welcher Werth vortrefflich mit dem oben gefundenen

$$\cos(\mu - \lambda) = -\frac{\cos l\cos m}{\sin l\sin m}$$

übereinstimmt, so wie auch

$$\sin(\mu - \lambda) = -\frac{\cos n}{\sin l\sin m}$$

sein wird.

Zusatz 4.

§. 682. Hiernach haben wir also für die Unterschiede der drei Winkel λ, μ, ν folgende Bestimmungen erlangt:

$$\sin(\mu - \lambda) = -\frac{\cos n}{\sin l\sin m}, \qquad \sin(\nu - \mu) = -\frac{\cos l}{\sin m\sin n},$$

$$\sin(\lambda-\nu)=-\frac{\cos\mu}{\sin l\sin n}, \qquad \cos(\mu-\lambda)=-\frac{\cos l\cos m}{\sin l\sin m},$$

$$\cos(\nu-\mu)=-\frac{\cos m\cos n}{\sin m\sin n}, \qquad \cos(\lambda-\nu)=-\frac{\cos l\cos n}{\sin l\sin n}.$$

Anmerkung.

§. 683. Dasjenige, was wir bis jetzt über die augenblickliche Aenderung, welche die drehende Bewegung so wohl durch sich selbst, als auch in Folge von antreibenden Kräften erleidet, aus einander gesetzt haben, bildet die Grundlage der gesammten Theorie der Bewegung starrer Körper, wenn nämlich der Uebergang von der bekannten elementaren Aenderung zur Bestimmung der Bewegung selbst durch die Integralrechnung eröffnet ist. Wir wollen demnach die freie Bewegung solcher Körper betrachten, welche entweder gleichsam einem eigenen Instinkte oder antreibenden Kräften frei nachgeben können, und wollen zuerst die äussern antreibenden Kräfte entfernen, wie auch die Körper nur als sich selbst überlassen betrachten, so dass von aussen her nichts hinzutrete, was zu ihrer Bewegung irgend etwas beitragen könnte. Da aber die Natur der Hauptaxen, mit denen ein Körper begabt ist, hier hauptsächlich in die Rechnung eintritt, so wird es angemessen sein, nach ihnen gleichsam einen natürlichen Unterschied in den Körpern aufzustellen, je nachdem die Momente der Trägheit in Bezug auf sie beschaffen sind.

Wir wollen daher drei Klassen von Körpern aufstellen und zählen zur ersten diejenigen Körper, deren Momente in Bezug auf die Hauptaxen unter sich gleich sind; zur zweiten diejenigen, in denen zwei Momente in Bezug auf die Hauptaxen einander gleich sind, das dritte aber jenen ungleich ist. Die dritte Klasse aber umfasse im allgemeinen alle die Körper, deren Momente in Bezug auf die Hauptaxen unter sich ungleich sind.

Kapitel XI.

Von der freien Bewegung starrer Körper, welche drei gleiche Hauptaxen haben und durch keine Kräfte angetrieben werden.

Erklärung 11.

§. 684. Man sagt, ein starrer Körper habe drei gleiche Hauptaxen, wenn seine Momente der Trägheit in Beziehung auf die drei Hauptaxen einander gleich sind.

Zusatz 1.

§. 685. In solchen Körpern vertreten demnach alle geraden Linien, welche durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gezogen sind, die Stelle der Hauptaxen und in Beziehung auf sie werden die Momente der Trägheit einander gleich.

Zusatz 2.

§. 686. Was für beliebige drei gerade Linien, die sich wechselseitig im Mittelpunkte der Trägheit normal schneiden, man auch als Coordinatenaxen annehmen mag, wenn man die Lage eines jeden Elementes dM des Körpers durch die jenen parallelen Coordinaten x, y, z bestimmt; so wird durch den ganzen Körper:

$$\int xydM = 0,\ \int xzdM = 0 \text{ und } \int yzdM = 0.$$

Zusatz 3.

§. 687. Hat ein solcher Körper um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, gerade Linie eine drehende Bewegung angenommen, so wird er dieselbe in Folge seiner Trägheit beständig beibehalten, damit diese gerade Linie

unbewegt bleibe, wenn er nämlich nicht durch äussere Kräfte gestört wird.

Anmerkung.

§. 688. Dass es solche Körper gebe, deren Momente in Beziehung auf die Hauptaxen unter sich gleich sind, darf man um so weniger bezweifeln, als wir im Frühern, wo wir die gleichartigen Körper betrachteten, mehrere Arten von Körpern angegeben haben, welche diese Eigenschaft besitzen. Unter diesen nimmt die erste Stelle eine aus gleichartiger Materie zusammengesetzte Kugel ein, ferner sind dahin die fünf regulären Körper zu zählen; es gibt aber ausserdem Cylinder, Kegel und abgekürzte Kegel, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Bestehen nun im allgemeinen die Körper nicht aus gleichartiger Materie, so kann man unzählige Arten von jeder Figur darstellen, in denen eine Gleichheit zwischen den Momenten der Trägheit in Beziehung auf die Hauptaxen stattfindet. Nur um Körper dieser Art handelt es sich in diesem Kapitel und es wird die Bewegung, deren sie fähig sind, wenn keine äussere Kräfte sie antreiben, bestimmt werden. Der wesentliche Charakter solcher Körper besteht aber darin, dass, wenn man drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z voraussetzt, die sich auf den Mittelpunkt der Trägheit beziehen, zuerst, wie schon bemerkt

$$\int xydM = \int xzdM = \int yzdM = 0,$$

dann aber auch

$$\int x^2dM = \int y^2dM = \int z^2dM$$

wird. Es wird daher das Moment der Trägheit in Beziehung auf jede beliebige, durch den Mittelpunkt der Trägheit gezogene Axe

$$= 2\int x^2dM.$$

Durch dieses Criterium wird gleichsam eine erste Art von Körpern gebildet, welche in der Mechanik bequem durch den Namen regulärer Körper bezeichnet werden könnte, da durchaus alle durch den Mittelpunkt der Trägheit gezogenen geraden Linien die gleiche Eigenschaft besitzen.

Anmerkung 2.

§. 689. Wenn ich auch in diesem Kapitel nur die Bewegung derjenigen Körper, welche drei gleiche Hauptaxen haben, als den einfachsten Fall zu behandeln festgesetzt habe; so wird es doch angemessen sein, von einer Eigenschaft auszugehen, welche auch bei den übrigen Arten von Körpern stattfindet.

Auf welche Weise nämlich die Bewegung eines starren Körpers auch gestört werden mag, so kann man dieselbe für jeden beliebigen Zeitpunkt in je zwei Bewegungen zerlegen, von denen die eine eine fortschreitende, die andere eine um eine beliebige, durch den Mittelpunkt der Trägheit gezogene, Axe drehende Bewegung ist. Da dieser Satz die Grundlage der Bewegung aller starren Körper enthält, so wollen wir seinen Beweis in dem folgenden Lehrsatze geben.

Lehrsatz 9.

§. 690. Auf welche Weise ein starrer Körper sich auch bewegen mag, so ist seine Bewegung in jedem Augenblick aus einer fortschreitenden und einer, um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gezogene, Axe drehenden Bewegung zusammengesetzt oder gemischt.

Beweis.

Bewegt sich der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers, worin nämlich die fortschreitende Bewegung besteht, indem diese stets mit der Bewegung des Mittelpunktes der Trägkeit übereinstimmt; so hebt man diese wenigstens im Geiste auf, indem man sich den Raum nebst dem Körper mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung fortgetragen denkt. Von der im Körper nun noch befindlichen Bewegung muss bewiesen werden, dass dieselbe eine, um eine beliebige und durch den Mittelpunkt der Trägheit gezogene Axe drehende sei, welche Axe, wenn die fortschreitende Bewegung aufgehoben ist, wenigstens während eines unendlich kleinen Zeittheilchens sich in Ruhe befindet. Auf diese Weise wird aber der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers zur Ruhe gebracht und wie auch immer der Körper sich um diesen Mittelpunkt bewegen mag, wird ausser ihm immer eine gewisse gerade Linie ruhen und es wird diese die Drehungsaxe sein, was ich auch auf folgende Weise zeige.

Man denke sich um den Körper eine sphärische Oberfläche, welche ihren Mittelpunkt im Mittelpunkte der Trägheit hat, betrachte dieselbe als ruhend und beziehe auf sie die einzelnen Punkte des Körpers durch gerade Linien, welche vom Mittelpunkte nach der Oberfläche gezogen werden. (Fig. 95.) Wenn nun der Mittelpunkt ruhet, werde der auf P sich beziehende Punkt des Körpers im Zeittheilchen dt nach p übertragen, und indem man nun durch P den auf den kleinen Weg Pp normalen grössten

Kreis OPB gezogen hat, nehme man auf ihm einen andern beliebigen Punkt Q an, welcher inzwischen nach q übertragen wird; alsdann wird, weil alle Punkte des Körpers stets dieselben Abstände von einander beibehalten,

$$pq = PQ$$

sein. Weil aber die Bogen Pp und Qq unendlich klein sind und der Winkel $pPQ = 90^0$ ist, können jene nur dann einander gleich sein, wenn auch der kleine Bogen qQ auf PQ normal ist. Man verlängere nun beide Bogen PQ und pq, bis sie sich in O schneiden, alsdann wird, weil

$$OP = Op \text{ und } OQ = Oq$$

ist, durch jene Bewegung der ganze Bogen OPQ nach Opq übertragen und daher der Punkt O nothwendig unbewegt an seinem Orte verharren. Zieht man daher aus dem Mittelpunkte eine gerade Linie durch diesen Punkt O, so wird dieselbe offenbar inzwischen in Ruhe verbleiben und daher die Drehungsaxe sein. Hieraus ersieht man, dass der Körper sich um seinen ruhenden Mittelpunkt nicht bewegen kann, ohne dass zugleich eine ganze gewisse, durch diesen Mittelpunkt gezogene gerade Linie unbewegt bleibe und dass daher die Bewegung eine drehende ist. Bewegt sich aber der Mittelpunkt der Trägheit selbst, so wird die allgemeine Bewegung des Körpers zusammengesetzt oder gemischt aus einer fortschreitenden und einer, um irgend eine durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe, drehenden Bewegung.

Zusatz 1.

§. 691. Auf welche Weise sich demnach ein starrer Körper auch bewegen mag, so betrachte man, um seine Bewegung kennen zu lernen, zuerst seinen Mittelpunkt der Trägheit, dessen Bewegung die fortschreitende geben wird und nachdem man diese aufgehoben hat, suche man den Punkt O, wodurch die Drehungsaxe bekannt wird.

Zusatz 2.

§. 692. Um diesen Punkt O zu finden, setze man den Bogen $OP = v$, alsdann wird, weil $\angle O = \frac{Pp}{\sin v} = \frac{Qq}{\sin(v + PQ)}$, $Qq \sin v = Pp \cos PQ \sin v + Pp . \sin PQ \cos v$ und hieraus

$$\operatorname{tg} v = \frac{Pp \sin PQ}{Qq - Pp \cos PQ}.$$

Man sieht demnach, dass dieser Punkt immer auf reelle Weise bestimmt wird.

Zusatz 3.

§. 693. Aus den Bewegungen der Punkte P und Q durch die kleinen Wege Pp und Qq leitet man auch leicht die Winkelgeschwindigkeit um die Drehungsaxe her, die nämlich

$$= \frac{\angle O}{dt} = \frac{Pp}{\sin v\, dt} = \frac{\sqrt{Pp^2 - 2Pp.Qq \cos PQ + Qq^2}}{\sin PQ\, dt}$$

ist. Dieselbe kann daher nur dann $=0$ werden, wenn die beiden kleinen Wege Pp und Qq verschwinden.

Anmerkung.

§. 694. Obgleich dieser durch die sphärische Trigonometrie geführte Beweis im höchsten Grade einleuchtend ist, so ist es doch angemessen, seine Kraft um so mehr zu erwägen, als es nicht an sonst sehr scharfsinnigen Männern gefehlt hat, denen es sogar möglich schien, dass alle Punkte der sphärischen Oberfläche bei ruhendem Mittelpunkte mit gleichen Geschwindigkeiten herumgeführt würden. Sie glaubten dies nämlich erlangen zu können, wenn die Kugel, während sie sich um irgend eine Axe drehte, zugleich um eine andere, auf jene normale Axe herumgetrieben würde. Jetzt ist aber durch diesen angeführten Beweis dargethan, dass, wenn auch die Kugel nicht nur um zwei, sondern selbst um drei oder mehrere Axen zugleich herumgetrieben wird, ihre Bewegung doch immer so beschaffen sein wird, dass in jedem beliebigen Augenblick eine gewisse gerade Linie ihrer ganzen Länge nach in Ruhe bleibt. Es wird nämlich der Beweis nicht verstärkt, wenn jemand einwirft, dass die Punkte P und Q nicht, wie wir hier angenommen haben, mit einfacher, sondern mit zusammengesetzter Bewegung um einige Axen zugleich geführt werden. Auf welche Weise diese Bewegung auch zusammengesetzt sein mag, so müssen doch diese Punkte P und Q nach einem Zeittheilchen dt nothwendig zu andern bestimmten Punkten p und q gelangen, so dass der Bogen pq dem PQ gleich sei und weil wir den Bogen PQ auf den Weg Pp normal angenommen haben, muss er auch normal auf Qq sein. Sollte aber jemand noch daran zweifeln, dass der Punkt O, in welchem wir den Durchschnitt der verlängerten Bogen PQ und pq angenommen haben, an demselben Orte verharre; so muss wenigstens zugegeben werden, dass dieser Punkt sich noch auf

dem grössten Kreise Opq befinden werde, weil er vorher mit den Punkten P und Q auf demselben grössten Kreise lag. Wäre er nun nach o gelangt, so müsste

$$op = OP$$

sein; es ist aber wirklich

$$Op = OP,$$

also muss nothwendig o in O fallen.

Aufgabe 69.

§. 695. Es ist die Bewegung zweier Punkte eines starren Körpers, dessen Mittelpunkt der Trägheit sich in Ruhe befindet, gegeben; man soll die durch den letztern Punkt gehende Axe finden, um welche der Körper sich in diesem Augenblicke dreht.

Auflösung.

(Figur 95.) Man beziehe wie vorhin alle Punkte des Körpers auf die ruhende sphärische Oberfläche $ABCD$, welche um den Mittelpunkt der Trägheit beschrieben ist und es bewege sich im Zeittheilchen dt der Punkt P durch den kleinen Weg $Pp = dp$ und ein anderer beliebiger Punkt R durch den Weg $Rr = dr$, und man setze den Bogen des grössten Kreises $PR = q$. Ferner setze man die Winkel $RPp = m$ und $SRr = n$, zwischen denen schon eine gewisse bestimmte Relation eintreten muss, damit der Bogen pr dem $PR = q$ gleich werde. Es sei nun O der Drehungspol und man ziehe von ihm nach P und R gleichsam die Meridiane OP und OR, alsdann wird der Winkel $OPR = 90^0 + m$ und der $ORP = 90^0 - n$, weil die erstern Bogen auf die kleinen Wege Pp und Rr normal sind. Da nun im sphärischen Dreieck OPR die Seite $PR = q$, nebst den Winkeln $OPR = 90^0 + m$ und $ORP = 90^0 - n$ gegeben ist, so findet man:

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} OP &= \frac{\sin OPR}{\sin PR . \operatorname{tg} ORP} + \frac{\cos PR . \cos OPR}{\sin PR} \\ &= \frac{\cos m \sin n}{\cos n \sin q} - \frac{\sin m \cos q}{\sin q}, \\ \operatorname{cotg} OR &= \frac{\sin ORP}{\sin PR . \operatorname{tg} OPR} + \frac{\cos PR . \cos ORP}{\sin PR} \\ &= -\frac{\sin m \cos n}{\cos m \sin q} + \frac{\sin n \cos q}{\sin q},\end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{tg} OP = \frac{\cos n \sin q}{\cos m \sin n - \sin m \cos n \cos q}$$

und

$$\operatorname{tg} OR = \frac{\cos m \sin q}{-\sin m \cos n + \cos m \sin n \cos q}.$$

Hierdurch wird der Punkt O bekannt. Da aber ferner

$$Pp : Rr = \sin OP : \sin OR = \sin ORP : \sin OPR$$

oder

$$dp : dr = \cos n : \cos m;$$

so wird

$$\cos m\, dp = \cos n\, dr,$$

woraus man auf eine Relation zwischen den kleinen Wegen dp und dr, und den Winkeln m und n schliesst. Was endlich die Winkelgeschwindigkeit anbetrifft, so ist dieselbe gleich dem Winkel POp dividirt durch dt, d. h. $= \frac{Pp}{\sin OP\, dt}$ und es geht dieser Werth über in

$$\frac{dp.\sqrt{\cos m^2 \sin n^2 + \cos n^2 \sin q^2 + \sin m^2 \cos n^2 \cos q^2 - 2 \sin m \cos m \sin n \cos n \cos q}}{\cos n \sin q\, dt}.$$

Zusatz 1.

§. 696. Da zwischen den kleinen Wegen dp, dr und den Winkeln m, n eine solche Relation eintreten muss, dass

$$\cos m\, dp = \cos n\, dr$$

werde, so kann diese Relation in der Figur dargestellt werden, indem man aus p und r auf den Bogen PR die Perpendikel $p\pi$ und $r\varrho$ fällt, worauf

$$P\pi = R\varrho$$

sein wird.

Zusatz 2.

§. 697. Diese Eigenschaft ist aber von selbst klar, da nämlich der Bogen pr dem $\pi\varrho$ gleich ist (§. 690.), so kann er nur dem Bogen PR gleich sein, wenn

$$P\pi = R\varrho$$

ist. Die Winkelgeschwindigkeit wird ferner auf bequeme Weise durch

$$\frac{dp.\sqrt{1 - (\sin m \sin n + \cos m \cos n \cos q)^2}}{\cos n \sin q\, dt}$$

ausgedrückt.

Zusatz 3.

§. 698. Sind die Punkte P und R um einen Halbkreis von einander entfernt, so dass $\sin q = 0$ und $\cos q = -1$ ist; so muss nothwendig

$$\cos m \sin n + \sin m \cos n = 0 \text{ oder } \operatorname{tg} m = -\operatorname{tg} n \text{ und } m = -n,$$

also
$$dp = dr$$

sein. Punkte, welche einander auf der Kugel entgegengesetzt sind, können nämlich nur eine gleiche Bewegung haben; in diesem Falle wird aber in Betreff der Drehungsaxe nichts bestimmt.

Zusatz 4.

§. 699. Kennt man aber die Bewegung zweier einander nicht entgegengesetzter Punkte, so wird die Drehungsaxe nebst der Winkelgeschwindigkeit bekannt werden, wodurch man hierauf die Bewegung aller Punkte des Körpers bestimmen kann.

Anmerkung.

§. 700. Dieses betrifft, wie ich schon erinnert habe, nicht allein solche Körper, in denen drei gleiche Hauptaxen existiren, sondern im allgemeinen alle starren Körper. Mögen diese nun auf irgend eine beliebige Weise angetrieben werden, wenn nur ihr Mittelpunkt der Trägheit fest bleibt, so ist in jedem Augenblick ihre Bewegung eine drehende um irgend eine durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe. Bleibt aber der Mittelpunkt der Trägheit nicht fest, so ist in jedem Augenblick die Bewegung aus einer solchen drehenden und einer fortschreitenden zusammengesetzt; eine andere Bewegung kann nicht in starren Körpern vorkommen. Um daher die Bewegung eines starren Körpers vollständig kennen zu lernen, müssen wir eine doppelte Bewegung erforschen, die eine nämlich, welche die seines Mittelpunktes der Trägheit und eine fortschreitende ist, die andere aber eine drehende, zu deren Kenntniss es erforderlich ist, dass wir zu jeder Zeit die Drehungsaxe nebst der Winkelgeschwindigkeit anzugeben vermögen. Bleibt ferner die Drehungsaxe stets dieselbe, so hat die Bestimmung der Bewegung mittelst der früher hier und dort auseinander gesetzten Principien keine Schwierigkeit; ändert sich aber die Drehungsaxe beständig, so reichen diese Principien keineswegs hin, sondern man muss zu denjenigen seine Zuflucht nehmen, welche in den vorhergehenden Kapiteln weitläufiger dargestellt worden sind.

In diesem Kapitel jedoch, wo wir von der Bewegung solcher Körper, die je drei gleiche Axen haben und durch keine Kräfte angetrieben werden, handeln, bedürfen wir dieser Hülfsmittel nicht, sondern können die ganze Arbeit, mittelst der gewöhnlichen Principien, in einem einzigen Satze abmachen.

Aufgabe 70.

§. 701. Ein starrer Körper, welcher drei gleiche Axen hat, wird auf eine beliebige Weise fortgeworfen und hierauf durch keine andern Kräfte angetrieben; man soll die Bewegung, mit welcher er fortschreitet, bestimmen.

Auflösung.

Die dem Körper zuerst beigebrachte Bewegung zerlege man in eine fortschreitende und in eine um irgend eine Axe, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit geht, drehende Bewegung, von welchen beiden man jede für sich betrachten kann. Zuerst wird nun die fortschreitende Bewegung so fortgesetzt werden, dass der Mittelpunkt der Trägheit gleichförmig in gerader Linie fortschreitet, welche Eigenschaft jeder fortschreitenden Bewegung zukommt, wenn wir auch nicht den Körper zu dieser Art zählen. Was aber die dem Körper zuerst beigebrachte drehende Bewegung betrifft, so liefert hier die Natur dieser Art von Körpern ins besondere eine Auflösung. Da nämlich die Drehungsaxe, welche es auch sein mag, die Eigenschaft der Hauptaxen besitzt, so wird die anfangs dem Körper beigebrachte drehende Bewegung so fortgesetzt werden, dass die Drehungsaxe beständig in Ruhe bleibt, wenn die fortschreitende Bewegung nicht existirt. Kommt aber diese hinzu, so wird die Drehungsaxe, mit einer ihr parallelen Bewegung mit dem Mittelpunkte der Trägheit gleichförmig und in gerader Linie fortgehen und inzwischen die drehende Bewegung gleichförmig ausgeführt werden.

Zusatz 1.

§. 702. Was für eine Bewegung, so wohl eine fortschreitende als auch eine drehende, dem Körper anfangs beigebracht werden mag, so wird der Mittelpunkt der Trägheit nebst der Drehungsaxe gleichförmig und geradlinig so fortschreiten, dass die letztere ihr selbst immer parallel bleibt und der Körper sich um sie gleichförmig zu drehen fortfährt.

Zusatz 2.

§. 703. Wenn auch der Körper nicht zu dieser Art gehört, ihm jedoch anfangs ausser der fortschreitenden Bewegung eine drehende um irgend eine Hauptaxe beigebracht wird, so wird er beide Bewegungen eben so fortsetzen.

Zusatz 3.

§. 704. Selbst wenn auch ausserdem äussere Kräfte hinzutreten, deren mittlere Richtung durch den Mittelpunkt der

Trägheit geht, wirken diese nur auf die fortschreitende Bewegung eben so, als ob die ganze Masse des Körpers in diesem Mittelpunkte vereinigt wäre. Die drehende Bewegung wird aber gleichförmig bleiben und die Drehungsaxe eine ihr selbst parallele Lage behalten.

Anmerkung.

§. 705. Da wir bis jetzt die antreibenden Kräfte entfernen, und nur allein die Fortsetzung der beigebrachten Bewegung untersuchen, so haben wir die Bewegungen aller Körper der ersten Art vollkommen bestimmt, dergestalt dass man nichts mehr verlangen kann. In Betreff der übrigen Körper aber haben wir schon einen gewissen Theil beseitigt, wenn nämlich die zuerst beigebrachte drehende Bewegung um eine Hauptaxe erfolgt, welche Bestimmung durch die schon früher bekannten mechanischen Hülfsmittel ausgeführt werden kann. Bei Körpern anderer Art begegnet uns erst dann eine Schwierigkeit, wenn zuerst die drehende Bewegung nicht um irgend eine Hauptaxe beigebracht wird. Um diesen Gegenstand zu behandeln, werde ich zuerst eine besondere Art derjenigen Körper aufstellen, in denen es zwei gleiche Momente der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxen gibt. Diese Art hat, ausserdem dass die Rechnung nicht wenig zusammengezogen wird, auch diesen Vortheil, dass es in ihr noch unendlich viele Hauptaxen gibt, so dass eine solche Bewegung, wie wir sie jetzt erklärt haben, auf unendlich vielfache Weise stattfinden kann; da hingegen bei der dritten Art, in welcher die Hauptmomente unter sich ungleich sind, es ausser den drei bestimmten Axen keine andre gibt, um welche der Körper sich frei drehen kann. Bei diesen Arten ist nun dies unsere Aufgabe, dass wir, was für eine Bewegung auch solchen Körpern beigebracht sein möge, ihre Fortsetzung zu bestimmen suchen. Hierbei muss man für jede Zeit zuerst die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers nebst der Winkelgeschwindigkeit, zweitens aber die Lage derselben Hauptaxen in Bezug auf den absoluten Raum bestimmen. Diese Weise, diesen schwierigen Gegenstand zu behandeln, scheint höchst angemessen zu sein, so wohl um die Rechnung zu entwickeln, als auch um uns eine deutlichere Kenntniss zu verschaffen. Die für beide erforderlichen Hülfsmittel haben wir aber in den vorhergehenden Kapiteln auseinander gesetzt.

Kapitel XII.

Von der Bewegung starrer Körper, welche zwei gleiche Hauptaxen haben und durch keine Kräfte angetrieben werden.

Erklärung 12.

§. 706. Man sagt, ein starrer Körper habe zwei gleiche Hauptaxen, wenn unter seinen Momenten der Trägheit in Beziehung auf die Hauptaxen zwei einander gleiche sind.

Zusatz 1.

§. 707. Körper dieser Art haben demnach unzählige Hauptaxen. Sobald nämlich zwei Hauptaxen gleiche Momente der Trägheit haben, kann man alle in der Ebene derselben durch den Mittelpunkt der Trägheit gezogenen, geraden Linien für Hauptaxen halten, welche dasselbe Moment der Trägheit haben.

Zusatz 2.

§. 708. Hier wird daher jene Hauptaxe, deren Moment der Trägheit den übrigen ungleich ist, eine besondere sein und es werden alle, durch den Mittelpunkt der Trägheit auf sie normal gezogenen, geraden Linien gleiche Momente der Trägheit haben und als Hauptaxen betrachtet werden können.

Zusatz 3.

§. 709. Ist daher die besondere Axe bekannt, so wird die Lage der zwei übrigen nicht bestimmt, sondern man kann an ihrer Stelle nach Belieben irgend je zwei, sowohl unter sich als auf jene normale, gerade Linien annehmen, wenn sie nur durch den Mittelpunkt der Trägheit gehen.

Anmerkung.

§. 710. Da wir nun oben im allgemeinen für die Hauptaxen IA, IB, IC die Momente der Trägheit Ma^2, Mb^2, Mc^2 vorausgesetzt haben, so wollen wir zwei derselben in diesem Kapitel als einander gleiche aufstellen. Es sei daher die erste Axe IA die besondere und die Trägheitsmomente der übrigen unter sich gleich, so dass

$$b^2 = c^2$$

ist; hierdurch werden die oben gefundenen Formeln wunderbar zusammen gezogen werden. Wird aber auch in diesem Falle die Lage der zwei Axen IB und IC nicht bestimmt, so werden wir sie doch als bestimmt ansehen, damit mittelst derselben die Lage des Körpers zu jeder Zeit leichter angegeben werden könne. Von dieser Art gibt es aber unendlich viele Körper, und unter den gleichartigen gehören insbesondere hierher die Cylinder, Kegel und im allgemeinen alle runden Körper, welche durch die Umdrehung irgend einer Figur um eine feste Axe entstehen; so dass diese Art fast alle Körper, welche die Geometer zu betrachten pflegen, in sich begreift. Auf welche Weise demnach diese Körper sich hinsichtlich der Bewegung verhalten werden, während keine Kräfte sie antreiben, wollen wir in diesem Kapitel erforschen und zwar zuerst für jede Zeit die Lage der Drehungsaxe in Beziehung auf die Hauptaxen suchen, ohne uns jetzt darum zu bekümmern, welche Bewegung die letztern selbst haben werden, indem wir diese hernach zu bestimmen suchen wollen.

Aufgabe 71.

§. 711. Ist einem starren Körper, welcher zwei gleiche Hauptaxen hat, anfangs eine beliebige drehende Bewegung beigebracht worden und sind keine äussern Kräfte vorhanden; so soll man für jede Zeit die Lage der Drehungsaxe in Beziehung auf die Hauptaxen angeben.

Auflösung.

(Figur 94.) Setzen wir den Mittelpunkt der Trägheit I des Körpers in den Mittelpunkt einer Kugel, auf deren Oberfläche wir alles zurückführen, so seien IA, IB, IC die Hauptaxen des Körpers und in Bezug auf die erstere IA das Moment der Trägheit $= Ma^2$, in Bezug auf die zwei übrigen IB und IC seien die Momente der Trägheit unter sich gleich und $= Mc^2$, so dass man

$$b^2 = c^2$$

hat. Jetzt aber, nachdem von Anfang an die Zeit t verflossen

ist, drehe sich der Körper um die Axe IO im Sinne ABC und mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$, so dass die Lage des Punktes O in Beziehung auf die Punkte A, B, C bestimmt werden soll. Man setze demnach die Bogen der grössten Kreise $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$, welche man als veränderliche zu behandeln hat; alsdann wird die, auf diesen Fall wo $b^2=c^2$ ist, übertragene Aufgabe 66. (§. 669.) zuerst ergeben

$$d\Omega=0.$$

Hieraus ersieht man, dass die Winkelgeschwindigkeit unveränderlich bleibt und daher noch derjenigen gleich sein wird, welche im Anfange dem Körper beigebracht worden ist. Setzt man daher diese erste Winkelgeschwindigkeit $=\varepsilon$, so wird

$$\Omega=\varepsilon.$$

Zweitens aber werden wir nach §. 674. diese Gleichungen haben:

$$\text{I.}\quad a^2c^4\sin\alpha\, d\alpha=0,$$

$$\text{II.}\quad a^2c^4\sin\beta\, d\beta=\varepsilon a^2c^2(a^2-c^2)\cos\alpha\cos\gamma\, dt,$$

$$\text{III.}\quad a^2c^4\sin\gamma\, d\gamma=\varepsilon a^2c^2(c^2-a^2)\cos\alpha\cos\beta\, dt,$$

aus deren ersten wir lernen, dass der Bogen $AO=\alpha$ constant und daher demjenigen gleich ist, um welchen im Anfange die Drehungsaxe von der besondern Axe IA abstand. Da nun

$$\cos\gamma=\sqrt{\sin\alpha^2-\cos\beta^2},$$

so ergibt die zweite Gleichung

$$\frac{\sin\beta\, d\beta}{\sqrt{\sin\alpha^2-\cos\beta^2}}=\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\cos\alpha\, dt}{c^2},$$

deren Integral

$$\text{arc.}\cos\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)=C+\frac{\varepsilon(a^2-c^2)t\cos\alpha}{c^2}$$

ist. Es wird daher

$$\cos\beta=\sin\alpha\cos\left[C+\frac{\varepsilon(a^2-c^2)t\cos\alpha}{c^2}\right]$$

und

$$\cos\gamma=\sin\alpha\sin\left[C+\frac{\varepsilon(a^2-c^2)t\cos\alpha}{c^2}\right].$$

Wenn daher im Anfange, wo $t=0$, $AO=\mathfrak{A}$, $BO=\mathfrak{B}$ und $CO=\mathfrak{C}$ war, so wird

$$\alpha=\mathfrak{A}\ \text{und}\ \cos\mathfrak{B}=\sin\mathfrak{A}\cos C,$$

mithin der constante

$$\cos C=\frac{\cos\mathfrak{B}}{\sin\mathfrak{A}}\ \text{und}\ \sin C=\frac{\cos\mathfrak{C}}{\sin\mathfrak{A}}.$$

Wir erhalten demnach

$$\cos\beta = \cos\mathfrak{B}.\cos\left[\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,t\cos\mathfrak{A}}{c^2}\right] - \cos\mathfrak{C}.\sin\left[\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,t\cos\mathfrak{A}}{c^2}\right]$$

und

$$\cos\gamma = \cos\mathfrak{B}.\sin\left[\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,t\cos\mathfrak{A}}{c^2}\right] + \cos\mathfrak{C}.\cos\left[\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,t\cos\mathfrak{A}}{c^2}\right].$$

Wenn wir daher beim Anfange der Bewegung die Lage der Drehungsaxe in Beziehung auf die Hauptaxen, oder die Bogen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ kennen, so sind wir im Stande, nach Verlauf jeder Zeit t die Lage der Drehungsaxe in Beziehung auf dieselben Hauptaxen oder die Bogen α, β und γ anzugeben.

Zusatz 1.

§. 712. Ist demnach dem Körper anfangs eine drehende Bewegung um eine Axe IE, welche gegen die Hauptaxen IA, IB und IC um die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ geneigt ist und mit einer Winkelgeschwindigkeit $=\varepsilon$ im Sinne ABC beigebracht worden; so mag hierauf die Drehungsaxe sich beliebig ändern, die Winkelgeschwindigkeit wird stets dieselbe $=\varepsilon$ bleiben und die Drehungsaxe IO um denselben Winkel $\mathfrak{A}$ gegen die besondere Hauptaxe IA geneigt sein.

Zusatz 2.

§. 713. Ist ferner das Moment der Trägheit in Bezug auf die besondere Axe $IA = Ma^2$, in Bezug auf die beiden übrigen aber $= Mc^2$; so setze man für eine verflossene Zeit $=t$, weil ε die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, den Winkel

$$\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,t\cos\mathfrak{A}}{c^2} = T,$$

welcher mit der Zeit t gleichförmig wächst. In dieser Zeit wird der Körper sich so um die Axe IO drehen, dass

$$AO = AE = \mathfrak{A},$$

$$\cos BO = \cos\mathfrak{B}\cos T - \cos\mathfrak{C}\sin T$$

und

$$\cos CO = \cos\mathfrak{B}\sin T + \cos\mathfrak{C}\cos T$$

wird.

Zusatz 3.

§. 714. Weil der Bogen AO beständig gleich gross und $=\mathfrak{A}$ bleibt, wird die Lage des Punktes O am bequemsten durch den Winkel BAO bekannt, und da

$$\cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin \mathfrak{A}} \text{ und } \sin BAO = \frac{\cos CO}{\sin \mathfrak{A}}$$

ist, so wird

$$\cos BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \cos T - \cos \mathfrak{C} \sin T}{\sin \mathfrak{A}}$$

und

$$\sin BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \sin T + \cos \mathfrak{C} \cos T}{\sin \mathfrak{A}}.$$

Zusatz 4.

§. 715. Wenn man $c^2 = a^2$ hat, welches der vorher behandelte Fall ist, wo alle drei Momente der Trägheit unter sich gleich sind; so wird

$$T = 0, \; BO = \mathfrak{B} \text{ und eben so } CO = \mathfrak{C}.$$

Der Drehungspol O wird nämlich in Bezug auf die Hauptaxen unbewegt bleiben, wie wir schon vorher gefunden haben.

Anmerkung.

§. 716. Diese Formeln können bedeutend vereinfacht werden, allein die Würde der Sache wird es verdienen, dass wir diess vielmehr in einem besondern Satze, als im Vorübergehen weiter ausführen.

Aufgabe 72.

§. 717. Unter denselben Voraussetzungen wie in der vorhergehenden Aufgabe, soll man die Bewegung des Drehungspoles O in Beziehung auf die Hauptaxen bestimmen.

Auflösung.

(Figur 96.) Es bleibe alles wie in der vorhergehenden Auflösung, und da man die gleichen Pole B und C auf dem Kreise BC nach Belieben annehmen kann, so lege man den Quadranten AB so, dass er durch den Pol E, um welchen der Körper zuerst sich zu drehen anfängt, gehe. Da nun dieser Drehungspol beständig denselben Abstand vom Hauptpole A beibehält, so wird seine Bewegung auf dem kleinern, um den Mittelpunkt A beschriebenen, Kreise EFG erfolgen, dessen Abstand der Bogen $AE = \alpha$ ist, welchen wir oben durch $\mathfrak{A}$ bezeichnet haben. Es wird demnach $BE = \mathfrak{B} = 90^0 - \alpha$ und $CE = \mathfrak{C} = 90^0$. Ist daher nach Verlauf der Zeit $= t$ der Drehungspol von E nach O gelangt, so wird, weil $\cos \mathfrak{C} = 0$ ist,

$$\cos BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \cos T}{\sin \alpha} = \cos T$$

und

$$\sin BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \sin T}{\sin \alpha} = \sin T;$$

also der Winkel $BAO = T$. Dieser letztere wird aber durch die Zeit t so bestimmt, dass wir

$$T = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2)\, t \cos\alpha}{c^2} = BAO$$

haben, woraus wir folgende vortreffliche Auflösung ableiten. Ist das Moment der Trägheit in Beziehung auf die besondere Hauptaxe $IA = Ma^2$, und in Beziehung auf die zwei übrigen gleichen Axen IB und $IC = Mc^2$, hat aber der Körper im Anfange um die Axe IE, im Sinne BCA und mit der Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$ sich zu drehen angefangen; so wird in Beziehung auf die Hauptaxen, welche wir als in Ruhe betrachten, der Drehungspol auf dem kleinern, um den Pol A beschriebenen, Kreise EFG gleichförmig fortgeführt werden, so dass er im Verlauf der Zeit t den Winkel

$$EAO = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2) t \cos AE}{c^2}$$

beschreibt. Es erfolgt ferner diese Bewegung im Sinne BC, der drehenden Bewegung conform, wenn

$$a^2 > c^2,$$

im entgegengesetzten Sinne, wenn

$$a^2 < c^2$$

ist.

Zusatz 1.

§. 718. Der Drehungspol wird in den folgenden Fällen in Ruhe bleiben:

1) wenn $AE = 0$ ist, oder der Körper um die Hauptaxe IA sich zu drehen angefangen hat;
2) wenn $AE = 90^0$ ist, oder der Körper um eine beliebige, auf IA normale Axe seine Drehung begonnen hat;
3) wenn $a^2 = c^2$ ist, d. h. wenn des Körpers drei Hauptaxen alle einander gleich sind.

Zusatz 2.

§. 719. Ist $a^2 > c^2$, so wird der Drehungspol E um A in demselben Sinne BC, in welchem die Drehung geschieht, mit der Winkelgeschwindigkeit

$$= \frac{\varepsilon(a^2 - c^2) \cos AE}{c^2},$$

wenn aber $a^2 < c^2$, im entgegengesetzten Sinne mit der Winkelgeschwindigkeit

$$=\frac{\varepsilon(c^2-a^2)\cos AE}{c^2}$$

herumgeführt werden.

Zusatz 3.

§. 720. Der Bogen EO des kleinern Kreises, durch welchen die Drehungsaxe in der Zeit t fortschreitet, ist

$$=\frac{\varepsilon(a^2-c^2)t\sin AE\cos AE}{c^2}=\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,t\sin 2AE}{2c^2}.$$

Dieser Weg ist demnach, unter übrigens gleichen Umständen, ein maximum, wenn

$$AE=\tfrac{1}{2}AB=45^0$$

ist, d. h. wenn die Drehungsaxe von den Hauptaxen gleichweit absteht.

Zusatz 4.

§. 721. Setzt man das Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie $=1:\pi$,
so wird der Drehungspol die ganze Peripherie $EFGE$ in einer Zeit

$$=\frac{2\pi c^2}{\varepsilon(a^2-c^2)\cos AE},$$

in Secunden verstanden, durchlaufen und wird zugleich diese gleichförmige Bewegung immerwährend beibehalten.

Anmerkung.

§. 722. Hier haben wir es noch nicht mit der Bewegung des Körpers selbst zu thun, sondern betrachten ihn, was wohl zu bemerken ist, als ob er ruhete, oder einen andern ihm gleichen und ruhenden, und haben gelehrt, wie man in ihm zu jeder Zeit die Drehungsaxe IO bestimmen kann, um welche der in Bewegung begriffene Körper sich alsdann drehen wird; wir haben uns hier nicht darum bekümmert, welche Lage diese Drehungsaxe in Beziehung auf den absoluten Raum haben wird. Nun wollen wir daran gehen, diese Bewegung vollständig kennen zu lernen.

Aufgabe 73.

§. 723. Einem starren Körper, welcher zwei gleiche Hauptaxen hat, ist im Anfange eine beliebige drehende Bewegung beigebracht worden; man soll zu einer gegebenen Zeit die Lage so wohl der Hauptaxen, als auch der Drehungsaxe in Beziehung auf den absoluten Raum angeben.

Auflösung.

(Figur 94.) Die aus dem Mittelpunkte der Trägheit um

den Körper beschriebene Kugel werde durch eine unbewegliche sphärische Oberfläche $ZXVY$ eingeschlossen, und nach Verlauf der Zeit t befinde sich die bewegliche Kugel mit dem Körper in der Lage, dass die Pole der drei Hauptaxen in A, B und C liegen, und es sei das Moment der Trägheit in Bezug auf die erste Axe $IA = M.a^2$, in Bezug auf die zwei übrigen aber $= Mc^2$. Man ziehe hierauf nach einem gewissen festen Punkte Z die Bogen AZ, BZ und CZ, und setze, wie in Aufgabe 68. (§. 678.) $AZ = l$, $BZ = m$ und $CZ = n$, so dass

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

wird. Ferner seien die Winkel $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ und $XZC = \nu$, und da die drehende Bewegung, wie wir gezeigt haben, gleichförmig bleibt, so sei ihre im Sinne ABC gerichtete Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$. Da ferner die Drehungsaxe stets gleich weit von der Axe IA entfernt bleibt, so sei der Bogen $AO = \alpha$ und gleich dem Anfangsbogen AE, wobei wir annehmen, dass im Anfange der Drehungspol E auf dem Bogen AB gelegen habe. Nach dem Vorhergehenden wird demnach, wenn wir

$$\frac{\varepsilon(a^2 - c^2) t \cos\alpha}{c^2} = T$$

setzen, nach Verlauf der Zeit t der Winkel $BAO = T$; wesshalb, wenn $BO = \beta$ und $CO = \gamma$ gesetzt wird, sich

$$\cos\beta = \sin\alpha \cos T \text{ und } \cos\gamma = \sin\alpha \sin T$$

ergibt (§. 678.), indem $BAC = 90^0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen haben wir nach §. 678., weil $\Omega = \varepsilon$ ist, die folgenden Gleichungen:

$$\sin l dl = \varepsilon dt \sin\alpha [\cos n \cos T - \cos m \sin T],$$
$$-\sin l^2 d\lambda = \varepsilon dt \sin\alpha [\cos m \cos T + \cos n \sin T],$$
$$\sin m dm = \varepsilon dt \sin\alpha [\cos l \sin T - \cos n \operatorname{cotg}\alpha],$$
$$-\sin m^2 d\mu = \varepsilon dt \sin\alpha [\cos n \sin T + \cos l \operatorname{cotg}\alpha],$$
$$\sin n dn = \varepsilon dt \sin\alpha [\cos m \operatorname{cotg}\alpha - \cos l \cos T],$$
$$-\sin n^2 d\nu = \varepsilon dt \sin\alpha [\cos l \operatorname{cotg}\alpha + \cos m \cos T].$$

Um diese leichter zur Integration bringen zu können, ziehen wir den Bogen $ZO = v$ in Betracht, und da

$$\cos v = \cos\alpha \cos l + \sin\alpha [\cos m \cos T + \cos n \sin T]$$

ist, so wird durch Differentiation

$$\begin{aligned}\sin v dv = \cos\alpha \sin l dl \\ + \sin m \sin\alpha \cos T dm \\ + \sin n \sin\alpha \sin T dn \\ + \sin\alpha \cos m \sin T dT \\ - \sin\alpha \cos n \cos T dT,\end{aligned}$$

und wenn wir die Werthe von $\sin l dl$, $\sin m dm$ und $\sin n dn$ substituiren,

$$\sin v\, dv = -\sin\alpha[\cos n \cos T - \cos m \sin T] dT$$
$$= -\sin\alpha\, dT . \frac{\sin l\, dl}{\varepsilon \sin\alpha\, dt} .$$

Da nun

$$dT = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2)\, dt \cos\alpha}{c^2}$$

ist, so ensteht

$$\sin v\, dv = -\frac{(a^2 - c^2)\cos\alpha}{c^2} \sin l\, dl$$

und wenn man integrirt

$$\cos v = C - \frac{(a^2 - c^2)\cos\alpha \cos l}{c^2}$$
$$= \cos\alpha \cos l + \sin\alpha[\cos m \cos T + \cos n \sin T];$$

so dass man nun die eine Integralgleichung erhält:

$$C = \frac{a^2}{c^2} \cos\alpha \cos l + \sin\alpha \cos m \cos T + \sin\alpha \cos n \sin T.$$

Hieraus kann man aber auf eine besondere Integration schliessen, indem man den Bogen l constant und

$$\cos m = \sin l \cos T, \text{ wie auch } \cos n = \sin l \sin T$$

setzt, damit

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

und zugleich der ersten Gleichung

$$\sin l\, dl = 0$$

Genüge geschehe. Die übrigen Gleichungen werden aber ergeben

$$\sin m\, dm = \sin l \sin T\, dT = \varepsilon dt \sin\alpha[\cos l \sin T - \operatorname{cotg}\alpha \sin l \sin T]$$

und

$$\sin n\, dn = -\sin l \cos T dT = \varepsilon dt \sin\alpha[\operatorname{cotg}\alpha \sin l \cos T - \cos l \cos T].$$

Aus diesen beiden geht hervor

$$\sin l\, dT = \varepsilon dt \sin\alpha[\cos l - \operatorname{cotg}\alpha \sin l] = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2) dt \cos\alpha \sin l}{c^2},$$

oder

$$\sin\alpha \cos l - \cos\alpha \sin l = \frac{(a^2 - c^2)\cos\alpha \sin l}{c^2}$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} l = \frac{c^2 \operatorname{tg}\alpha}{a^2}.$$

Zugleich wird aber der Bogen $ZO = v$ constant, nämlich

$$\cos v = \cos\alpha \cos l + \sin\alpha \sin l,$$

also

$$ZO = v = \alpha - l \text{ und } \operatorname{tg} AZO = 0,$$

so dass die Punkte A, Z und O sich immer auf demselben grössten Kreise befinden. Endlich aber erhält man, zur Bestimmung der Lage des Bogens ZA,

$$-\sin l^2 d\lambda = \varepsilon dt \sin\alpha \sin l, \text{ also } \lambda = -\frac{\varepsilon t \sin\alpha}{\sin l}.$$

Kennt man aber den Winkel $XZA = \lambda$, so werden die übrigen $XZB = \mu$ und $XZC = \nu$ durch folgende Formeln bestimmt:

$$\sin(\mu - \lambda) = -\frac{\cos n}{\sin l \sin m}, \qquad \sin(\nu - \lambda) = \frac{\cos m}{\sin l \sin n},$$

oder

$$\cos(\mu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos m}{\sin l \sin m}, \qquad \cos(\nu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos n}{\sin l \sin n},$$

oder auch

$$\operatorname{tg}(\mu - \lambda) = \frac{\cos n}{\cos l \cos m} = \frac{\operatorname{tg} T}{\cos l} \text{ und } \operatorname{tg}(\nu - \lambda) = -\frac{\operatorname{cotg} T}{\cos l}.$$

Da aber diese Auflösung nur eine besondere ist, so wollen wir die allgemeine auf folgende Weise herleiten.

Allgemeine Auflösung.

Wir setzen $\cos m = \sin l \cos\Theta$ und $\cos n = \sin l \sin\Theta$, so dass $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$ ist und es wird alsdann

$$\sin l\, dl = \varepsilon dt \sin\alpha \sin l [\sin\Theta \cos T - \cos\Theta \sin T)$$

oder

$$dl = \varepsilon dt \sin\alpha \sin(\Theta - T).$$

Man hat aber ferner

$$\begin{aligned} \sin m\, dm &= \sin l \sin\Theta\, d\Theta - \cos l \cos\Theta\, dl \\ &= \varepsilon dt \sin\alpha [\cos l \sin T - \operatorname{cotg}\alpha \sin l \sin\Theta] \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \sin l \sin\Theta\, d\Theta = \varepsilon dt \sin\alpha [&\cos l \cos\Theta \sin(\Theta - T) \\ &+ \cos l \sin T - \operatorname{cotg}\alpha \sin l \sin\Theta]. \end{aligned}$$

Da aber

$T = \Theta - (\Theta - T)$, also $\sin T = \sin\Theta \cos(\Theta - T) - \cos\Theta \sin(\Theta - T)$, so erhält man, indem man mit $\sin\Theta$ dividirt:

$$\sin l\, d\Theta = \varepsilon dt \sin\alpha [\cos l \cos(\Theta - T) - \operatorname{cotg}\alpha \sin l].$$

Setzen wir nun $\Theta - T = \varphi$, so wird

$$d\Theta = d\varphi + \frac{\varepsilon(a^2 - c^2)\, dt \cos\alpha}{c^2}$$

und

$$\sin l\, d\varphi + \frac{\varepsilon(a^2 - c^2)\, dt \cos\alpha \sin l}{c^2} = \varepsilon dt \sin\alpha \cos l \cos\varphi - \varepsilon dt \cos\alpha \sin l$$

oder

$$\sin l\, d\varphi = \varepsilon dt \sin\alpha \cos l \cos\varphi - \frac{\varepsilon a^2 dt \cos\alpha \sin l}{c^2}.$$

Diese Gleichung hat man mit der vorhergehenden

$$dl = \varepsilon dt \sin\alpha \sin\varphi$$

zu verbinden und aufzulösen; sie enthalten zwar drei Veränderliche l, t und φ, allein die mittlere wird durch

$$\varepsilon dt = \frac{dl}{\sin\alpha \sin\varphi}$$

leicht eliminirt. Es entsteht nämlich

$$\sin l d\varphi = \frac{\cos l \cos\varphi\, dl}{\sin\varphi} - \frac{a^2 dl \cos\alpha \sin l}{c^2 \sin\alpha \sin\varphi}$$

oder

$$\frac{a^2 dl \cos\alpha \sin l}{c^2 \sin\alpha} = \cos l \cos\varphi\, dl - \sin l \sin\varphi\, d\varphi$$

und wenn man integrirt:

$$C - \sin l \cos\varphi = \frac{a^2 \cos\alpha \cos l}{c^2 \sin\alpha}.$$

Setzen wir der Kürze wegen $\frac{a^2 \cos\alpha}{c^2 \sin\alpha} = D$, so wird

$$\cos\varphi = \frac{C - D\cos l}{\sin l}$$

$$\text{und } \sin\varphi = \frac{1}{\sin l}\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos l^2},$$

und wenn man diesen Werth in die andere Gleichung substituirt, so entsteht

$$\varepsilon dt = \frac{\sin l\, dl}{\sin\alpha\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos l^2}},$$

deren Integral

$$\varepsilon t + E = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1 + D^2}} \text{arc.sin}\left[\frac{CD - (1 + D^2)\cos l}{\sqrt{1 - C^2 + D^2}}\right]$$

oder

$$\frac{CD - (1 + D^2)\cos l}{\sqrt{1 - C^2 + D^2}} = \sin\left[(\varepsilon t + E)\sin\alpha\sqrt{1 + D^2}\right]$$

ist. Mittelst dieser Gleichung wird für jede Zeit der Bogen $ZA = l$, hieraus der Winkel $\varphi = \Theta - T$ und dann $\Theta = \varphi + T$ bekannt, und ist dieser gefunden, so wird

$$\cos m = \sin l \cos\Theta \text{ und } \cos n = \sin l \sin\Theta.$$

Ferner wird

$$\cos ZO = \cos\alpha\cos l + \sin\alpha\sin l\cos\varphi = \cos\alpha\cos l + C\sin\alpha - D\sin\alpha\cos l,$$

oder

$$\cos ZO = C\sin\alpha - \frac{(a^2 - c^2)\cos\alpha\cos l}{c^2}.$$

Endlich erhalten wir zur Bestimmung des Winkels $XZA = \lambda$,

$$-d\lambda \sin l^2 = \varepsilon dt \sin\alpha \sin l \cos\varphi$$

oder

$$d\lambda = -\frac{\varepsilon dt \sin\alpha (C - D\cos l)}{\sin l^2};$$

substituirt man nun hier statt εdt den obigen Werth, so ergibt sich

$$d\lambda = -\frac{dl(C - D\cos l)}{\sin l . \sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos l^2}},$$

deren Integral

$$\lambda = E + \text{arc.sin}\left[\frac{-D + C\cos l}{\sin l}\right]$$

ist. Auf diese Weise haben wir alles allgemein bestimmt.

Zusatz 1.

§. 724. Aus der allgemeinen Auflösung geht die früher ermittelte besondere hervor, wenn man die Constante $C = \sqrt{1 + D^2}$ setzt. Alsdann muss nämlich, weil in der Gleichung

$$\varepsilon t + E = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1 + D^2}}\text{arc.sin.}\left[\frac{CD - (1 + D^2)\cos l}{\sqrt{1 - C^2 + D^2}}\right]$$

der Nenner $1 - C^2 + D^2 = 0$ ist, auch der Zähler $CD - (1 + D^2)\cos l$ verschwinden, wonach

$$\cos l = \frac{D}{\sqrt{1 + D^2}} \text{ und } \sin l = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2}},$$

also

$$\text{tg}\, l = \frac{1}{D} = \frac{c^2}{a^2}\text{tg}\,\alpha$$

wird.

Zusatz 2.

§. 725. Nimmt man aber die Constante $C = \sqrt{1 + D^2}$ an, so wird

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{1 + D^2} - D\cos l}{\sin l} = 1;$$

mithin $\varphi = 0$ und $\Theta = T$. Hieraus schliesst man, dass

$$\cos m = \sin l \cos T \text{ und } \cos n = \sin l \sin T,$$

wie auch

$$\lambda = E + \text{arc.sin}\left[\frac{-D + \cos l\sqrt{1 + D^2}}{\sin l}\right] = E + \text{arc.sin}\, 0$$

ist. Da aber $\varphi = 0$ ist, nehme man, um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, die Gleichung

$$\sin l d\lambda = -\varepsilon dt \sin\alpha,$$

woraus wie vorhin

$$\lambda = E - \frac{\varepsilon t \sin\alpha}{\sin l}$$

folgt.

Anmerkung.

§. 726. Die allgemeine Auflösung enthält demnach so viel willkührliche Constanten, dass sie, wo man auch immer den festen Punkt Z auf der unbeweglichen Kugel annehmen mag, demselben angepasst werden kann. Da aber dieser Punkt von unserm Belieben abhängt, wird man ihn immer so annehmen dürfen, dass für ihn die besondere Auflösung stattfinde, und da diese sehr einfach ist; so wird sie uns eine höchst deutliche Kenntniss der Bewegung verschaffen, während die letztere, wenn man sie auf andere feste Punkte bezieht, sehr gestört erscheinen muss. Wir wollen daher diesen festen Punkt Z nicht nach Belieben, sondern so annehmen, dass jene besondere Auflösung stattfinde.

Aufgabe 74.

§. 727. Einem starren Körper, welcher zwei gleiche Hauptaxen hat, ist im Anfange eine drehende Bewegung um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe beigebracht worden; man soll die Fortsetzung dieser Bewegung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 97.) Im Mittelpunkte einer unbeweglichen Kugel denke man sich den ebenfalls ruhenden Mittelpunkt der Trägheit des Körpers, und es befinden sich im Anfange die Hauptaxen des Körpers in A, B und C; in Bezug auf die erstere sei das Moment der Trägheit des Körpers $= Ma^2$, in Bezug auf jede der beiden andern $= Mc^2$. Nun habe aber der Körper eine drehende Bewegung um die Axe IE und im Sinne BCA empfangen, die Winkelgeschwindigkeit sei $= \varepsilon$ und der Bogen $AE = \alpha$. Um nun die Fortsetzung dieser beigebrachten Bewegung zu erforschen, bedienen wir uns einer besondern Auflösung und nehmen auf dem Bogen AB, welchen wir auf der unbeweglichen Kugel als einen festen Meridian betrachten, AZ so an, dass

$$\operatorname{tg} AZ = \frac{c^2 \operatorname{tg} \alpha}{a^2}$$

wird; ferner nehmen wir Z als denjenigen festen Punkt an, auf welchen wir hernach die Lage des Körpers beständig beziehen und setzen $AZ = l$, so dass

$$ZE = \alpha - l$$

ist. Nach Verlauf der Zeit t mögen die Pole der Hauptaxen

nach A', B' und C' gelangt sein, alsdann wird, wie wir gesehen haben, noch $ZA' = ZA = l$ sein und auf demselben Bogen $A'Z$ ein Punkt O liegen, um welchen als Pol sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$ im Sinne $B'C'A'$ drehen wird. Nach dem Vorhergehenden aber, wo wir den Winkel $XZA = \lambda$ gesetzt haben, wird, weil dessen negativer Werth hier den Winkel AZA' bezeichnet, der im Anfange $= 0$ war, nun der Winkel

$$AZA' = \frac{\varepsilon t \sin\alpha}{\sin l};$$

hieraus erkennt man zu jeder beliebigen Zeit die Lage der Hauptaxe IA'. Befinden sich nun die zwei übrigen in B' und C', so haben wir im §. 717. gefunden, dass der Winkel

$$B'A'O = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2) t \cos\alpha}{c^2}$$

sein wird. Hat man daher den Punkt A' gefunden, so nehme man den Winkel $ZA'B' = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2) t \cos\alpha}{c^2}$ und den Bogen $A'B' = 90^0$ an; alsdann wird B' der eine der zwei übrigen Hauptpole sein, woraus sich der dritte C' von selbst ergibt.

Zusatz 1.

§. 728. Die Hauptaxe IA dreht sich demnach gleichförmig um die feste, aber nicht zum Körper gehörige Linie IZ, so dass der Bogen $AZ = A'Z = l$, $\operatorname{tg} l = \frac{c^2 \operatorname{tg}\alpha}{a^2}$ ist und in der Zeit t der Winkel $AZA' = \frac{\varepsilon t \sin\alpha}{\sin l}$ beschrieben wird. Es wird demnach die Winkelbewegung im Sinne AA' oder BCA

$$= \frac{\varepsilon \sin\alpha}{\sin l}$$

sein.

Zusatz 2.

§. 729. Inzwischen wird aber der Bogen AB auf dem Körper, welcher anfangs auf AZ fiel, während ZA in der Zeit t nach ZA' fortschreitet, sich so um A drehen, dass er den Winkel

$$ZA'B' = \frac{\varepsilon(a^2 - c^2) t \cos\alpha}{c^2}$$

zurücklegt; seine Winkelbewegung ist demnach $= \frac{\varepsilon(a^2 - c^2)\cos\alpha}{c^2}$.

Zusatz 3.

§. 730. Die Bewegung des Körpers kann daher als aus einer doppelten drehenden zusammengesetzt betrachtet werden. Erstens wird sich nämlich der Körper um seinen besondern Hauptpol A mit der Winkelgeschwindigkeit $=\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\cos\alpha}{c^2}$ im Sinne CB drehen; zweitens wird aber dieser Pol A selbst sich inzwischen um den Punkt Z, welcher im absoluten Raume fest ist, mit der Winkelgeschwindigkeit $=\frac{\varepsilon\sin\alpha}{\sin l}$ drehen.

Zusatz 4.

§. 731. Setzt man den Bogen $ZA=l$, so sei die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Punkt A sich um den festen Punkt Z im Sinne AA' dreht, $=\zeta$, diese zwei Elemente betrachte man als gegeben; alsdann wird

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^2\operatorname{tg}l}{c^2} \text{ und } \varepsilon=\frac{\zeta\sin l}{\sin\alpha}.$$

Hiernach wird die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich inzwischen der Bogen AB um A im entgegengesetzten Sinne dreht,

$$=\frac{\zeta(a^2-c^2)\sin l}{c^2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\zeta(a^2-c^2)\cos l}{a^2}.$$

Anmerkung 1.

§. 732. Diese Bewegung des Körpers kann sehr bequem auf dieselbe Weise dargestellt werden, wie wir uns die drehende Bewegung der Erde denken, in so fern als die Axe oder die Pole am Himmel fortschreiten. Man betrachte nämlich den Körper als die Erde, deren einer Pol A ist, am Himmel sei aber Z der Pol der Ekliptik, von welchem der Pol der Erde beständig denselben Abstand $ZA=l$ behält und um welchen er sich mit der Winkelgeschwindigkeit $=\zeta$ im Sinne AA' dreht; diese Bewegung entspricht dem Fortrücken des Erdpoles am Himmel. Während nun aber der Bogen AB oder $A'B'$ sich um A und A' dreht, entfernt er sich vom Bogen ZA im Sinne CB mit der Winkelgeschwindigkeit

$$=\frac{\zeta(a^2-c^2)\cos l}{a^2}$$

und es wird diese Bewegung der täglichen Bewegung der Erde entsprechen. In der Wirklichkeit wird aber eine solche Bewegung von der drehenden Bewegung der Erde im höchsten

Grade abweichen, da hier der Meridian AB sich sehr langsam um den Pol A, im Vergleich mit der Winkelbewegung des Pols A um den festen Punkt Z, bewegt, während hingegen bei der Erde die tägliche Bewegung, im Vergleich mit der Bewegung ihres Poles um den Pol der Ekliptik, eine sehr geschwinde ist. Wäre demnach die Bewegung der Erdpole um die Pole der Ekliptik eine sehr geschwinde, dagegen die Drehung der Erde um ihre Pole eine sehr langsame, so würde es keineswegs angemessen sein, die Ursache dieser Bewegung in äussern Kräften zu suchen, da die Erde von selbst in Folge der Trägheit zu einer solchen Bewegung angeregt werden könnte. Da nun aber das Entgegengesetzte stattfindet, so liegt die Ursache dieser Erscheinung offenbar in äussern Kräften, durch welche die Erde angetrieben wird.

Anmerkung 2.

§. 733. (Figur 98.) Es ist hierbei sehr bemerkenswerth, dass die Bewegung des Körpers, welche in Wirklichkeit um die veränderliche Axe IO erfolgte, gleichsam von selbst auf zwei drehende Bewegungen zurückgeführt worden ist, welche aber gehörig von einander unterschieden werden müssen, indem die eine um die wahre und im Körper existirende, die andere aber um eine gleichsam ausserhalb des Körpers befindliche und auf den absoluten Raum sich beziehende Axe erfolgt. Um sich diese Bewegung klarer im Geiste vorzustellen, denken wir uns den Körper $PRQS$ von dem Stabe $APQa$ durchbohrt und zwar gehe dieser durch des erstern Mittelpunkt der Trägheit I und stelle seine besondere Hauptaxe vor. Hierauf werde aber der Stab mit seinen Endpunkten A und a so in den Ring $ZAza$ eingefügt, dass der Körper sich frei um denselben drehen kann; der Ring habe aber in den einander entgegengesetzten Punkten Z und z Zapfen, welche ausserhalb so festgehalten werden, dass jener frei um sie herumgeführt werden kann. Wird nun der Körper $PRQS$ um den Stab Aa zur drehenden Bewegung angetrieben, und zugleich der Ring $AzaZ$ um die Zapfen Z und z herumgeführt, so entsteht eine solche Bewegung, wie wir sie hier beschrieben haben, wo der Stab die wahre, im Körper befindliche und mit diesen sich bewegende, die Zapfen Z und z aber die andere, ausserhalb des Körpers befestigte Axe darstellen. Diese zwei drehenden Bewegungen stimmen aber darin überein, dass beide, wenn man die eine von ihnen

aufhebt, in eine wahre drehende Bewegung um eine feste Axe übergehen. Wenn nämlich der Ring ruhet, wird der Körper sich um den ruhenden Stab Aa oder die feste Axe PQ drehen; hebt man aber die Bewegung um den Stab Aa auf und dreht sich der Ring allein um die Zapfen Z und z, so wird im Körper eine einfache drehende Bewegung um die feste, zu den Zapfen Z und z gehörige, Axe entstehen.

Anmerkung 3.

§. 734. Man sagt, eine solche Bewegung erfolge um eine bewegliche Axe, welche Bewegung man wohl von der um eine veränderliche Axe, wie wir sie im Vorhergehenden betrachtet haben, uunterscheiden muss. Man sagt nämlich, ein Körper drehe sich um eine veränderliche Axe, wenn er sich beständig um eine andere, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gezogene, Linie dreht, die dann in diesem Augenblick auch wirklich ruhet; von einer solchen Axe ist auch alles dasjenige zu verstehen, was wir oben über die drehende Bewegung auseinander gesetzt haben. Sagen wir aber, ein Körper drehe sich um eine bewegliche Axe, eine Idee, welche erst jetzt als für uns entstanden angesehen werden muss; so wird die Axe zwar eine gewisse bestimmte und im Körper befindliche unveränderliche Linie sein, die sich aber selbst mit dem Körper bewegt, so dass diese bewegliche Axe sich niemals in Ruhe befindet. So ist die Axe der Erde, welche diesen Namen zu erzeugen pflegt, keine veränderliche, sondern eine bewegliche, da sie in der Erde eine gewisse feste Linie ist, die aber mit dem Fortgange der Zeit eine Richtung nach andern und andern Punkten des Himmels hat und welche demnach, wenn man von der jährlichen Bewegung der Erde abstrahirt, in keinem Zeitpunkte ruhet, wenn auch ihre Bewegung eine sehr langsame ist. Man kann aber zu jeder Zeit eine gewisse andere Linie in der Erde angeben, welche alsdann in Wirklichkeit ruhet, mit dem Fortgange der Zeit aber beständig sich verändert; und in Beziehung auf diese muss man behaupten, dass die Erde sich um eine veränderliche Axe drehe. Da die Bewegung der Aequinoctien aber, im Vergleich mit der täglichen Bewegung, eine sehr langsame ist, so ist der Unterschied zwischen der wahren und der zu jeder beliebigen Zeit stattfindenden veränderlichen Axe fast gar nicht wahrzunehmen. Wäre sie aber bemerkbar, so würde

sie in der Astronomie die grösste Aufmerksamkeit erfordern, da die zur Bestimmung der Polhöhe angestellten Beobachtungen, nicht die Lage der wahren Axe angeben, sondern die Lage der veränderlichen Axe zu dieser Zeit, um welche alsdann ruhende Axe die Erde sich dreht.

Aufgabe 75.

§. 735. Ein starrer Körper hat zwei gleiche Hauptaxen und es wird ihm eine beliebige Bewegung beigebracht, ferner wird er durch keine äussern Kräfte angetrieben und niemals verhindert, seine Bewegung frei ausführen zu können; man soll die Bewegung bestimmen, mit welcher er fortrücken wird.

Auflösung.

Zuerst untersuche man, ob in Folge der beigebrachten Bewegung der Mittelpunkt der Trägheit sich bewegt oder nicht. Bewegt er sich nämlich, so wird der Körper eine für sich zu betrachtende fortschreitende Bewegung haben, mit welcher er gleichförmig und in gerader Linie fortrücken wird und wir werden wenigstens im Geiste diese Bewegung aufheben dürfen, indem wir uns nämlich den Raum selbst als mit entgegengesetzter Bewegung fortrückend vorstellen. Nach Aufhebung der fortschreitenden Bewegung, deren Verhältniss eben so beschaffen ist, als wenn sich ausserdem keine andere Bewegung im Körper befände, wird man den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers als ruhend betrachten können; und wie nun auch immer der Körper um diesen angetrieben werden mag, so wird eine gewisse, durch ihn geführte gerade Linie wenigstens im ersten Anfange ruhen und es wird dies die Drehungsaxe sein. Stimmt nun diese mit irgend einer der Hauptaxen überein, d. h. fällt sie entweder auf die besondere Hauptaxe oder ist sie auf dieselbe normal, so wird auch diese Bewegung gleichförmig bleiben und die Axe ruhen oder, wenn die fortschreitende Bewegung hinzukommt, ihr selbst beständig parallel bleiben. Wenn aber jene Axe, um welche der Körper zuerst sich zu drehen anfängt, weder mit der besondern Hauptaxe übereinstimmt, noch auf sie normal ist, so wird der Körper sich um eine veränderliche Axe drehen, und auf welche Weise diese sich beständig verändert, haben wir im Vorhergehenden überflüssig gezeigt. Eine deutlichere Einsicht wird man von dieser Bewegung auch erhalten, indem man sie auf jene bewegliche Axe

reducirt, wonach der Körper sich um die besondere Hauptaxe gleichförmig dreht, während diese um gewisse feste Pole ausserhalb des Körpers ebenso mit gleichförmiger Bewegung herumgeführt wird.

Anmerkung.

§. 736. Durch diese Aufgabe wird der ganze Gegenstand, welchen wir in diesem Kapitel zu behandeln unternommen haben, erschöpft, so dass wir die freien Bewegungen starrer Körper, welche zwei gleiche Hauptaxen haben und durch keine Kräfte angetrieben werden, im allgemeinen zu bestimmen und beliebigen Fällen anzupassen vermögen. Es bleiben noch die Körper der dritten Klasse, deren Hauptmomente der Trägheit ungleich sind, übrig und hierzu ist das folgende Kapitel bestimmt.

Kapitel XIII.

Von der freien Bewegung starrer Körper, welche drei ungleiche Hauptaxen haben und durch keine Kräfte angetrieben werden.

Aufgabe 76.

§. 737. Einem beliebigen starren Körper ist anfangs eine beliebige drehende Bewegung beigebracht worden, und er wird durch keine äussern Kräfte angetrieben; man soll zu jeder Zeit die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen angeben.

Auflösung.

(Figur 94.) Da der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers I sich beständig in Ruhe befindet, so denken wir uns in demselben den Mittelpunkt einer Kugel, auf deren Oberfläche wir alles zurückführen. Es seien nun IA, IB und IC die Hauptaxen des Körpers, die Momente der Trägheit in Bezug auf dieselben respective Ma^2, Mb^2, Mc^2, welche wir als unter sich ungleich annehmen; denn wenn zwei oder selbst drei einander gleich wären, würde der Fall auf die vorhergehenden Kapitel zurückgebracht werden. Nach Verlauf der Zeit t sei nun die gerade Linie IO die Drehungsaxe, deren Lage in Bezug auf die Hauptaxen bestimmt werden muss; man setze die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper sich jetzt um die Axe IO dreht, $=\Omega$ und es erfolge die Drehung im Sinne ABC. Man setze nun die Bogen der grössten Kreise, welche gesucht werden, nämlich $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$, dieselben müssen, weil sie sich mit der Zeit verändern, als veränderlich angesehen werden; sie hängen aber so unter sich zusammen, dass

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist. Ferner ist auch die Winkelgeschwindigkeit Ω hier veränderlich, da man nach §. 670.

$$\frac{d\Omega}{\Omega^2} = \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{a^2b^2c^2}\,dt$$

hat; die Veränderlichkeit der Bogen α, β, γ wird aber nach §. 674. durch die drei folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\text{I.}\quad a^2b^2c^2\,d\alpha.\sin\alpha = \Omega(c^2-b^2)dt\cos\beta\cos\gamma\,[b^2c^2-(b^2-a^2)(c^2-a^2)\cos\alpha^2],$$

$$\text{II.}\quad a^2b^2c^2\,d\beta.\sin\beta = \Omega(a^2-c^2)\,dt\cos\gamma\cos\alpha\,[a^2c^2-(c^2-b^2)(a^2-b^2)\cos\beta^2]$$

und

$$\text{III.}\quad a^2b^2c^2\,d\gamma.\sin\gamma = \Omega(b^2-a^2)\,dt\cos\alpha\cos\beta\,[a^2b^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2].$$

Da nun aber

$$\frac{dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{a^2b^2c^2} = \frac{d\Omega}{\Omega^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

ist, so gehen diese drei Gleichungen in die folgenden über:

$$\text{I.}\quad d\alpha\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{d\Omega}{\Omega(a^2-b^2)(a^2-c^2)}[b^2c^2-(b^2-a^2)(c^2-a^2)\cos\alpha^2],$$

$$\text{II.}\quad d\beta\sin\beta\cos\beta = \frac{d\Omega}{\Omega(a^2-b^2)(b^2-c^2)}[a^2c^2-(c^2-b^2)(a^2-b^2)\cos\beta^2]$$

und

$$\text{III.}\quad d\gamma\sin\gamma\cos\gamma = -\frac{d\Omega}{\Omega(a^2-c^2)(b^2-c^2)}[a^2b^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2;$$

oder in die drei integrabeln Gleichungen:

$$\text{I.}\quad +\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{(b^2-a^2)(c^2-a^2)\,d\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{b^2c^2-(b^2-a^2)(c^2-a^2)\cos\alpha^2},$$

$$\text{II.}\quad +\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{(c^2-b^2)(a^2-b^2)\,d\beta\sin\beta\cos\beta}{a^2c^2-(c^2-b^2)(a^2-b^2)\cos\beta^2}$$

und

$$\text{III.}\quad +\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\,d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}{a^2b^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2}.$$

Die Integrale derselben sind:

$$\frac{A}{\Omega^2} = b^2c^2-(b^2-a^2)(c^2-a^2)\cos\alpha^2,$$

$$\frac{B}{\Omega^2} = a^2c^2-(c^2-b^2)(a^2-b^2)\cos\beta^2$$

und

$$\frac{C}{\Omega^2} = a^2b^2 - (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\cos\gamma^2,$$

wo zwar von den Constanten A, B und C je zwei beliebig sind, die dritte aber so bestimmt werden muss, dass man habe:

$$A(c^2 - b^2) + B(a^2 - c^2) + C(b^2 - a^2) = 0.$$

Oder es muss, wenn man

$$A = \mathfrak{A}(b^2 - a^2)(c^2 - a^2),\ B = \mathfrak{B}(c^2 - b^2)(a^2 - b^2),$$
$$C = \mathfrak{C}(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$$

setzt,

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$$

sein. Hieraus erhält man

$$\cos\alpha^2 = \frac{b^2c^2\Omega^2 - \mathfrak{A}(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)\Omega^2}$$
$$= \frac{b^2c^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} - \frac{\mathfrak{A}}{\Omega^2},$$
$$\cos\beta^2 = \frac{a^2c^2}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} - \frac{\mathfrak{B}}{\Omega^2}$$

und

$$\cos\gamma^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} - \frac{\mathfrak{C}}{\Omega^2}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\frac{b^2c^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} = \mathfrak{D},\quad \frac{a^2c^2}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)} = \mathfrak{E}$$

und

$$\frac{a^2b^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} = \mathfrak{F},$$

so dass

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} = 1,\ \text{wie}\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$$

wird; so erhalten wir

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\mathfrak{D}.\Omega^2 - \mathfrak{A}}}{\Omega},\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}.\Omega^2 - \mathfrak{B}}}{\Omega}$$

und

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{\mathfrak{F}.\Omega^2 - \mathfrak{C}}}{\Omega}.$$

Substituirt man diese Werthe in die zuerst gefundene Gleichung, so erhält man die folgende:

$$\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)dt}{a^2b^2c^2} = \frac{\Omega d\Omega}{\sqrt{(\mathfrak{D}.\Omega^2 - \mathfrak{A})(\mathfrak{E}.\Omega^2 - \mathfrak{B})(\mathfrak{F}.\Omega^2 - \mathfrak{C})}},$$

deren Integration, mit Ausnahme sehr weniger Fälle, die angenommenen Ausdrücke der Kreisbogen oder Logarithmen zurückweist.

Zusatz 1.

§. 738. Nur wenn zwei Hauptmomente des Körpers unter

sich gleich sind, wird demnach die drehende Bewegung um eine veränderliche Axe gleichförmig sein; ferner erzeugt die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit zu jeder gegebenen Zeit die grösste Schwierigkeit.

Zusatz 2.

§. 739. Hat man aber die Winkelgeschwindigkeit Ω nach Verlauf der Zeit t gefunden, so wird die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen leicht durch die, für die Bogen α, β, γ gefundenen, Formeln bestimmt.

Aufgabe 77.

§. 740. Unter denselben Voraussetzungen wie in der vorhergehenden Aufgabe, ist die Axe gegeben, um welche der Körper im Anfange mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit sich zu drehen begonnen hat; man soll zu einer gegebenen Zeit die Winkelgeschwindigkeit und die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen bestimmen.

Auflösung.

(Figur 94.) Es sei IE die Axe, um welche der Körper im Anfange sich zu drehen begonnen hat, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit $=\varepsilon$ im Sinne ABC, zur Bestimmung ihres Ortes seien die Bogen $AE=\mathfrak{a}$, $BE=\mathfrak{b}$ und $CE=\mathfrak{c}$. Da nun aber die Momente Ma^2, Mb^2 und Mc^2 einander ungleich sind, so sei Ma^2 das grösste, Mb^2 das mittlere und Mc^2 das kleinste. Man setze die hieraus zu bildenden Zahlen

$$\frac{b^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=A, \quad \frac{a^2c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}=B,$$

$$\frac{a^2b^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=C, \quad \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=D;$$

so dass

$$A-B+C=1 \text{ und } D^2=ABC$$

wird. Für die vorhergehenden Formeln wird demnach

$$\mathfrak{D}=A,\ \mathfrak{E}=-B \text{ und } \mathfrak{F}=C,$$

und es muss nach Verlauf der Zeit t die Winkelgeschwindigkeit Ω mittelst der Differentialgleichung

$$\frac{dt}{D}=\frac{\Omega d\Omega}{\sqrt{(A\Omega^2-\mathfrak{A})(-B\Omega^2-\mathfrak{B})(C\Omega^2-\mathfrak{C})}}$$

bestimmt werden, deren Integration so angestellt werden muss, dass für $t=0$, $\Omega=\varepsilon$ werde. Hierauf wird man aber, zur Be-

stimmung der Bogen $AO=\alpha$, $BO=\beta$ und $CO=\gamma$ die Gleichungen erhalten:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{A\Omega^2-\mathfrak{A}}}{\Omega},\qquad \cos\beta=\frac{\sqrt{-B\Omega^2-\mathfrak{B}}}{\Omega},$$

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{C\Omega^2-\mathfrak{C}}}{\Omega};$$

und da im Anfange $\alpha=\mathfrak{a}$, $\beta=\mathfrak{b}$ und $\gamma=\mathfrak{c}$ war, so werden die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dergestalt bestimmt, dass man $\mathfrak{A}=(A-\cos\mathfrak{a}^2)\,\varepsilon^2$, $\mathfrak{B}=-(B+\cos\mathfrak{b}^2)\,\varepsilon^2$ und $\mathfrak{C}=(C-\cos\mathfrak{c}^2)\,\varepsilon^2$ habe. Wir erhalten demnach

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{\varepsilon^2\cos\mathfrak{a}^2-A\varepsilon^2+A\Omega^2}}{\Omega},$$

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{\varepsilon^2\cos\mathfrak{b}^2+B\varepsilon^2-B\Omega^2}}{\Omega},$$

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{\varepsilon^2\cos\mathfrak{c}^2-C\varepsilon^2+C\Omega^2}}{\Omega}$$

und man hat zu integriren die Formel

$$dt=\frac{D\Omega d\Omega}{\sqrt{(\varepsilon^2\cos\mathfrak{a}^2-A\varepsilon^2+A\Omega^2)(\varepsilon^2\cos\mathfrak{b}^2+B\varepsilon^2-B\Omega^2)(\varepsilon^2\cos\mathfrak{c}^2-C\varepsilon^2+C\Omega^2)}}.$$

Um diese Formeln zusammenzuziehen, setzen wir

$$\frac{\Omega^2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}=v,\quad\text{so dass}\quad \Omega=\varepsilon\sqrt{1+v}$$

und

$$2\varepsilon dt=\frac{Dv}{\sqrt{(\cos\mathfrak{a}^2+Av)(\cos\mathfrak{b}^2-Bv)(\cos\mathfrak{c}^2+Cv)}}$$

wird, und es muss die letztere Gleichung so integrirt werden, dass für $t=0$, $v=0$ werde. Es wird alsdann

$$\cos\alpha=\frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos\mathfrak{a}^2+Av}=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{a}^2+Av}}{\sqrt{1+v}},$$

$$\cos\beta=\frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos\mathfrak{b}^2-Bv}=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{b}^2-Bv}}{\sqrt{1+v}}$$

und

$$\cos\gamma=\frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos\mathfrak{c}^2+Cv}=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{c}^2+Cv}}{\sqrt{1+v}}.$$

Wenn wir daher zu einer gegebenen Zeit t den Werth von v anzugeben vermögen, wird man so wohl die Winkelgeschwindigkeit $\Omega=\varepsilon\sqrt{1+v}$, als auch die Lage der Drehungsaxe IO in Bezug auf die Hauptaxen kennen.

Zusatz 1.

§. 741. Wenn im Anfangszustande einer der Bogen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ verschwindet, so werden die übrigen Quadranten und es fällt alsdann die erste Drehungsaxe auf eine der Hauptaxen, um welche der Körper beständig mit gleichförmiger Bewegung sich zu drehen fortfahren wird.

Zusatz 2.

§. 742. Da

$$\frac{d\Omega}{\Omega^2} = \frac{dt \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{D}$$

und D eine positive Grösse ist, so wird offenbar, so lange der Drehungspol O im Raume ABC liegt oder die Cosinusse der Bogen α, β, γ positiv sind, die Drehungsgeschwindigkeit, in so fern sie im Sinne ABC gerichtet ist, zunehmen.

Zusatz 3.

§. 743. (Figur 99.) Fällt aber, nachdem man die Quadranten verlängert hat, der Drehungspol in die Räume αABb, βBCc, γCAa, welche auch Quadranten sind, so wird die Geschwindigkeit abnehmen; in den Quadranten αAa, βBb, γCc wird sie aber eben so, wie im Hauptquadranten ABC, zunehmen.

Anmerkung 1.

§. 744. Man hat diess gehörig zu merken, damit wir, indem wir eine irrationale Formel gebrauchen, durch das zweideutige Zeichen nicht betrogen werden; wenn daher die Cosinusse der Bogen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ oder wenigstens ihr Produkt positiv ist, so nimmt im ersten Anfange die Geschwindigkeit Ω zu und es erlangt demnach v einen positiven Werth. Die zu integrirende Formel ist aber so beschaffen, dass sie weder algebraisch, noch durch Kreisbogen oder Logarithmen dargestellt werden kann, sondern wir gezwungen sind zu verlangen, dass uns ihr Integral durch Quadraturen gegeben werde. Können wir nämlich auch die Arbeit durch Bogen von Kegelschnitten ausführen, so kann man doch daraus durchaus keinen Gewinn ableiten und es scheint daher die Benutzung der Quadraturen nach gewohnter Weise vorgezogen werden zu müssen. Es bezeichne nämlich

$$\Pi x(f)$$

den Bogen eines Kegelschnittes, dessen halber Parameter $= 1$ und halbe grosse Axe $= f$ ist, welcher Bogen, vom Scheitel

an genommen, der Abscisse x entspreche. Es wird demnach der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn $f>0$, eine Hyperbel, wenn $f<0$ und eine Parabel, wenn $f=\infty$ ist. Wenn wir nun der Kürze wegen $\cos\mathfrak{a}^2$, $\cos\mathfrak{b}^2$, $\cos\mathfrak{c}^2$ respective durch a, b, c bezeichnen, so wird unsere zu integrirende Formel

$$\int\frac{dv}{\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}}$$

auf einen algebraischen Theil, einen elliptischen und einen hyperbolischen Bogen reducirt. Es wird nämlich

$$\int\frac{dv}{\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}}=\text{Const.}+\frac{2A\sqrt{(b-Bv)(c+Cv)}}{(Ac-Ca)\sqrt{a+Av}}$$
$$+\frac{2}{\sqrt{A(Bc+Cb)}}\,\Pi\,\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\left(1-\sqrt{\frac{A(b-Bv)}{C}}\right)\left(\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\right)$$
$$-\frac{2}{\sqrt{C(Ba+Ab)}}\,\Pi\,\frac{C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\left(\sqrt{\frac{(Ba+Ab)(c+Cv)}{(Bc+Cb)(a+Av)}}-1\right)\left(\frac{-C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\right).$$

Hierbei habe ich angenommen, dass $Ac > Ca$ sei; wäre diess nämlich nicht der Fall, so brauchte man nur die Buchstaben a und A mit c und C zu vertauschen. Hieraus erlangen wir aber sicher keinen Nutzen für die Verfolgung der Rechnung, noch viel weniger wird man daraus für eine gegebene Zeit t auf den Werth von v schliessen können, worin doch der Hauptpunkt der Frage besteht. Uebrigens wird der Fall, wo $Ac = Ca$ ist, hier ausgeschlossen, derselbe lässt eben aus diesem Grunde eine leichtere Entwickelung zu und es wird daher der Mühe werth sein, ihn besonders zu behandeln.

Anmerkung 2.

§. 745. Die Fälle, in denen einer der Bogen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ verschwindet, werden hier von selbst ausgeschlossen, weil alsdann beim ersten Anfange der Bewegung die Drehungsaxe auf eine der Hauptaxen fallen und daher beständig diese Lage beibehalten würde. Diess geben auch unsere Formeln an, indem, wenn

$$\mathfrak{a}=0 \text{ ist, } \cos\mathfrak{a}=1, \ \cos\mathfrak{b}=0 \text{ und } \cos\mathfrak{c}=0$$

wird, wonach die Formeln

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{-Bv}}{\sqrt{1+v}} \text{ und } \cos\gamma=\frac{\sqrt{Cv}}{\sqrt{1+v}}$$

nur bestehen können, wenn

$$v=0 \text{ und } \Omega=\varepsilon, \text{ also } \cos\beta=0 \text{ und } \cos\gamma=0$$

wird und der Drehungspol O beständig in A bleibt. Dasselbe ereignet sich, wenn

$$\mathfrak{c}=0$$

ist, wo der Drehungspol O betändig in C bleibt und $\Omega=\varepsilon$ wird. Nicht so leicht zeigt es sich aber, wenn sich der Drehungspol anfangs in B befunden hat oder

$$\mathfrak{b}=0, \text{ und } \cos\mathfrak{a}=0 \text{ und } \cos\mathfrak{c}=0$$

ist. Die Formeln ergeben nämlich dann

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{Av}}{\sqrt{1+v}}, \quad \cos\beta=\frac{\sqrt{1-Bv}}{\sqrt{1+v}} \text{ und } \cos\gamma=\frac{\sqrt{Cv}}{\sqrt{1+v}},$$

wo es scheint, als ob v einen positiven Werth haben könne. Da aber, wegen $D=\sqrt{ABC}$,

$$2\varepsilon dt=\frac{Ddv}{v\sqrt{AC(1-Bv)}}=\frac{dv\sqrt{B}}{v\sqrt{1-Bv}} \text{ ist,}$$

so ergibt diese Formel so integrirt, dass für $v=0$, $t=0$ werde,

$$\frac{2\varepsilon t}{\sqrt{B}}=\log\left(\frac{1+1}{1-1}\right)-\log\left(\frac{1+\sqrt{1-Bv}}{1-\sqrt{1-Bv}}\right).$$

Hieraus ersieht man, dass nur erst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit, d. h. niemals der Buchstab v einen Werth erlangen kann, welcher >0 ist. Es wird daher immer der Drehungspol O im Punkte B und $\Omega=\varepsilon$ bleiben.

Wenn übrigens nur ein einziger der Bogen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ein Quadrant ist, so wird im ersten Anfange, weil $d\Omega=0$ ist, die Winkelgeschwindigkeit nicht verändert; hernach aber wird sich die Sache folgendermaassen verhalten. Wenn zuerst $\mathfrak{a}=90^0$ ist, oder der Punkt E auf den Quadranten BC fällt, so wird

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{Av}}{\sqrt{1+v}},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{b}^2-Bv}}{\sqrt{1+v}}$$

und

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{\sin\mathfrak{b}^2+Cv}}{\sqrt{1+v}},$$

woraus man ersieht, dass v einen positiven Werth erhält und

$$2\varepsilon dt=\frac{Ddv}{\sqrt{Av(\cos\mathfrak{b}^2-Bv)(\sin\mathfrak{b}^2+Cv)}}$$

wird. Da nun $\cos\alpha>0$ ist, so wird $\alpha<90^0$ und der Drehungspol vom Quadranten BC ab näher nach A rücken, auch wird $\Omega>\varepsilon$ werden. Dasselbe wird sich ereignen, wenn der Drehungspol sich auf dem Quadranten AB befunden hat. Liegt derselbe aber auf dem Quadranten AC, so wird, weil $\cos\mathfrak{b}=0$ ist,

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{a}^2+Av}}{\sqrt{1+v}},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{-Bv}}{\sqrt{1+v}}$$

und

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{c}^2+Cv}}{\sqrt{1+v}},$$

und es muss nothwendig v eine negative Grösse sein, welche wenigstens vom Anfange an wächst. Es sei demnach

$$v=-u,$$

alsdann wird, weil εdt einen positiven Werth haben muss, $\sqrt{Bu}$ negativ angenommen werden müssen. Es wird also

$$\beta>90^0$$

und der Drehungspol sich mehr von B entfernen, auch wird die Geschwindigkeit

$$\Omega=\varepsilon\sqrt{1-u}$$

kleiner werden.

Anmerkung 3.

§. 746. Ich kann hier nicht eine ausgezeichnete Eigenschaft

dieser Bewegung übergehen, welche darin besteht, dass die lebendige Kraft des Körpers stets dieselbe bleibt. Es ist hier aber angemessen zu bemerken, dass, wenn der Körper sich um irgend eine Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ dreht und sein Moment der Trägheit in Bezug auf diese Axe $= M.k^2$ ist, alsdann seine lebendige Kraft $= Mk^2\Omega^2$ sein wird. Diess vorausgeschickt, da nun in unserm Falle

$$Mk^2 = M[a^2 \cos\alpha^2 + b^2 \cos\beta^2 + c^2 \cos\gamma^2], \quad (\S.\ 452.)$$

ferner aber

$$\Omega^2 \cos\alpha^2 = \varepsilon^2[\cos\mathfrak{a}^2 + Av], \quad \Omega^2 \cos\beta^2 = \varepsilon^2[\cos\mathfrak{b}^2 - Bv]$$

und

$$\Omega^2 \cos\gamma^2 = \varepsilon^2[\cos\mathfrak{c}^2 + Cv]$$

ist; so wird die lebendige Kraft des, um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ sich drehenden, Körpers

$$= M\varepsilon^2[a^2 \cos\mathfrak{a}^2 + b^2 \cos\mathfrak{b}^2 + c^2 \cos\mathfrak{c}^2 + v(Aa^2 - Bb^2 + Cc^2)].$$

Es ist aber

$$Aa^2 - Bb^2 + Cc^2 = 0 \quad (\S.\ 740.),$$

und daher die lebendige Kraft nicht von v abhängig, auch bleibt sie der zuerst beigebrachten immer gleich.

Dass aber im allgemeinen $Mk^2\Omega^2$ die lebendige Kraft des Körpers, oder das Aggregat aller seiner, in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten multiplicirten, Theilchen ausdrückt, ist einleuchtend. Man denke sich nämlich ein Element des Körpers dM, welches von der Drehungsaxe um den Zwischenraum $= r$ entfernt ist, alsdann ist seine Geschwindigkeit $= \Omega r$ und daher seine lebendige Kraft $= \Omega^2 r^2 dM$; und hieraus folgt die lebenbige Kraft des ganzen Körpers

$$= \Omega^2 \int r^2 dM = Mk^2\Omega^2,$$

weil

$$\int r^2 dM = Mk^2 \text{ ist.}$$

Aufgabe 78.

§. 747. Unter denselben Voraussetzungen wie bisher sei im Anfange die Drehungsaxe so beschaffen, dass wir haben

$$\cos\mathfrak{a}^2 : \cos\mathfrak{c}^2 = A : C = c^2(b^2 - c^2) : a^2(a^2 - b^2);$$

man soll nach Verlauf einer beliebigen Zeit t die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen bestimmen.

Auflösung.

Setzen wir $\cos\mathfrak{a}^2 = An$, so dass $\cos\mathfrak{c}^2 = Cn$ und $\cos\mathfrak{b}^2 = 1 - (A + C)n = 1 - (1 + B)n$ wird; so erhalten wir, weil $\Omega = \varepsilon\sqrt{1 + v}$ ist:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{A(n + v)}}{\sqrt{1 + v}}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{1 - n - Bn - Bv}}{\sqrt{1 + v}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{C(n+v)}}{\sqrt{1+v}}$$

und

$$2\varepsilon dt = \frac{dv\sqrt{B}}{(n+v)\sqrt{1-n-Bn-Bv}}.$$

Wir nehmen hier aber an, dass anfangs der Drehungspol E sich innerhalb des Quadranten ABC befunden habe, damit die Cosinusse so wohl der Bogen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, als auch bald nach dem Anfange die der Bogen α, β und γ positiv ausfallen. Wir erhalten daher durch Integration

$$2\varepsilon t = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{1-n}}\log\left(\frac{\sqrt{1-n}+\sqrt{1-n-Bn}}{\sqrt{1-n}-\sqrt{1-n-Bn}}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{1-n}}\log\left(\frac{\sqrt{1-n}+\sqrt{1-n-Bn-Bv}}{\sqrt{1-n}-\sqrt{1-n-Bn-Bv}}\right) \quad (\S.745.)$$

Zur Abkürzung setzen wir $\frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{B}} = \sqrt{m}$, so dass

$$2\varepsilon t\sqrt{m} = \log\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n}}\right) - \log\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n-v}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n-v}}\right)$$

wird, und wenn nun e die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus $=1$ ist und wir

$$e^{2\varepsilon t\sqrt{m}} = T$$

setzen; so erhalten wir

$$T.\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n-v}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n-v}} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\sqrt{m-n-v} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}-T(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})}{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}+T(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})}\sqrt{m},$$

und es wird

$$1-n = Bm \text{ und } \cos\mathfrak{b}^2 = B(m-n),$$

während

$$\cos\mathfrak{a}^2 = An \text{ und } \cos\mathfrak{c}^2 = Cn$$

ist. Hat man aber v gefunden, so ist zuerst

$$\Omega = \varepsilon\sqrt{1+v}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{A(n+v)}}{\sqrt{1+v}}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{B(m-n-v)}}{\sqrt{1+v}}$$

und

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{C(n+v)}}{\sqrt{1+v}}.$$

Um diese Ausdrücke mehr zusammenzuziehen, setzen wir

$$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n}}=k,$$

wonach

$$\sqrt{m-n}=\frac{k-1}{k+1}\sqrt{m} \text{ und } \sqrt{m-n-v}=\frac{k-T}{k+T}\sqrt{m},$$

hieraus ferner

$$v=m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2-m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2$$

und weil

$$n=m-m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2=\frac{4mk}{(k+1)^2}$$

ist,

$$n+v=m-m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2=\frac{4mkT}{(k+T)^2}$$

wird.

Wenn daher für die zuerst beigebrachte Bewegung

$$\cos\mathfrak{a}=\frac{2\sqrt{Amk}}{k+1}, \quad \cos\mathfrak{b}=\frac{(k-1)\sqrt{Bm}}{k+1}, \quad \cos\mathfrak{c}=\frac{2\sqrt{Cmk}}{k+1}$$

und die Winkelgeschwindigkeit im Sinne $ABC=\varepsilon$ war, so wird nach Verlauf der Zeit t,

$$e^{2\varepsilon t\sqrt{m}}=T$$

gesetzt, erstens die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega=\varepsilon\sqrt{1+m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2-m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2};$$

zweitens aber zur Bestimmung des Ortes des Drehungspoles O

$$\cos\alpha=\frac{2\varepsilon\sqrt{AmkT}}{\Omega(k+T)}, \quad \cos\beta=\frac{\varepsilon(k-T)\sqrt{Bm}}{\Omega(k+T)}$$

und

$$\cos\gamma=\frac{2\varepsilon\sqrt{CmkT}}{\Omega(k+T)};$$

drittens

$$dv=2\varepsilon dt\frac{4mkT(k-T)\sqrt{m}}{(k+T)^3}.$$

Hieraus ersieht man, dass im ersten Augenblick, wo $T=1$ ist, v von 0 an wächst, bis

$$T=k \text{ oder } 2\varepsilon t\sqrt{m}=\log k,$$

d. h. bis die Zeit $t=\dfrac{\log k}{2\varepsilon\sqrt{m}}$ verflossen ist, wo

$$\Omega=\varepsilon\sqrt{1+m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)}$$

und die Winkelgeschwindigkeit am grössten wird. Wir erhalten zugleich

$$\cos\alpha=\frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{Am},\ \cos\beta=0 \text{ oder } \beta=90^0 \text{ und } \cos\gamma=\frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{Cm},$$

so dass der Drehungspol jetzt nach dem Bogen AC gelangt ist und ihn hierauf überschreiten wird. Hernach, wenn $T>k$ wird, wird v wieder abnehmen und selbst verschwinden, wenn

$$\frac{T-k}{T+k}=\frac{k-1}{k+1}, \quad \text{d. h. } T=k^2$$

wird, also nach Verlauf der Zeit $t=\frac{\log k}{\varepsilon\sqrt{m}}$, der doppelten von jener obigen. Es wird hier zugleich

$$\Omega=\varepsilon, \quad \cos\alpha=\frac{2\sqrt{Amk}}{k+1}, \quad \cos\beta=-\frac{(k-1)\sqrt{Bm}}{k+1}$$

und

$$\cos\gamma=\frac{2\sqrt{Cmk}}{k+1}.$$

Hier wird nämlich der Drehungspol, jenseits des Quadranten AC, eine ähnliche Lage in Beziehung auf den B gegenüber liegenden Pol haben und sich demselben beständig nähern, ja selbst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit erreichen. Setzt man nämlich

$$t=\infty, \text{ wodurch auch } T=\infty$$

wird, so erhalten wir

$$v=m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2-m=-\frac{4mk}{(k+1)^2} \text{ und } \Omega=\varepsilon\sqrt{1-\frac{4mk}{(k+1)^2}};$$

hier wird daher die Winkelgeschwindigkeit am kleinsten. Alsdann haben wir aber

$$\cos\alpha=0, \quad \cos\beta=-\frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{Bm} \text{ und } \cos\gamma=0,$$

und da

$$1-n=1-\frac{4mk}{(k+1)^2}=Bm,$$

so wird offenbar

$$\cos\beta=-1.$$

Zusatz 1.

§. 748. Man muss die Zahl n so annehmen, dass An und Cn kleiner als 1 werden, unter dieser Annahme wird

$$m=\frac{1-n}{B} \text{ und } k=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m}-\sqrt{m-n}}.$$

Zwischen den Zahlen m und k tritt aber die Beziehung ein, dass

$$m = \frac{(k+1)^2}{4k + B(k+1)^2},$$

also

$$n = \frac{4k}{4k + B(k+1)^2} \text{ und } \cos\mathfrak{b} = \frac{(k-1)\sqrt{B}}{\sqrt{4k + B(k+1)^2}}$$

wird, welche letztere Grösse, weil $k > 1$, stets kleiner als 1 ist.

Zusatz 2.

§. 749. Dasselbe Verhältniss, welches zwischen den Cosinussen der Bogen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ aufgestellt worden ist, behalten die Cosinusse der Bogen α und γ bei, und während der Pol durch den Quadranten AC geht, wo $\beta = 90^0$ ist, ist

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{\Omega} \cdot \frac{(k+1)\sqrt{A}}{\sqrt{4k + B(k+1)^2}}.$$

Wir haben aber

$$\Omega = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{(k-1)^2}{4k + B(k+1)^2}} = \frac{\varepsilon(k+1)\sqrt{1+B}}{\sqrt{4k + B(k+1)^2}},$$

mithin wird

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{A}{1+B}} \text{ und } \cos\gamma = \sqrt{\frac{C}{1+B}},$$

oder

$$\cos\alpha = \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}} \text{ und } \cos\gamma = \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}}.$$

Zusatz 3.

§. 750. Während aber die Drehungsaxe O durch den Quadranten AC geht, ist in Bezug auf sie das Moment der Trägheit

$$= M[a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2] = \frac{Ma^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2},$$

welches kleiner ist als $M.b^2$ und auch kleiner, als es im Anfange war, wo es nämlich, weil $Aa^2 + Cc^2 = Bb^2$ ist,

$$= Mb^2.Bm$$

war. Es war demnach

$$= Mb^2 \cdot \frac{B(k+1)^2}{4k + B(k+1)^2} = \frac{Ma^2b^2c^2(k+1)^2}{4kb^2(a^2 - b^2 + c^2) + a^2c^2(k-1)^2}.$$

Beispiel.

§. 751. (Figur 100.) Es habe der Körper sich um den Pol E, welcher auf dem Quadranten AC liegt, im Sinne ABC zu drehen angefangen und mit der Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$, so dass

$$\cos AE = \sqrt{\frac{A}{B+1}} \text{ und } \cos CE = \sqrt{\frac{C}{B+1}}$$

war, indem wir der Kürze wegen

$$A = \frac{b^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad B = \frac{a^2c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$$

und

$$C = \frac{a^2b^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

gesetzt haben, woraus

$$A + C = B + 1$$

folgt. Auf diesen Fall wird die allgemeine Auflösung zurückgeführt, indem man

$$k = 1 \text{ und } m = \frac{1}{B+1}$$

annimmt. Mit dem Fortrücken der Zeit wird nun der Drehungspol von E nach dem andern Quadranten AbC übergehen, wenn b der B entgegengesetzte Pol ist und nimmt man nach Verlauf einer Zeit $= t$

$$T = e^{2\varepsilon t : \sqrt{1+B}}$$

an, so wird sich der Drehungspol in einem solchen Punkte O befinden, dass wir haben:

$$\cos AO = \frac{2\sqrt{AT}}{\sqrt{B(1+T)^2+4T}}, \quad \cos CO = \frac{2\sqrt{CT}}{\sqrt{B(1+T)^2+4T}}$$

und die Winkelgeschwindigkeit daselbst

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{B(1+T)^2+4T}}{(1+T)\sqrt{1+B}}.$$

Da nun

$$\sin AO = \frac{\sqrt{B(T-1)^2+4CT}}{\sqrt{B(1+T)^2+4T}} \text{ und } \sin CO = \frac{\sqrt{B(T-1)^2+4AT}}{\sqrt{B(1+T)^2+4T}}$$

ist, so wird

$$\cos ACO = \frac{2\sqrt{AT}}{\sqrt{B(T-1)^2+4AT}},$$

$$\sin ACO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{\sqrt{B(T-1)^2+4AT}},$$

$$\cos CAO = \frac{2\sqrt{CT}}{\sqrt{B(T-1)^2+4CT}}$$

und

$$\sin CAO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{\sqrt{B(T-1)^2+4CT}}.$$

Ferner ist

$$\cos bO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{\sqrt{B(1+T)^2+4T}} \text{ und } \sin bO = \frac{2\sqrt{(B+1)T}}{\sqrt{B(1+T)^2+4T}};$$

es wird also

$$\cos AbO = \sqrt{\frac{A}{B+1}} \text{ und } \cos CbO = \sqrt{\frac{C}{B+1}}.$$

Da hiernach $AbO = AE$ und $CbO = CE$ ist, so bewegt sich der Drehungspol O von E nach b über einen grössten Kreis und durchläuft in einer gegebenen Zeit t den Bogen EO, so dass

$$\operatorname{tg} EO = \frac{(T-1)\sqrt{B}}{2\sqrt{(B+1)T}} = \operatorname{tg}\theta$$

wird, indem wir diesen zurückgelegten Bogen $EO = \theta$ setzen. Es wird daher

$$\sqrt{T} = \frac{\sin\theta\sqrt{B+1} + \sqrt{B+\sin\theta^2}}{\cos\theta\sqrt{B}},$$

wonach die Zeit, in welcher der Bogen $EO = \theta$ zurückgelegt wird, d. h.

$$t = \frac{\sqrt{B+1}}{\varepsilon}\log\left(\frac{\sin\theta\sqrt{B+1}+\sqrt{B+\sin\theta^2}}{\cos\theta\sqrt{B}}\right)$$

wird. Ferner findet man die Winkelgeschwindigkeit, während der Drehungspol sich in O befindet, oder

$$\Omega = \frac{\varepsilon\sqrt{B}}{\sqrt{B+\sin\theta^2}}.$$

Das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe IE ist

$$= \frac{M(Aa^2 + Cc^2)}{B+1} = \frac{B}{B+1} Mb^2,$$

und die lebendige Kraft, welche beständig dieselbe bleibt,

$$= \frac{B\varepsilon^2}{B+1} Mb^2.$$

Anmerkung.

§. 752. War anfangs die drehende Bewegung im entgegengesetzten Sinne gerichtet, so wird der Drehungspol sich von E längs eines grössten Kreises dem Pole B nähern; im Quadranten AbC stellen nämlich die gleichnamigen Pole den entgegengesetzten Sinn dar, als im Quadranten ABC. Uebrigens ist es in diesem Falle bemerkenswerth, dass der Drehungspol O sich einem der beiden Pole B oder b beständig nähert und selbst ziemlich schnell dahin gelangt; so bald nämlich die Zahl

$$T = e^{2\varepsilon t:\sqrt{1+B}}$$

mittelmässig gross wird, was meistentheils bald zu geschehen pflegt, wird die Abweichung der Drehungsaxe IO von der Axe Bb nicht mehr merklich sein. Dieser grösste Kreis BEb, welcher den Quadranten AC so in E schneidet, dass

$$\sin AE = \sqrt{\frac{C}{B+1}} \text{ und } \cos AE = \sqrt{\frac{A}{B+1}}$$

oder

$$\operatorname{tg} AE = \sqrt{\frac{C}{A}} = \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{c\sqrt{b^2-c^2}}$$

wird, hat also die ausgezeichnete Eigenschaft, dass, wenn die Drehungsaxe sich einmal auf ihm befunden hat, sie auf ihm verharren und der Drehungspol sich entweder b oder B nähern wird, je nachdem die Drehung im Sinne ABC oder im entgegengesetzten Sinne erfolgt. Es könnte hiernach scheinen, als ob die Drehungsaxe, welche es auch immer anfangs gewesen sein mag, stets endlich auf eine der Hauptaxen fallen würde, wenn nicht im vorhergehenden Kapitel sich die Sache anders ergeben hätte. Ich werde aber jetzt selbst beweisen, dass dieser behandelte Fall der einzige ist, in welchem die Drehungsaxe endlich mit einer der Hauptaxen und zwar der mittlern zusammenfällt, dass aber dies in allen übrigen Fällen, nicht einmal nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit, geschehen wird. Hierzu ist es aber nöthig, dass wir die obige Integralformel sorgfältiger untersuchen und die Werthe, welche sie zu jeder Zeit annimmt, auf eine gewisse Weise anzugeben vermögen. Da nun bei dieser Arbeit andere analytische Hülfsmittel kaum mehr Licht versprechen, als ihre Reduction auf die Bogen von Kegelschnitten, so wollen wir zu einem gewissen mechanischen Hülfsmittel, nämlich der Bewegung eines Pendels durch einen Kreis unsre Zuflucht nehmen. Da nämlich die Bestimmung der letztern Bewegung in einer ähnlichen Integralformel enthalten ist, diese aber nicht widersteht, so können wir auf eine gewisse Weise abschätzen, wie jene Bewegung künftig ausfallen wird.

Aufgabe 79.

§. 753. Es ist die Bestimmung der Bewegung, mit welcher ein schwerer Körper auf der Peripherie eines Kreises entweder schwingend oder umlaufend fortrückt, gegeben; man soll zu jeder Zeit die Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen bestimmen, wenn nämlich diese Lage nebst der Winkelgeschwindigkeit im Anfange gegeben ist.

Auflösung.

(Figur 101.) Da die zu bestimmende Zeit

$$t=\int\frac{dv\sqrt{ABC}}{2\varepsilon\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}}$$

ist, indem man inzwischen a, b, c statt $\cos \mathfrak{a}^2$, $\cos \mathfrak{b}^2$, $\cos \mathfrak{c}^2$ setzt, so betrachten wir im allgemeinen die Bewegung eines schweren Körpers auf einem Kreise, dessen Radius $ca=cb=r$ und wobei die Geschwindigkeit eben so gross ist, als wenn der Körper aus dem Punkte g herabgestiegen wäre. Man setze demnach $cg=p$, nehme hierauf den Anfang der Bewegung in e an, so dass $c\partial=q$ ist, wobei nämlich die gerade Linie gab vertikal und ∂e horizontal ist. Nach Verlauf der Zeit t gelange der schwere Körper von e nach z, so dass, wenn man die horizontale Linie vz zieht,

$$\partial v=kv$$

ist, indem in unserer Formel v eine absolute Zahl darstellt. Es sei unterdessen $cv=z$, alsdann wird das Element des Bogens in z

$$=\frac{rdz}{\sqrt{r^2-z^2}},$$

und weil die Geschwindigkeit in demselben Punkte$=2\sqrt{g(p+z)}$ ist, so wird das Element der Zeit

$$dt=\frac{rdz}{2\sqrt{g(p+z)(r-z)(r+z)}}.$$

Da nun

$$z=kv-q$$

ist, so erhalten wir

$$dt=\frac{krdv}{2\sqrt{g(p-q+kv)(r+q-kv)(r-q+kv)}};$$

unsere zu construirende Formel, auf ähnliche Weise ausgedrückt, ist aber

$$dt=\frac{kdv\sqrt{k}}{2\varepsilon\sqrt{\left(\frac{ak}{A}+kv\right)\left(\frac{bk}{B}-kv\right)\left(\frac{ck}{C}+kv\right)}},$$

auf welche jene reducirt wird, indem man zuerst

$$\frac{kr}{2\sqrt{g}}=\frac{k\sqrt{k}}{2\varepsilon}$$

setzt, woraus

$$r=\frac{\sqrt{gk}}{\varepsilon}$$

folgt. Zweitens ergiebt die Gleichstellung der mittlern Factoren in den Nennern

$$r+q=\frac{bk}{B}, \text{ also } q=\frac{bk}{B}-\frac{\sqrt{gk}}{\varepsilon}.$$

Ferner kann man die ersten und dritten Factoren vermischt einander gleich stellen, und setzt man den ersten dem ersten und den dritten dem dritten gleich, so erhalten wir

$$p-q=\frac{ak}{A} \text{ oder } p=\frac{ak}{A}+\frac{bk}{B}-\frac{\sqrt{gk}}{\varepsilon}$$

und

$$r-q=\frac{ck}{C} \text{ oder } \frac{2\sqrt{gk}}{\varepsilon}-\frac{bk}{B}=\frac{ck}{C}$$

oder auch

$$\frac{2\sqrt{g}}{\varepsilon}=\frac{(Bc+Cb)\sqrt{k}}{BC};$$

mithin

$$\sqrt{k}=\frac{2BC\sqrt{g}}{\varepsilon(Bc+Cb)} \text{ und } k=\frac{4gB^2C^2}{\varepsilon^2(Bc+Cb)^2}.$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$r=\frac{2BCg}{\varepsilon^2(Bc+Cb)}, \quad q=\frac{2BC(Cb-Bc)g}{\varepsilon^2(Bc+Cb)^2}$$

und

$$p=\frac{4agB^2C^2+2ABC(Cb-Bc)g}{A\varepsilon^2(Bc+Cb)^2}.$$

Für eine gegebene Zeit t wird demnach die Zahl v auf folgende Weise bestimmt. Auf der Peripherie eines Kreises, welcher mit dem Radius

$$ca=cb=\frac{2BCg}{\varepsilon^2(B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2)}$$

beschrieben worden ist, bewege sich ein schwerer Körper so, als ob er aus dem Punkte g herabgestiegen wäre, wobei

$$cg=\frac{4B^2C^2\cos\mathfrak{a}^2+2ABC(C\cos\mathfrak{b}^2-B\cos\mathfrak{c}^2)}{A\varepsilon^2(B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2)^2}g,$$

oder

$$bg=p+r=\frac{4BC^2(A\cos\mathfrak{b}^2+B\cos\mathfrak{a}^2)}{A\varepsilon^2(B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2)^2}g$$

und

$$ag=p-r=\frac{4B^2C(C\cos\mathfrak{a}^2-A\cos\mathfrak{c}^2)}{A\varepsilon^2(B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2)^2}g.$$

Hierauf nehme man auf diesem Kreise den Abstand

$$c\partial=\frac{2BC[C\cos\mathfrak{b}^2-B\cos\mathfrak{c}^2]}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2]^2}g,$$

oder

$$b\partial=r+q=\frac{4BC^2g\cos\mathfrak{b}^2}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2]^2}$$

und den Punkt e als Anfangspunkt der Bewegung an, von wo der Körper durch z fortschreitet und schneide den Bogen ez

ab, welcher in der vorausgesetzten Zeit t durchlaufen ist. Die diesem Bogen entsprechende Höhe ∂v sei $=u$, und nimmt man dieselbe als bekannt an, so wird

$$v=\frac{u}{k}=\frac{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2]^2u}{4B^2C^2g}.$$

Hieraus erhält man für die obigen Aufgaben die Winkelgeschwindigkeit $\Omega=\varepsilon\sqrt{1+v}$

und zur Bestimmung der gegenwärtigen Lage des Drehungspoles

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{a}^2+Av}}{\sqrt{1+v}},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{b}^2-Bv}}{\sqrt{1+v}}$$

und

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{c}^2+Cv}}{\sqrt{1+v}}.$$

Zusatz 1.

§. 754. Da $\partial g=cg-c\partial=p-q=\frac{ak}{A}$ ist, so wird die Höhe des Punktes g über der Horizontalen ∂e, nämlich

$$\partial g=\frac{4B^2C^2g\cos\mathfrak{a}^2}{A\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2]^2},$$

und da dieser Werth nothwendig positiv ist, so wird der Körper bei seiner Bewegung den Punkt e erreichen können.

Zusatz 2.

§. 755. Ferner ist aber auch die Höhe $b\partial$ nicht nur positiv, sondern auch kleiner als der Durchmesser des Kreises

$$ab=\frac{4BCg}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2]}.$$

Es wird nämlich

$$a\partial=ab-b\partial=\frac{4B^2Cg\cos\mathfrak{c}^2}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2]^2},$$

wesshalb der Punkt e, von welchem wir den Anfang der Bewegung rechnen, sich immer auf der Peripherie des Kreises befindet.

Zusatz 3.

§. 756. Da also der schwere Körper sicher von e bis zum untersten Punkte b herabsteigt, wo

$$u=b\partial=\frac{4BC^2g\cos\mathfrak{b}^2}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2+C\cos\mathfrak{b}^2]^2}$$

wird, welches sein grösster positiver Werth ist; so wird um diese Zeit

$$v = \frac{\cos \mathfrak{b}^2}{B} \text{ und } \Omega = \frac{\varepsilon\sqrt{B + \cos \mathfrak{b}^2}}{\sqrt{B}},$$

welche Winkelgeschwindigkeit ihren grössten Werth hat. Es wird alsdann ferner

$$\cos\beta = 0,$$

d. h. es geht der Drehungspol durch den Quadranten AC.

Anmerkung.

§. 757. Da also der Drehungspol, wo er sich auch immer im Anfange befunden haben mag, stets nach einiger Zeit durch den Quadranten AC geht, wo die Winkelgeschwindigkeit am grössten ist; so wird man diese Zeit als den Anfang der Bewegung betrachten dürfen, indem wir von ihr auch zu den vorhergehenden Zeiten zurückzuschreiten vermögen. Es habe sich demnach anfangs der Drehungspol in dem Punkte E des Quadranten befunden, so dass

$$AE = \mathfrak{a} \text{ und } CE = \mathfrak{c} = 90^\circ - \mathfrak{a}$$

und die Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$ im Sinne ABC ist. Nachher wird daher der Drehungspol nach dem Octanten AbC der Kugel übergehen, während er sich vorher im Octanten ABC befunden hat; hierbei hat man zu bemerken, dass das Entgegengesetzte geschehen wird, wenn die drehende Bewegung im entgegengesetzten Sinne gerichtet ist. Hier treten uns aber zwei zu betrachtende Fälle entgegen, je nachdem bei der kreisförmigen Bewegung der Punkt g entweder oberhalb des Kreises fällt, und der schwere Körper ganze Umläufe ausführt, oder innerhalb des Kreises und der schwere Körper Schwingungen macht. Das Erste geschieht, wenn

$$C\cos\mathfrak{a}^2 > A\cos\mathfrak{c}^2,$$

das Letztere aber, wenn

$$C\cos\mathfrak{a}^2 < A\cos\mathfrak{c}^2. \qquad (§. 753.)$$

(Figur 102.) Um diese Fälle von einander zu unterscheiden, nehme man auf dem Quadranten AC den Punkt D so an, dass

$$C\cos AD^2 = A\cos CD^2 \text{ oder } \operatorname{tg} AD = \sqrt{\frac{C}{A}}$$

wird; alsdann wird, wenn der Drehungspol durch diesen Punkt D geht, derselbe sich durch den Quadranten Db dem Hauptpole b nähern und ihn nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit erreichen, welchen Fall wir schon oben entwickelt haben (§. 747.). Geht aber der Drehungspol zwischen den Endpunkten

A und D durch den Quadranten AC, so erhält man den ersten Fall, in welchem

$$C \cos \mathfrak{a}^2 > A \cos \mathfrak{c}^2;$$

geht er hingegen zwischen den Endpunkten C und D hindurch, so erhält man den zweiten Fall, in welchem

$$C \cos \mathfrak{a}^2 < A \cos \mathfrak{c}^2$$

ist. Diese zwei Fälle wollen wir demnach getrennt behandeln.

Fall I.

§. 758. (Figur 102.) Es gehe der Drehungspol durch den Punkt E des Quadranten AC und es drehe sich der Körper um ihn mit der Winkelgeschwindigkeit ε im Sinne ABC, so dass

$$C \cos AE^2 > A \cos CE^2 \text{ oder } \operatorname{tg} AE < \sqrt{\frac{C}{A}}$$

ist; von hier schreite er im Verlauf der Zeit t bis O fort, welchen Ort wir bestimmen müssen. Da also

$$AE = \mathfrak{a},\ CE = \mathfrak{c} = 90^0 - \mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{b} = 90^0$$

ist, so beschreibe man einen Kreis $az\,ez'$, dessen Radius

$$ca = ce = \frac{2Cg}{\varepsilon^2 \cos \mathfrak{c}^2}$$

ist, und nehme auf dem oberhalb verlängerten vertikalen Durchmesser ea die Länge

$$ag = \frac{4C(C \cos \mathfrak{a}^2 - A \cos \mathfrak{c}^2)}{A\varepsilon^2 \cos \mathfrak{c}^4}\, g$$

an; alsdann wird der aus diesem Punkte g herabgestiegene Körper auf dem Kreise im Sinne $az'ez$ herumlaufen, und es möge im Anfange, während der Drehungspol sich in E befand, der schwere Körper durch den untersten Punkt e gehen. Nun steige der Körper im Verlaufe der Zeit t bis z hinauf und es sei $ev = u$, alsdann wird

$$v = -\frac{\varepsilon^2 u \cos \mathfrak{c}^4}{4C^2 g}.$$

Der Drehungspol befinde sich aber jetzt in O, und es wird die Winkelgeschwindigkeit um ihn sein

$$\Omega = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 u \cos \mathfrak{c}^4}{4C^2 g}};$$

ferner erhalten wir zur Bestimmung des Ortes des Punktes O

$$\cos AO = \frac{\varepsilon}{\Omega} \sqrt{\cos \mathfrak{a}^2 - \frac{A\varepsilon^2 u \cos \mathfrak{c}^4}{4C^2 g}},$$

$$\cos bO = \frac{\varepsilon}{\Omega} \cdot \frac{\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2 \sqrt{Bu}}{2C\sqrt{g}}$$

und

$$\cos CO = \frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos \mathfrak{c}^2 - \frac{\varepsilon^2 u \cos \mathfrak{c}^4}{4Cg}}.$$

Setzen wir nun aber die Zeit des halben Umlaufs, in welcher der schwere Körper von e bis zum höchsten Punkte a aufsteigt, $=\tau$, so wird, weil die Bewegung des schweren Körpers auf dem Kreise mit der Bewegung des Drehungspoles isochron und

$$u = \frac{4\,Cg}{\varepsilon^2 \cos \mathfrak{c}^2}$$

ist,

$$v = -\frac{\cos \mathfrak{c}^2}{C},$$

und es wird nach Verlauf der Zeit τ die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \varepsilon\sqrt{1 - \frac{\cos \mathfrak{c}^2}{C}}$$

die kleinste von allen sein. Der Drehungspol wird sich aber in P befinden, so dass

$$\cos AP = \frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos \mathfrak{a}^2 - \frac{A \cos \mathfrak{c}^2}{C}},\ \cos bP = \frac{\varepsilon \cos \mathfrak{c}}{\Omega}\sqrt{\frac{B}{C}}$$

und

$$\cos CP = 0$$

wird. Es wird sich demnach der Pol P auf dem Quadranten Ab befinden, so dass

$$\cos bP = \sin AP = \frac{\cos \mathfrak{c}\sqrt{B}}{\sqrt{C - \cos \mathfrak{c}^2}} = \frac{\sin \mathfrak{a}\sqrt{B}}{\sqrt{C - \sin \mathfrak{a}^2}}$$

und

$$\cos AP = \frac{\sqrt{C\cos \mathfrak{a}^2 - A \sin \mathfrak{a}^2}}{\sqrt{C - \sin \mathfrak{a}^2}}$$

wird. Nach Verlauf der Zeit 2τ, wo $u=0$ ist, wird die Winkelgeschwindigkeit Ω wie im Anfange $= \varepsilon$, und der Drehungspol sich jetzt auf der Verlängerung des Quadranten CA in e befinden, so dass

$$Ae = AE$$

ist. Nach Verlauf der Zeit 3τ wird der Drehungspol nach p gelangen, so dass

$$Ap = AP$$

ist, und nach Verlauf der Zeit 4τ wird er nach E zurückkehren. Der Drehungspol wird demnach um den Hauptpol eine gleichsam elliptische Bahn beschreiben und die Zeit Eines Umlaufes derjenigen gleich sein, in welcher der schwere Körper auf dem Kreise zwei ganze Umläufe vollendet. Hier ist es an-

gemessen zu bemerken, dass, wenn der Punkt E in D fiele, der Punkt P in b fallen würde, weil

$$\cos AP = 0$$

wäre; alsdann würde aber $ag = 0$ und die Zeit τ eines halben Umlaufes auf dem Kreise unendlich gross werden, wie wir schon oben gehabt haben. Ferner wird aber

$$AP = AE,$$

wenn $B = \infty$ und $C = \infty$ oder $b^2 = c^2$ ist, d. h. wenn die Momente der Trägheit in Bezug auf die Axen IB und IC einander gleich sind, welches der im vorhergehenden Kapitel behandelte Fall ist.

Fall II.

§. 759. (Figur 103). Es gehe der Drehungspol durch den auf dem Quadranten AC liegenden Punkt E, um welchen dann der Körper sich mit der Winkelgeschwindigkeit ε im Sinne ABC dreht, so dass

$$C \cos AE^2 < A \cos CE^2 \text{ oder } tg AE > \sqrt{\frac{C}{A}}$$

wird und von hier schreite er in der Zeit t nach O fort. Da nun $\mathfrak{b} = 90^0$, $AE = \mathfrak{a}$ und $CE = 90^0 - \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ ist, so beschreibe man den Kreis $azez'$ mit dem Durchmesser

$$ae = \frac{4\,Cg}{\varepsilon^2 \cos \mathfrak{c}^2}$$

und nehme

$$ag = \frac{4\,C[A \cos \mathfrak{c}^2 - C \cos \mathfrak{a}^2]}{A\,\varepsilon^2 \cos \mathfrak{c}^4} g, \text{ also } eg = \frac{4\,C^2 \cos \mathfrak{a}^2}{A\,\varepsilon^2 \cos \mathfrak{c}^4} g$$

an. Hat man nun die horizontale Linie fgf' gezogen, so führe der schwere Körper seine Schwingungen auf dem Bogen fef' aus und man nehme den Zeitpunkt, in welchem der aus f' niedersteigende schwere Körper durch den untersten Punkt e geht, als Anfang der Zeit an und es gelange jener im Verlauf der Zeit t nach z. Setzt man nun die Höhe $ev = u$, so wird

$$v = -\frac{\varepsilon^2 u \cos \mathfrak{c}^4}{4\,C^2 g}$$

und zugleich um diese Zeit die Winkelgeschwindigkeit um den Pol O, oder

$$\Omega = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 u \cos \mathfrak{c}^4}{4\,C^2 g}},$$

und wie vorher

$$\cos AO = \frac{\varepsilon}{\Omega} \sqrt{\cos \mathfrak{a}^2 - \frac{A\,\varepsilon^2 u \cos \mathfrak{c}^4}{4\,C^2 g}}, \quad \cos bO = \frac{\varepsilon}{\Omega} \cdot \frac{\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2 \sqrt{Bu}}{2\,C \sqrt{g}}$$

und
$$\cos CO = \frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos\mathfrak{c}^2 - \frac{\varepsilon^2 u \cos\mathfrak{c}^4}{4\,Cg}}.$$

Es sei τ die Zeit einer halben Schwingung oder des Aufsteigens durch ef, alsdann wird nach Verlauf dieser Zeit, weil
$$u = eg = \frac{4\,C^2\cos\mathfrak{a}^2}{A\,\varepsilon^2\cos\mathfrak{c}^4}g \text{ und } v = -\frac{\cos\mathfrak{a}^2}{A}$$
ist, die Winkelgeschwindigkeit
$$\Omega = \varepsilon\sqrt{1 - \frac{\cos\mathfrak{a}^2}{A}}$$
sein und der Drehungspol in P liegen, so dass
$$\cos AP = \frac{\varepsilon}{\Omega}\cdot 0,\quad \cos bP = \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{a}\sqrt{B}}{\Omega\sqrt{A}} = \frac{\cos\mathfrak{a}\sqrt{B}}{\sqrt{A - \cos\mathfrak{a}^2}}$$
$$\text{und}\quad \cos CP = \frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos\mathfrak{c}^2 - \frac{C\cos\mathfrak{a}^2}{A}} = \frac{\sqrt{A\cos\mathfrak{c}^2 - C\cos\mathfrak{a}^2}}{\sqrt{A - \cos\mathfrak{a}^2}}$$
ist. Hieraus ergibt sich, dass der Drehungspol sich auf dem Quadranten Cb befindet, wobei
$$\sin CP = \frac{\cos\mathfrak{a}\sqrt{B}}{\sqrt{A - \cos\mathfrak{a}^2}} = \frac{\sin\mathfrak{c}\sqrt{B}}{\sqrt{A - \sin\mathfrak{c}^2}}$$
ist. Nun nehme man auf der Verlängerung des Quadranten AC
$$Ce = CE \text{ und } Cp = CP$$
an, alsdann wird die elliptische Bahn $EPepE$ der Weg des Drehungspoles sein, und zwar werden die einzelnen Quadranten EP, Pe, ep, pE etc. in der Zeit τ zurückgelegt werden.

Wäre $a^2 = b^2$, so würde $A = \infty$, $B = \infty$ und $CP = CE$ sein, und der Drehungspol einen kleinern Kreis um die Hauptaxe IC, welche eine besondere sein würde, beschreiben; diess ist der im vorhergehenden Kapitel behandelte Fall. Fiele aber E in D, so würde, weil $ag = 0$ wäre, $\tau = \infty$ sein, welches der Fall der vorhergehenden Aufgabe ist.

Anmerkung.

§. 760. Da wir nun deutlich genug einsehen, auf welche Weise die Veränderung im Drehungspole vor sich geht, indem derselbe entweder um den Hauptpol A oder um C in einer gleichsam elliptischen Bahn herumgeführt wird, je nachdem
$$\operatorname{tg} AE < \sqrt{\frac{C}{A}} \text{ oder } \operatorname{tg} AE > \sqrt{\frac{C}{A}}$$
ist, und da wir selbst, wenn man die Integration der Differentialformel zugibt, seinen Ort zu jeder Zeit angeben können; so

wollen wir nun sehen, ob man auch seinen absoluten Ort zu jeder Zeit und zugleich die Lage der Hauptaxen bestimmen kann. Im früheren Kapitel haben wir diese Arbeit nicht ohne Erfolg ausgeführt. Hier werden wir aber auf weit grössere Schwierigkeiten stossen, welche wir nicht einmal, wenn die Quadraturen zugegeben sind, werden überwinden können; da die Sache auf solche Differentialgleichungen zurückgeführt wird, welche wir nicht nur nicht integriren, sondern nicht einmal bis zur Trennung der Veränderlichen bringen können.

Aufgabe 80.

§. 761. (Figur 94). Wenn einem beliebigen starren Körper im Anfange eine drehende Bewegung um irgend eine, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe beigebracht worden ist; so soll man zu einer gegebenen Zeit sowohl die Lage der Hauptaxen, als auch die Lage der Drehungsaxe in Beziehung auf den absoluten Raum bestimmen.

Auflösung.

Auf der unbeweglichen, um den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers beschriebenen Kugel habe nach Verlauf der Zeit $=t$ der Körper die Lage, dass die Pole der Hauptaxen sich in A, B, C befinden, und in Bezug auf sie die Momente der Trägheit Ma^2, Mb^2, Mc^2 sind. Indem man nun den Punkt Z und den Kreis XZ als fest annimmt, setze man die Bogen

$$ZA=l,\ ZB=m,\ ZC=n$$

und die Winkel $XZA=\lambda$, $XZB=\mu$, $XZC=\nu$; hierbei bleiben, zur Bestimmung des Drehungspoles O, die Bogen $AO=\alpha$, $OB=\beta$, $OC=\gamma$, welche nebst der Winkelgeschwindigkeit Ω jetzt durch die Zeit t gegeben werden. Dies vorausgesetzt, haben wir nach Aufgabe 68. (§. 678.):

$$dl.\sin l=\Omega dt[\cos\beta\cos n-\cos\gamma\cos m],$$
$$d\lambda.\sin l^2=-\Omega dt[\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n],$$
$$dm.\sin m=\Omega dt[\cos\gamma\cos l-\cos\alpha\cos n],$$
$$d\mu.\sin m^2=-\Omega dt[\cos\gamma\cos n+\cos\alpha\cos l],$$
$$dn.\sin n=\Omega dt[\cos\alpha\cos m-\cos\beta\cos l],$$
$$d\nu.\sin n^2=-\Omega dt[\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m].$$

Die Hauptarbeit besteht aber hier in der Bestimmung der Bogen l, m, n, und da diese so beschaffen sind, dass

$$\cos l^2+\cos m^2+\cos n^2=1$$

ist, so setze man

$$\cos m=\sin l\cos\varphi,\ \text{wonach}\ \cos n=\sin l\ \sin\varphi$$

wird und wir folgende drei Gleichungen erhalten:

I. $dl = \Omega dt[\cos\beta\sin\varphi - \cos\gamma\cos\varphi]$,

II. $-dt.\cos l\cos\varphi + d\varphi.\sin l\sin\varphi = \Omega dt[\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\sin l\sin\varphi]$

und

III. $-dl.\cos l\sin\varphi - d\varphi.\sin l\cos\varphi = \Omega dt[\cos\alpha\sin l\cos\varphi - \cos\beta\cos l]$.

Bildet man $\text{II.}\times\sin\varphi - \text{III.}\times\cos\varphi$, so erhält man

$d\varphi.\sin l = \Omega dt[\cos\gamma\cos l\sin\varphi - \cos\alpha\sin l + \cos\beta\cos l\cos\varphi]$,

aus welcher, in Verbindung mit der ersten, man die zwei Bogen l und φ suchen muss. Setzt man aber $\Omega = \varepsilon\sqrt{1+v}$ und für den Anfangszustand, der Kürze wegen $\cos\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{A}$, $\cos\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{B}$ und $\cos\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{C}$, so dass

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1$$

ist; so wird, wie wir gesehen haben:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}+Av}{1+v}},\quad \cos\beta = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}-Bv}{1+v}},\quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}+Cv}{1+v}}$$

und

$$2\varepsilon dt = \frac{dv\sqrt{ABC}}{\sqrt{(\mathfrak{A}+Av)(\mathfrak{B}-Bv)(\mathfrak{C}+Cv)}}.$$

Hier ist

$$A = \frac{b^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad B = \frac{a^2c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)},$$

$$C = \frac{a^2b^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \text{ und } D = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

gesetzt und $a^2 > b^2$ und $b^2 > c^2$ angenommen worden.

Setzen wir nun $\cos\beta = \sin\alpha\cos T$ und $\cos\gamma = \sin\alpha\sin T$, so wird

$$v = \frac{\mathfrak{B}-(1-\mathfrak{A})\cos T^2}{B+(1-A)\cos T^2} \text{ und } \cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}};$$

demnach

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B}{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}},$$

$$\Omega = \varepsilon\sqrt{\frac{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}{B+(1-A)\cos T^2}}$$

und hierauf

$$\varepsilon dt = \frac{DdT}{\sqrt{(B\sin T^2+C\cos T^2)[(\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2]}}.$$

Unsere aufzulösenden Gleichungen werden nun

$$dl = \Omega dt\sin\alpha\sin(\varphi - T)$$

$$d\varphi.\sin l = \Omega dt\sin\alpha\cos l\cos(\varphi - T) - \Omega dt\cos\alpha\sin l,$$

wobei wir haben

$$\mathfrak{Q}dt\sin\alpha = \frac{DdT\sqrt{\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B}}{(B\sin T^2+C\cos T^2)\sqrt{(\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2}}$$

und

$$\mathfrak{Q}dt\cos\alpha = \frac{DdT}{B\sin T^2+C\cos T^2}.$$

Setzen wir nun $\varphi - T = \omega$, so dass wir erhalten

$$dl = \mathfrak{Q}dt\sin\alpha\sin\omega$$

und

$$d\omega\sin l + dT\sin l = \mathfrak{Q}dt\sin\alpha\cos l\cos\omega - \mathfrak{Q}dt\cos\alpha\sin l;$$

so geht die letztere über in:

$$d\omega\sin l\sin\omega - dl\cos l\cos\omega + dT\sin l\sin\omega + \frac{DdT\sin l\sin\omega}{B\sin T^2+C\cos T^2} = 0,$$

während die erstere ist

$$dl = \frac{DdT\sin\omega\sqrt{\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B}}{(B\sin T^2+C\cos T^2)\sqrt{(\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2}}.$$

Nun setzen wir der Kürze wegen

$$1+\frac{D}{B\sin T^2+C\cos T^2} = P$$

und

$$\frac{D\sqrt{\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B}}{(B\sin T^2+C\cos T^2)\sqrt{(\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2}} = Q,$$

alsdann nehmen, weil P und Q bekannte Functionen von T sind, unsere aufzulösenden Gleichungen diese einfachern Formen an:

$$d(\sin l\cos\omega) = PdT\sin l\sin\omega$$

und

$$dl = Qdt\sin\omega.$$

Endlich setzen wir
$\sin l\cos\omega = \xi$ und $\cos l = \eta$, wonach $\sin l\sin\omega = \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}$ wird, und es werden alsdann unsere Gleichungen

$$\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} = PdT$$

und

$$\frac{d\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} = -QdT.$$

Hier muss ich aber gestehen, dass ich die Auflösung nicht weiter verfolgen und daher die Aufgabe nicht zu Ende führen kann.

Ergänzung zu §. 761*).

Setzt man $x = \Omega \cos\alpha$, $y = \Omega \cos\beta$ und $z = \Omega \cos\gamma$, so werden die aufzulösenden Gleichungen die 9 folgenden:

$$\text{I.} \quad dx = \frac{b^2 - c^2}{a^2} yzdt;$$

$$\text{II.} \quad dy = \frac{c^2 - a^2}{b^2} xzdt;$$

$$\text{III.} \quad dz = \frac{a^2 - b^2}{c^2} xydt;$$

$$\text{IV.} \quad dl.\sin l = dt(y\cos n - z\cos m);$$

$$\text{V.} \quad dm.\sin m = dt(z\cos l - x\cos n);$$

$$\text{VI.} \quad dn.\sin n = dt(x\cos m - y\cos l);$$

$$\text{VII.} \quad d\lambda.\sin l^2 = -dt[y\cos m + z\cos n];$$

$$\text{VIII.} \quad d\mu.\sin m^2 = -dt[z\cos n + x\cos l];$$

$$\text{IX.} \quad d\nu.\sin n^2 = -dt[x\cos l + y\cos m],$$

wodurch die 9 Grössen x, y, z, l, m, n, λ, μ, und ν bestimmt werden müssen. Die Auflösung der drei ersten ist zwar in den vorhergehenden Aufgaben schon gelehrt worden, zum Gebrauch der folgenden setze man aber

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} = A, \quad \frac{c^2 - a^2}{b^2} = B, \quad \frac{a^2 - b^2}{c^2} = C \text{ und } xyzdt = du;$$

alsdann wird

$$xdx = Adu, \quad ydy = Bdu, \quad zdz = Cdu.$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$x^2 = 2Au + \mathfrak{A}, \quad y^2 = 2Bu + \mathfrak{B}, \quad z^2 = 2Cu + \mathfrak{C}$$

und daher

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}}.$$

Die Grössen A, B, C verhalten sich so zu einander, dass man hat

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 0 \text{ und } Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0;$$

es wird daher

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \mathfrak{A}.a^2 + \mathfrak{B}.b^2 + \mathfrak{C}.c^2 = \text{Constans}.$$

Setzt man nun an die Stelle von x, y, z die angenommenen Werthe, so wird

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \Omega^2[a^2\cos\alpha^2 + b^2\cos\beta^2 + c^2\cos\gamma^2] = \text{Constans}.$$

---

*) Diese Ergänzung war in der ersten Ausgabe dieses Werkes am Ende hinzugefügt, hier folgt sie, wie in der neuern Ausgabe, gleich hinter §. 761.

Wird die Masse des Körpers $= M$ gesetzt, so bezeichnet der Ausdruck

$$M[a^2 \cos\alpha^2 + b^2 \cos\beta^2 + c^2 \cos\gamma^2]$$

das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf die Axe *IO* (§. 746.), um welche der Körper sich jetzt dreht, und wenn man demnach dieses Moment Mr^2 nennt; so wird $Mr^2\Omega^2$ die lebendige Kraft des Körpers, welche daher constant bleibt.

Da ferner $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ist, so wird

$$\Omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2(A+B+C)u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$$

und es werden, da die Grössen x, y, z durch u bekannt sind, auch die Winkel α, β, γ durch u bestimmt.

Bisher konnten wir innerhalb der vorhergehenden Aufgaben verweilen, nun wollen wir aber sehen, auf welche Weise eine eigenthümliche Auflösung der Aufgabe 80. ausgeführt werden kann. Offenbar liegt die ganze Schwierigkeit in den Gleichungen IV., V. und VI., und um diese zu überwinden, setzen wir

$$\cos l = px, \quad \cos m = qy \text{ und } \cos n = rz;$$

so dass sich die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\text{IV.} \quad 0 = pdx + xdp + dt(ryz - qyz), \text{ wobei } yzdt = \frac{dx}{A};$$

$$\text{V.} \quad 0 = qdy + ydq + dt(pxz - rxz), \text{ wobei } xzdt = \frac{dy}{B};$$

$$\text{VI.} \quad 0 = rdz + zdr + dt(qxy - pxy), \text{ wobei } xydt = \frac{dz}{C}.$$

Dieselben lassen sich ferner umformen in:

$$\text{IV.} \quad 0 = pdx + xdp + \frac{(r-q)dx}{A},$$

oder

$$\frac{dx}{x} = \frac{Adp}{q - r - Ap} = \frac{Adu}{2Au + \mathfrak{A}},$$

$$\text{V.} \quad 0 = qdy + ydq + \frac{(p-r)dy}{B},$$

oder

$$\frac{dy}{y} = \frac{Bdq}{r - p - Bq} = \frac{Bdu}{2Bu + \mathfrak{B}};$$

$$\text{VI.} \quad 0 = rdz + zdr + \frac{(q-p)dz}{C},$$

oder

$$\frac{dz}{z} = \frac{Cdr}{p - q - Cr} = \frac{Cdu}{2Cu + \mathfrak{C}}.$$

Nun multiplicire man IV. mit a^2x, V. mit b^2y und VI. mit c^2z, so dass man erhält:

$$\text{IV.}\quad a^2pxdx + a^2x^2dp = a^2\frac{(q-r)xdx}{A} = a^2(q-r)du;$$

$$\text{V.}\quad b^2qydy + b^2y^2dq = b^2\frac{(r-p)ydy}{B} = b^2(r-p)du;$$

$$\text{VI.}\quad c^2rzdz + c^2z^2\,dr = c^2\frac{(p-q)zdz}{C} = c^2(p-q)du.$$

Aus den drei ersten Gleichungen erhält man aber

$$\text{I.}\quad a^2pxdx = Aa^2pdu = (b^2-c^2)pdu;$$
$$\text{II.}\quad b^2qydy = Bb^2qdu = (c^2-a^2)qdu;$$
$$\text{III.}\quad c^2rzdz = Cc^2rdu = (a^2-b^2)rdu.$$

Vereinigt man diese 6 Gleichungen in Eine Summe, so heben die letztern Theile sich wechselseitig auf und es ergibt sich die integrabele Gleichung:

$$2a^2pxdx + a^2x^2dp + 2b^2qydy + b^2y^2dq + 2c^2rzdz + c^2z^2dr = 0,$$

deren Integral ist

$$a^2px^2 + b^2qy^2 + c^2rz^2 = \text{Constans}.$$

In derselben beruht die grösste Kraft zur Ausführung der verlangten Integration, wenn man sie mit der Gleichung

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

verbindet, welche in

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = 1$$

übergeht. Da nämlich x, y, z durch u gegeben sind, so wird man vermöge dieser zwei Gleichungen p und q durch u und r bestimmen können und wenn man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{dr}{p-q-Cr} = \frac{du}{2Cu + \mathfrak{C}}$$

substituirt; so gelangt man zu einer Gleichung, welche nur die zwei Veränderlichen u und r enthält, mittelst deren man auch r durch u wird bestimmen können.

Zuerst aber bemerke ich, dass unsern Gleichungen hinreichend Genüge geleistet werden kann, indem man den Buchstaben p, q und r constante Werthe beilegt. Zu diesem Ende muss nothwendig

$$q-r-Ap=0,\quad r-p-Bq=0 \text{ und } p-q-Cr=0$$

sein, und hieraus erhält man

$$p=n(1-B),\quad q=n(1+A) \text{ und } r=n(1+AB),$$

wenn nur

$$A+B+C+ABC=0$$

ist, was aber in der That geschieht. Es wird daher, indem man statt A, B, C die angenommenen Werthe substituirt,

$$p=\frac{n(a^2+b^2-c^2)}{b^2},\quad q=\frac{n(a^2+b^2-c^2)}{a^2} \text{ und } r=\frac{nc^2(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2}.$$

Nimmt man demnach $n=\frac{ma^2b^2}{a^2+b^2-c^2}$ an, so erhält man

$$p=ma^2,\quad q=mb^2 \text{ und } r=mc^2,$$

wo der Coefficient m so beschaffen sein muss, dass

$$p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2=1$$

oder

$$m^2[a^4(2Au+\mathfrak{A})+b^4(2Bu+\mathfrak{B})+c^4(2Cu+\mathfrak{C})]=1$$

werde. Da nun $Aa^4+Bb^4+Cc^4=0$ ist, so wird

$$m=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4}}$$

und zugleich

$$a^2px^2+b^2qy^2+c^2rz^2=m[a^4(2Au+\mathfrak{A})+b^4(2Bu+\mathfrak{B})+c^4(2Cu+\mathfrak{C})]$$
$$=\sqrt{\mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4}=\text{Constans}.$$

Ich bemerke aber, dass man diese Integration nicht für eine unvollständige zu halten hat, weil der Scheitel Z der unbeweglichen Kugel nach Belieben angenommen werden kann. Man wird denselben daher immer so annehmen dürfen, dass die Grössen p, q und r constant werden. Setzt man demnach der Kürze wegen

$$\sqrt{\mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4}=n,$$

so wird alles folgendermaassen durch u bestimmt:

$$x=\sqrt{2Au+\mathfrak{A}},\quad p=\frac{a^2}{n},\quad \cos l=\frac{a^2}{n}\sqrt{2Au+\mathfrak{A}},$$

$$y=\sqrt{2Bu+\mathfrak{B}},\quad q=\frac{b^2}{n},\quad \cos m=\frac{b^2}{n}\sqrt{2Bu+\mathfrak{B}},$$

$$z=\sqrt{2Cu+\mathfrak{C}},\quad r=\frac{c^2}{n},\quad \cos n=\frac{c^2}{n}\sqrt{2Cu+\mathfrak{C}}.$$

Zur Bestimmung der drei letzten Gleichungen erhält man, weil

$$dt=\frac{du}{xyz},$$

$$d\lambda=\frac{-ndt[\mathfrak{B}b^2+\mathfrak{C}c^2-2Aa^2u]}{\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4-2Aa^4u}$$

und es reicht hin, einen der drei Winkel λ, μ, ν zu bestimmen, da die zwei übrigen durch denselben von selbst bekannt werden.

Anmerkung. 1.

§. 762. In dem Falle des vorhergehenden Kapitels, wo

$$B=\infty \text{ und } C=\infty, \text{ also } \frac{B}{C}=1$$

war, konnte man, weil $A-B+C=1$ ist, die gefundenen Gleichungen so auflösen, dass die Grössen P und Q constant wurden, nämlich

$$P=1+\frac{D}{B}=1+\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}, \text{ weil } b^2=c^2 \text{ ist,}$$

und

$$Q=\frac{D\sqrt{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}}{B\sqrt{\mathfrak{A}}}=\frac{b^2\sqrt{1-\mathfrak{A}}}{(a^2-b^2)\sqrt{\mathfrak{A}}}.$$

Es wurde also

$$dx:dy=a^2:-b^2\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}}=P:-Q,$$

mithin

$$dx=-\frac{Pdy}{Q} \text{ und } x=\text{Constans}-\frac{Py}{Q}.$$

Hier aber kann das Verhältniss $P:Q$ nicht constant werden, und es ist daher nicht klar, auf welche Weise man den gefundenen Gleichungen Genüge leisten könne, selbst nicht auf besondere Weise. Da also die Bewegung solcher Körper für die Rechnung nicht zu behandeln ist, soweit nämlich bis jetzt die Grenzen der Analysis eröffnet sind; so sind wir gezwungen, diesen Gegenstand zu verlassen, indem auch die Anstellung vergeblicher Versuche kein Licht zu verbreiten vermag. Was aber das mechanische Verhältniss betrifft, so müssen wir die freie Bewegung starrer Körper, während diese durch keine Kräfte angetrieben werden, als vollkommen bestimmt ansehen; da es nur der Mangelhaftigkeit der Analysis zugeschrieben werden muss, dass wir die Auflösung nicht zu Ende zu bringen vermögen. Diese Schwierigkeit tritt aber nur bei Körpern ein, deren drei Hauptmomente der Trägheit unter sich ungleich sind, und da man diese Körper für höchst unregelmässig halten muss, so ist diese Unbequemlichkeit, wenn wir zur Praxis übergehen, von geringem Belange, weil sehr selten die Bewegung solcher Körper gesucht zu werden pflegt. Sind aber zwei Hauptmomente unter sich gleich, so ist die Erforschung der Bewegung mit so glücklichem Erfolge beendet, dass man nichts mehr verlangen kann.

Anmerkung. 2.

§. 763. Nachdem wir also dasjenige auseinandergesetzt haben, was die freie Bewegung starrer Körper, wenn äussere Kräfte entfernt sind, anbetrifft, so verlangt die Reihenfolge, dass wir nun die Wirkung der Kräfte erforschen, wozu auch oben

der Grund gelegt worden ist, indem wir die augenblicklichen Wirkungen beliebiger Kräfte bestimmt haben. Während wir aber vorhaben, die fortwährenden Bewegungen zu behandeln, müssen wir solche Fälle auswählen, in denen die antreibenden Kräfte nicht durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers gehen, wie die Astronomie sie darbietet. Weil aber die Entwickelung derselben eine grössere Kenntniss der Astronomie erfordert, als wir hier voraussetzen dürfen, so bleiben wir auf der Erde, und betrachten solche Bewegungen, in denen eine drehende Bewegung um eine veränderliche Axe vorkommt, indem nämlich die regelmässigern Bewegungen keine Schwierigkeit haben.

Hier bietet sich nun zuerst die Theorie der Kreisel dar, deren Erklärung wegen der beständigen Veränderung der Drehungsaxe noch in das grösste Dunkel gehüllt ist. Um diesen Gegenstand im Anfange von den grössern Schwierigkeiten zu befreien, werde ich annehmen, dass die Axe des Kreisels auf einer sehr polirten horizontalen Ebene fortschreite, damit keine Reibung stattfinden kann; hierauf aber werde ich voraussetzen, dass die Axe unten in einer Spitze ende, womit sie auf der horizontalen Ebene fortschreitet. Ich werde zwei Arten von Kreiseln aufstellen, je nachdem nämlich alle, oder nur zwei seiner Hauptmomente der Trägheit unter sich gleich sind; wenn nämlich alle ungleich wären, so würde diese Voraussetzung nicht nur der Figur der Kreisel widerstreben, sondern auch alle Kräfte der Rechnung überragen.

Kapitel XIV.

Von der Bewegung der Kreisel, in denen alle Momente der Trägheit unter sich gleich sind, auf einer horizontalen Ebene.

Erklärung 13.

§. 764. Ein Kreisel ist ein starrer Körper, welcher von einem unten zugespitzten Stiele im Mittelpunkte der Trägheit durchbohrt ist, welcher Stiel zugleich mit einer Hauptaxe des Körpers zusammenfällt.

Erläuterung.

§. 765. (Figur 104.) Ein solcher Kreisel ist *ABbD*, worin *AD* den Stiel und *Bb* den durchbohrten Körper darstellt, so dass man beide vereint als einen einzigen starren Körper anzusehen hat und wobei der Stiel nicht nur durch den Mittelpunkt der Trägheit *I* des ganzen Körpers geht, sondern auch eine Hauptaxe des letztern darstellt. Ich nehme an, dass der Stiel unten in *D* in eine sehr scharfe Spitze ausgehe, mit welcher der Kreisel beständig auf der horizontalen Ebene steht und auf ihr fortgeht; ich werde nämlich hier nur solche Bewegungen verfolgen, bei welchen der Kreisel mit der Spitze *D* allein die horizontale Ebene berührt. Sobald nämlich der Kreisel niederfällt, ist seine Bewegung zu einer andern Art zu zählen, welche ihm nicht mehr eigenthümlich ist und welche ich hier nicht berühre. Ich nehme demnach an, dass die von der Spitze *D* durch den Mittelpunkt der Trägheit *I* gezogene Linie zugleich eine Hauptaxe des ganzen, aus dem Stiele und der Masse *Bb* bestehenden, Körpers sei, welche Linie allein in die Rechnung eintreten wird, indem ausserdem nichts daran liegt, auf

welche Weise der Stiel mit der übrigen Masse verbunden ist. Ferner nehme ich aber in diesem Kapitel den ganzen Körper des Kreisels so beschaffen an, dass die Momente der Trägheit in Beziehung auf seine Hauptaxen unter sich gleich sind, und dass daher alle durch seinen Mittelpunkt der Trägheit I gezogenen geraden Linien für Hauptaxen gehalten werden können. Endlich nehme ich hier die Ebene als sehr glatt an, damit die Spitze D auf ihr ohne alle Reibung fortschreiten könne, wobei ich auch vom Widerstande der Luft und allen Hindernissen der Bewegung abstrahire und nur die Schwerkraft im Auge habe.

Anmerkung.

§. 766. In Betreff eines solchen Kreisels bemerke ich zuerst, dass, wenn er mit seiner Spitze D so auf der horizontalen Ebene steht, dass die gerade Linie DI vertikal ist, derselbe in dieser Lage beständig verharren kann, obgleich er niederfallen wird, wenn er auch nur um ein weniges sich neigt. Ferner wird er auch, weil keine Reibung vorhanden ist, in dieser vertikalen Lage gleichförmig und geradlinig fortschreiten können, obgleich die Erfahrung der Reibung wegen niemals damit übereinstimmen wird. Da die gerade Linie DIA eine Hauptaxe ist, so wird, wenn diese vertikal steht und der Körper um sie eine beliebige drehende Bewegung angenommen hat, derselbe die letztere beständig gleichförmig beibehalten, wobei die gerade Linie DIA unbewegt und daher vertikal bleibt. Die Schwere wird hierbei durchaus nichts in der Bewegung stören, sondern nur dazu verwandt werden, den Kreisel in der Spitze D gegen die horizontale Ebene zu drücken. Sobald aber diese Axe AD sich auch nur um ein ganz geringes zu neigen angefangen hat, wird die Schwere die Bewegung stören und den Kreisel umzuwerfen streben. Um diese Wirkung zu erforschen, wird man zugleich auf die Kraft, durch welche die Spitze gegen die horizontale Ebene gedrückt wird, Rücksicht nehmen müssen. Obgleich aber diese Kraft unbekannt und von allen Umständen der Bewegung abhängig ist, so weiss man doch, dass ihre Richtung stets vertikal ist und aus ihr dieselbe Wirkung entspringt, als ob der Kreisel im Punkte D vertikal und aufwärts durch eine gleiche Kraft getrieben würde. Die Kraft selbst muss aber so gross sein, dass die Spitze D beständig auf der horizontalen Ebene angebracht bleibe, aus welcher Bedingung man ihre Grösse zu jeder beliebigen Zeit abzuleiten hat. Betrach-

tet man aber diese Kraft als bekannt, so wird man die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit I des Kreisels, ohne Rücksichtnahme auf seine drehende Bewegung, bestimmen können; diess wollen wir in der folgenden Aufgabe ausführen.

Aufgabe 81.

§. 767. Wenn zu einer jeden Zeit der Druck der Spitze gegen die horizontale Ebene bekannt ist, so soll man die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit eines Kreisels bestimmen.

Auflösung.

(Figur 105). Nach Verlauf einer gegebenen Zeit $= t$ habe die Axe des Kreisels AID eine beliebige geneigte Lage, welche mit der horizontalen Linie DF den Winkel $FDA = \theta$ bildet und wobei die Spitze gegen die horizontale Ebene mit einer Kraft $= P$ drückt; dies ist dasselbe, als ob die Spitze aufwärts nach der vertikalen Richtung durch eine Kraft $DP = P$ angetrieben würde. Die Masse, oder was dasselbe ist, das Gewicht des ganzen Kreisels sei $= M$. Da wir nur die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit I suchen, ohne dass wir irgend eine Rücksicht auf die drehende Bewegung nehmen, so wird seine Bewegung eben so afficirt werden, als ob die ganze Masse M des Kreisels im Punkte I vereinigt und an demselben die antreibenden Kräfte, jede nach ihrer Richtung, angebracht wären. Wir haben daher in I die Masse $= M$, angetrieben durch zwei Kräfte, die eine, nämlich die Schwere $= M$, vertikal längs IX abwärts, die andere Kraft $= P$, vertikal aufwärts längs IQ, woraus die abwärts längs IX antreibende Kraft $= M - P$ entspringt. Da also keine horizontal forttreibende Kraft da ist, wenn nicht etwa der Mittelpunkt der Trägheit I eine horizontale Bewegung empfangen hat, so wird derselbe sich nur entweder auf- oder abwärts auf der vertikalen geraden Linie XQ bewegen. Hat er aber im Anfange eine horizontale Bewegung empfangen, so wird er diese ausserdem unversehrt beibehalten. Setzen wir demnach den Abstand $DI = f$, so wird die Höhe $IX = f \sin\theta$ und daher die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit $I = \frac{f \cos\theta\, d\theta}{dt}$, und nimmt man das Zeitelement dt constant an; so erhalten wir wegen der abwärts antreibenden Kraft $= M - P$:

$$\frac{f(\cos\theta\, dd\theta - \sin\theta\, d\theta^2)}{dt} = -\frac{2g(M-P)\,dt}{M},$$

oder $$\cos\theta\, dd\theta - \sin\theta\, d\theta^2 = \frac{2g}{f}\left(\frac{P}{M} - 1\right)dt^2.$$

Ist demnach die Kraft P zu jeder Zeit t gegeben, so wird durch Integration

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{2g\,dt}{f}\int dt\left(\frac{P}{M} - 1\right) \text{ und } \sin\theta = \frac{2g}{f}\int dt \int dt\left(\frac{P}{M} - 1\right).$$

Hierbei drückt $f\sin\theta = 2g\int dt\int dt\left(\frac{P}{M} - 1\right)$ die Höhe IX des Mittelpunktes der Trägheit und $\frac{f\cos\theta\, d\theta}{dt} = 2g\int dt\left(\frac{P}{M} - 1\right)$ seine aufwärts gerichtete Geschwindigkeit aus.

Zusatz 1.

§. 768. Wenn wir daher zu jeder Zeit den Druck P, womit die Axe des Kreisels sich auf die horizontale Ebene stützt, kennten, so würden wir die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit oder seinen Ort zu jeder Zeit angeben, und daraus die Neigung der Axe gegen den Horizont oder den Winkel $FDA = \theta$ bestimmen können.

Zusatz 2.

§. 769. Wird dem Kreisel im Anfange nur eine drehende Bewegung beigebracht, so dass der Mittelpunkt der Trägheit I wenigstens während eines Zeitmomentes in Ruhe bleibt, so mag hierauf die Drehungsaxe sich beliebig verändern und so die Axe des Kreisels AD sich neigen; der Mittelpunkt der Trägheit wird aber keine andere Bewegung, als eine vertikal auf- oder abwärts gerichtete, annehmen.

Zusatz 3.

§. 770. Ist aber dem Kreisel zugleich eine fortschreitende Bewegung beigebracht worden, so wird er die hieraus entspringende horizontale Bewegung, beständig gleichförmig und geradlinig fortschreitend, beibehalten und mit dieser die frühere vertikale Bewegung verbunden sein.

Anmerkung.

§. 771. Die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit im Kreisel ist demnach ohne Schwierigkeit zu bestimmen, wenn man nur den Druck der Spitze D gegen die horizontale Ebene zu jeder Zeit angeben kann. Aber gerade hierin liegt die grösste Schwierigkeit, da aus diesem Drucke das, nach Umdrehung um eine beliebige Axe strebende, Moment entspringt, in Folge

dessen, wenn der Kreisel sich nicht schon um diese Axe dreht, die Drehungsaxe sich verändern und wonach auch die Neigung des Kreisels eine Aenderung erleiden wird. Die letzte Aenderung muss aber mit derjenigen übereinstimmen, welche der angenommene Druck P hervorbringt und durch diese Uebereinstimmung muss eben der Druck bestimmt werden; in dieser Erforschung beruht die Stärke der ganzen Theorie der Kreisel. Damit wir nun dieses Ziel leichter erreichen, betrachten wir den Kreisel in einer beliebigen geneigten Lage und als um eine, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gezogene, Axe sich drehend und wollen untersuchen, eine wie grosse Aenderung so wohl die Drehungsaxe, als auch die Winkelgeschwindigkeit durch den Druck, mit welchem die Spitze auf der horizontalen Ebene auf steht, erleiden wird.

Aufgabe 82.

§. 772. Während der Kreisel sich beliebig dreht, ist der Druck gegeben, mit welchem die Spitze sich auf die horizontale Ebene stützt; man soll die augenblickliche, sowohl in der Drehungsaxe als auch in der Winkelgeschwindigkeit hervorgebrachte, Veränderung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 105). Es sei die Neigung des Kreisels gegen den Horizont oder der Winkel $FDA = \theta$ und der Druck in $D = P$, durch welchen der Punkt D aufwärts getrieben wird. Weil in dem Körper alle Momente der Trägheit gleich sind, wird diese Kraft $DP = P$ dahin streben, den Kreisel, wenn er sich in Ruhe befände, um eine durch den Mitteipunkt der Trägheit I gehende und auf die Ebene ADF normale Axe zu drehen. Setzt man daher das Moment der Trägheit des Kreisels um alle Axen $= Ma^2$ und den Abstand $ID = f$, so wird das Moment der Kraft DP in Beziehung auf jene Axe $= Pf \cos\theta$; und es wird daher im Zeittheilchen dt der Kreisel bei der Drehung um jene Axe den elementaren Winkel

$$d\omega = \frac{Pfg\,dt^2 \cos\theta}{Ma^2}$$

beschreiben. (Figur 106). Da nun der Kreisel schon eine drehende Bewegung hat, so kann man wieder alles auf eine, um den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers beschriebene, sphärische Oberfläche beziehen, auf welcher der Punkt Z gleichsam das Zenith und A der obere Endpunkt der Axe des Kreisels

ist; es wird alsdann der Bogen $ZA = 90^\circ - \theta$, welchen wir oben (§. 761.) $= l$ gesetzt haben. Nun halte aber der Kreisel eine solche Lage ein, dass die beiden andern in ihm festen und auf AID normalen Axen sich in B und C befinden. Obgleich nämlich hier auch das Verhältniss aller Axen gleich ist, so ist es doch angemessen, sich im Körper drei auf einander normale Axen zu denken, um durch sie die Lage des Kreisels zu bestimmen. Es werden demnach AB, AC und BC Quadranten und man setze den Winkel $ZAB = \zeta$, es drehe sich aber der Kreisel alsdann schon um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ im Sinne ABC, und man setze die Bogen $AO = \alpha$, $BO = \beta$ und $CO = \gamma$, so dass man hat

$$\cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \text{ und } \sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

Nun ziehe man den Quadranten AS normal auf den Bogen ZA, alsdann wird IS jene auf die vertikale Ebene, in welcher die Axe AID des Kreisels sich befindet, normale Axe sein, um welche durch die Kraft P eine Umdrehung durch den Winkel

$$d\omega = \frac{Pfg\,dt^2\cos\theta}{Ma^2}$$

in dem ABC entgegengesetzten Sinne BAC erzeugt wird. Käme diese Aenderung nicht hinzu, so würde der Kreisel fortfahren, sich um die Axe IO, welche die Eigenschaft einer Hauptaxe besitzt, zu drehen. In Folge jener Kraft wird er nun anfangen, sich um den jenseits O auf dem Bogen OS liegenden Pol o zu drehen. Wenn man daher diesen letztern Punkt gegen S hin bezeichnet, den Bogen $OS = s$ und nach Aufgabe 62. (§. 650.), $q = \frac{Pfg\cos\theta}{Ma^2}$ setzt, so erhält man hieraus den kleinen Bogen

$$Oo = -\frac{2q\,dt\sin s}{\Omega} = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta\sin s}{Ma^2\,\Omega}.$$

Ferner wird die Winkelgeschwindigkeit Ω das Decrement

$$= 2q\,dt\cos s = \frac{2Pfg\,dt\cos\theta\cos s}{Ma^2}$$

empfangen, so dass man hat

$$d\Omega = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta\cos s}{Ma^2}.$$

Um aber die Aenderung des Drehungspoles O in o bequem auszudrücken, setzen wir, da der Winkel $ZAB = \zeta$, also $BAS = 90^\circ - \zeta$ ist, den Winkel $BAO = \eta$, so dass

$$\cos\eta = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \text{ und } \sin\eta = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

wird. Im Dreieck OAS haben wir $AO = \alpha$, $AS = 90^0$ und $\angle AOS = 90^0 - \zeta - \eta$, wonach wir

$$\cos OS = \cos s = \sin(\zeta + \eta)\sin\alpha$$

und, wenn man AO nach p verlängert und aus o das Perpendikel op fällt,

$$\operatorname{cotg} oOp = \frac{\sin(\zeta + \eta)\cos\alpha}{\cos(\zeta + \eta)}$$

haben. Da nun

$$Oo = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta\sin s}{Ma^2\Omega}$$

ist, so wird

$$Op = d\alpha = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta}{Ma^2\Omega}\sin s\cos oOp$$

und

$$op = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta}{Ma^2\Omega}\sin s\sin oOp = d\eta\sin\alpha\,.$$

Es ist aber

$$\sin s\sin oOp = \cos(\zeta + \eta)$$

und

$$\sin s\cos oOp = \sin s\sin oOP\operatorname{cotg} oOp = \sin(\zeta + \eta)\cos\alpha,$$

man findet daher

$$d\Omega = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta}{Ma^2}\sin\alpha\sin(\zeta + \eta),$$

$$d\alpha = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta}{Ma^2\ \Omega}\cos\alpha\sin(\zeta + \eta)$$

und

$$d\eta = -\frac{2Pfg\,dt\cos\theta}{Ma^2\Omega}\cdot\frac{\cos(\zeta + \eta)}{\sin\alpha};$$

es ist demnach die Veränderung so wohl der Drehungsaxe im Kreisel, als auch der Winkelgeschwindigkeit Ω bestimmt.

Zusatz 1.

§. 773. Wir haben daher

$$d\Omega : d\alpha = \sin\alpha : \frac{\cos\alpha}{\Omega} \text{ oder } \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha},$$

und wenn man integrirt

$$\Omega = \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{a}}{\cos\alpha},$$

wenn nämlich im Anfange die Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$ und der Bogen AO, welcher jetzt $= \alpha$ ist, $= \mathfrak{a}$ war. Es wird auf diese Weise durch die gegebene Drehungsaxe O sogleich die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels Ω bekannt.

Zusatz 2.

§. 774. Je weiter sich demnach die Drehungsaxe O von der Axe des Kreisels A entfernt, desto grösser wird die Winkelgeschwindigkeit Ω, und es würde die letztere selbst bis in's Unendliche vergrössert werden, wenn die Drehungsaxe IO sich bis zu 90° von der Axe des Kreisels IA entfernte.

Aufgabe 83.

§. 775. Es ist für irgend eine Zeit die Neigung des Kreisels gegen den Horizont, nebst der Drehungsaxe und der Winkelgeschwindigkeit gegeben; man soll die augenblickliche, in der Lage des Kreisels entstehende Aenderung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 106.) Indem man auf der, um den Mittelpunkt der Trägheit des Kreisels beschriebenen, unbeweglichen Kugel den höchsten Punkt Z gleichsam als das Zenith annimmt, stelle man zugleich den Bogen ZX als ersten Meridian auf. Es befinde sich jetzt die Axe des Kreisels in A, und man setze zur Bestimmung dieses Punktes den Bogen $ZA = 90^0 - \theta = l$ und den Winkel $XZA = \lambda$. Die zwei übrigen Hauptaxen mögen in B und C liegen, und man setze den Winkel $ZAB = \zeta$. Es drehe sich jetzt der Kreisel um den Pol O, so dass $BAO = \eta$ und $AO = \alpha$, wie auch die Winkelgeschwindigkeit im Sinne $ABC = \Omega$ ist. Dies vorausgesetzt, setzen wir nach Aufgabe 68. (§. 678.) die Bogen $OB = \beta$, $OC = \gamma$, $ZB = m$ und $ZC = n$, und haben zur Bestimmung der Veränderung der Lage:

$$dl . \sin l = \Omega\, dt (\cos\beta \cos n - \cos\gamma \cos m),$$
$$dm . \sin m = \Omega\, dt (\cos\gamma \cos l - \cos\alpha \cos n),$$
$$dn . \sin n = \Omega\, dt (\cos\alpha \cos m - \cos\beta \cos l) \text{ und}$$
$$- d\lambda . \sin l^2 = \Omega\, dt (\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n).$$

Nun ist aber $l = 90^0 - \theta$, also $\cos l = \sin\theta$, ferner

$$\cos\beta = \sin\alpha \cos\eta,\ \cos\gamma = \sin\alpha \sin\eta,$$
$$\cos m = \cos\zeta \cos\theta \text{ und } \cos n = - \sin\zeta \cos\theta;$$

hieraus leitet man ab

$$- d\theta . \cos\theta = \Omega\, dt \{- \sin\alpha \cos\eta \sin\zeta \cos\theta - \sin\alpha \sin\gamma \cos\zeta \cos\theta\}$$

oder $$d\theta = \Omega\, dt \sin\alpha \sin(\zeta + \eta).$$

Ferner hat man

$$d\zeta \sin\zeta \cos\theta + d\theta \cos\zeta \sin\theta = \Omega\, dt \{\sin\alpha \sin\eta \sin\theta + \cos\alpha \sin\zeta \cos\theta\}$$
$$d\zeta \cos\zeta \cos\theta - d\theta \sin\zeta \sin\theta = \Omega\, dt \{\cos\alpha \cos\zeta \cos\theta - \sin\alpha \cos\eta \sin\theta\},$$

oder $$d\zeta . \cos\theta = \Omega\, dt \{- \sin\alpha \sin\theta \cos(\zeta + \eta) + \cos\alpha \cos\theta\}$$

und endlich

$$d\lambda = -\frac{\Omega\, dt \sin\alpha \cos(\zeta + \eta)}{\cos\theta}.$$

Die augenblickliche Veränderung in der Lage des Kreisels ist demnach in diesen Differentialformeln enthalten:

$$d\theta = \Omega\, dt \sin\alpha \sin(\zeta + \eta),$$
$$d\zeta = \Omega\, dt\{\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\theta \cos(\zeta + \eta)\}$$

und

$$d\lambda = -\frac{\Omega\, dt \sin\alpha \cos(\zeta + \eta)}{\cos\theta}.$$

Anmerkung.

§. 776. Diese augenblicklichen Veränderungen doppelter Art mussten wir entwickeln, ehe wir die Auflösung der Aufgabe, worin der Gegenstand dieses Kapitels enthalten ist, unternehmen konnten. Nachdem nun also dieselben bestimmt sind, wollen wir die Bewegung eines solchen Kreisels, wie wir in diesem Kapitel betrachten, nachdem ihm eine beliebige Bewegung beigebracht worden ist, zu erforschen suchen.

Aufgabe 84.

§. 777. Nachdem einem Kreisel, bei einer gegebenen Neigung seiner Axe, eine drehende Bewegung um die letztere beigebracht worden ist, soll man die Fortsetzung dieser Bewegung, d. h. so wohl die Lage, als auch die Bewegung des Kreisels zu jeder Zeit bestimmen.

Auflösung.

(Figur 106.) Die Axe des Kreisels habe anfangs gegen den Horizont die Neigung δ gehabt und eine drehende Bewegung um jene, mit der Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$ im Sinne ABC empfangen. Wir nehmen aber an, dass im Anfange die Axe des Kreisels A sich in dem Meridiane ZX befunden habe, und dass zugleich auf denselben der den Kreisel betreffende Bogen AB gefallen sei. Zur Bestimmung des Kreisels selbst sei seine Masse $= M$, das Moment der Trägheit in Bezug auf alle durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehenden, Axen $=$ Ma^2 und auf seiner Axe der Abstand der untersten Spitze vom Mittelpunkte der Trägheit oder $ID = f$. Nach Verlauf der Zeit t sei nun, indem wir von der Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit abstrahiren, die Axe des Kreisels nach A gelangt, so dass der Winkel $XZA = \lambda$ und seine Neigung gegen den Ho-

rizont $=\theta$ oder der Bogen $ZA=90^0-\theta$ ist, während anfangs $\lambda=0$ und $\theta=\delta$ gewesen ist. Ferner bilde der mit dem Kreisel bewegliche Bogen AB jetzt mit ZA den Winkel $ZAB=\zeta$, so dass im Anfange $\zeta=0$ gewesen ist. Es drehe sich jetzt der Kreisel um den Pol O mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$, ebenfalls im Sinne ABC, und man setze den Bogen $AO=\alpha$ und den Winkel $BAO=\eta$, so dass im Anfange $\alpha=0$ gewesen ist, weil der Kreisel um die Axe AID sich zu drehen angefangen hat; der Winkel η war aber im Anfange unbestimmt. Wenn nun in diesem Augenblick der Druck der Spitze gegen die horizontale Ebene $=P$ gesetzt wird, so ergeben die vorhergehenden Aufgaben folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{P}{M}=1+\frac{f\{dd\theta\cos\theta-d\theta^2\sin\theta\}}{2g\,dt^2}$$

$$\text{II.} \quad \Omega=\frac{\varepsilon}{\cos\alpha},\ \text{weil}\ \alpha=0,$$

$$\text{III.} \quad d\alpha=-\frac{2Pfg\,dt\cos\theta}{M\alpha^2\Omega}\cos\alpha\sin(\zeta+\eta)$$

$$\text{IV.} \quad d\eta=-\frac{2Pfg\,dt\cos\theta}{M\alpha^2\Omega}\cdot\frac{\cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha}$$

$$\text{V.} \quad d\theta=\Omega\,dt\sin\alpha\sin(\zeta+\eta)$$

$$\text{VI.} \quad d\zeta=\Omega\,dt\{\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\theta\cos(\zeta+\eta)\}$$

$$\text{VII.} \quad d\lambda=-\frac{\Omega\,dt\sin\alpha\cos(\zeta+\eta)}{\cos\theta},$$

zu deren Auflösung wir alle Kräfte anstrengen müssen. Um die Menge der Veränderlichen zu beschränken, entnehmen wir aus den Gleichungen III. und IV., indem wir P eliminiren,

$$\frac{d\alpha.\cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha\cos\alpha}=d\eta\sin(\zeta+\eta),$$

ferner ergeben V. und VI., indem wir $\Omega\,dt$ eliminiren,

$$\frac{d\theta\cos\alpha}{\sin\alpha}-d\theta\operatorname{tg}\theta\cos(\zeta+\eta)=d\zeta\sin(\zeta+\eta).$$

Addiren wir diese zwei Gleichungen und setzen $\zeta+\eta=\varphi$, so erhalten wir

$$\frac{d\alpha\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{d\theta\cos\alpha}{\sin\alpha}-d\theta\operatorname{tg}\theta\cos\varphi-d\varphi\sin\varphi=0,$$

welche Gleichung, durch $\operatorname{tg}\alpha\cos\theta$ multiplicirt, in die folgende übergeht:

$$\frac{d\alpha\cos\theta\cos\varphi}{\cos\alpha^2}+d\theta\cos\theta-d\theta\operatorname{tg}\alpha\sin\theta\cos\varphi-d\varphi\operatorname{tg}\alpha\cos\theta\sin\varphi=0.$$

Diese Gleichung ist integrabel und ergibt

$$\operatorname{tg}\alpha\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta=\sin\delta,$$

weil im Anfange $\alpha=0$ und $\theta=\delta$ ist. Wir erhalten hieraus

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\delta-\sin\theta}{\cos\theta\cos\varphi} \text{ oder } \cos\varphi=\frac{\sin\delta-\sin\theta}{\operatorname{tg}\alpha\cos\theta}.$$

Dividiren wir nun die Gleichung III. durch V., damit wir $\sin(\zeta+\eta)$ oder $\sin\varphi$ fortschaffen, so erhalten wir

$$\frac{d\alpha}{d\theta}+\frac{2Pfg\cos\theta\cos\alpha}{Ma^2\Omega^2\sin\alpha}=0$$

oder

$$\frac{\varepsilon^2 d\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha^3}+\frac{2Pfg\,d\theta\cos\theta}{Ma^2}=0.$$

Setzen wir hier $\sin\theta=x$, so dass $d\theta\cos\theta=dx$ ist, so erhalten wir, weil

$$\frac{P}{M}=1+\frac{fddx}{2gdt^2}$$

ist, die folgende von selbst integrable Gleichung

$$\frac{\varepsilon^2a^2d\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha^3}+2fgdx+\frac{f^2dxddx}{dt^2}=0.$$

Dieselbe ergibt nämlich, wenn man sie integrirt,

$$\frac{\varepsilon^2a^2}{2\cos\alpha^2}+2fg\sin\theta+\frac{f^2d\theta^2\cos\theta^2}{2dt^2}=\tfrac{1}{2}C,$$

oder

$$fd\theta\cos\theta=dt\sqrt{C-4fg\sin\theta-\frac{\varepsilon^2a^2}{\cos\alpha^2}}.$$

Da nun nach V. und II.

$$d\theta=\varepsilon dt\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi$$

ist, so erhalten wir die neue endliche Gleichung

$$\tfrac{1}{2}C=\frac{\varepsilon^2a^2}{2\cos\alpha^2}+2fg\sin\theta+\frac{\varepsilon^2f^2\operatorname{tg}\alpha^2\cos\theta^2\sin\varphi^2}{2}.$$

Hier muss aber für $\alpha=0$ und $\theta=\delta$

$$\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2a^2+2fg\sin\delta$$

sein, woraus wir erhalten

$$2fg(\sin\delta-\sin\theta)=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2a^2\operatorname{tg}\alpha^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2f^2\operatorname{tg}\alpha^2\cos\theta^2\sin\varphi^2.$$

Diese geht, weil

$$\sin\varphi^2=1-\frac{(\sin\delta-\sin\theta)^2}{\operatorname{tg}\alpha^2\cos\theta^2}$$

ist, über in

$$4fg(\sin\delta-\sin\theta)=\varepsilon^2a^2\operatorname{tg}\alpha^2+\varepsilon^2f^2\operatorname{tg}\alpha^2\cos\theta^2-\varepsilon^2f^2(\sin\delta-\sin\theta)^2,$$

woraus wir entnehmen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)[4fg + \varepsilon^2 f^2(\sin\delta - \sin\theta)]}}{\varepsilon\sqrt{a^2 + f^2\cos\theta^2}}$$

und hieraus ferner

$$\sin\varphi = \sin(\zeta + \eta) = \frac{\sqrt{4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta)}}{\cos\theta\sqrt{4fg + \varepsilon^2 f^2(\sin\delta - \sin\theta)}}$$

und

$$\cos\varphi = \cos(\zeta + \eta) = \frac{\varepsilon\sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)[a^2 + f^2\cos\theta^2]}}{\cos\theta . \sqrt{4fg + \varepsilon^2 f^2(\sin\delta - \sin\theta)}}.$$

Auf diese Weise haben wir durch die Neigung θ allein den Bogen α und den Winkel $\varphi = \zeta + \eta$ bestimmt, wir erhalten aber auch eine Relation zwischen θ und der Zeit t, mittelst der Gleichung

$$d\theta = \varepsilon dt \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi,$$

welche die Form

$$d\theta = \frac{dt\sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)[4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta)]}}{\cos\theta\sqrt{a^2 + f^2\cos\theta^2}}$$

oder

$$dt = \frac{d\theta\cos\theta\sqrt{a^2 + f^2\cos\theta^2}}{\sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)[4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta)]}}$$

annimmt. Da nun ferner

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi} - \frac{\operatorname{tg}\theta\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

ist, so wird

$$d\zeta = \varepsilon dt - \frac{\varepsilon d\theta\operatorname{tg}\theta\sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)(a^2 + f^2\cos\theta^2)}}{\sqrt{4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta)}}$$

oder auch

$$d\zeta = \frac{\varepsilon d\theta(1 - \sin\delta\sin\theta)\sqrt{a^2 + f^2\cos\theta^2}}{\cos\theta\sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)[4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta)]}},$$

woraus der Winkel $ZAB = \zeta$ durch Integration herzuleiten ist.

Da endlich

$$d\lambda = -\frac{\varepsilon dt\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi}{\cos\theta}$$

ist, so erhalten wir

$$d\lambda = -\frac{\varepsilon dt(\sin\delta - \sin\theta)}{\cos\theta^2}$$

oder auch

$$d\lambda = -\frac{\varepsilon\, d\theta \sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)(a^2 + f^2 \cos\theta^2)}}{\cos\theta \sqrt{4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2\, a^2(\sin\delta - \sin\theta)}}.$$

Wünschen wir auch den Druck des Kreisels gegen die horizontale Ebene zu kennen, so erhält man denselben aus Gleichung III., wonach

$$\varepsilon a^2 d\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{2P}{M} fg\, dt \cos\theta \sin\varphi$$

ist und woraus sich ergibt

$$\frac{2P}{M} = \frac{a^2[2fg + \varepsilon^2 f^2 (\sin\delta - \sin\theta)]}{fg\,(a^2 + f^2\cos\theta^2)}$$

$$-\frac{a^2 f^2 \sin\theta \{\sin\delta - \sin\theta\} [4fg + \varepsilon^2 f^2 (\sin\delta - \sin\theta)]}{fg\{a^2 + f^2 \cos\theta^2\}^2}$$

Zusatz 1.

§. 778. Wenn im Anfange die Axe des Kreisels *AD* vertikal, oder $\delta = 90^0$ war, so wird er beständig diese Lage beibehalten und sich gleichförmig um dieselbe Axe *AD*, mit der Winkelgeschwindigkeit ε drehen.

Diess ergibt auch die Gleichung

$$dt = \frac{d\theta\,.\cos\theta \sqrt{a^2 + f^2\cos\theta^2}}{(1 - \sin\theta)\sqrt{4fg(1 + \sin\theta) - \varepsilon^2 a^2}},$$

woraus man ersieht, dass erst nach einer unendlich grossen Zeit, d. h. niemals $\sin\theta < 1$ werden kann.

Zusatz 2.

§. 779. Ist aber $\delta < 90^0$ oder auch $\sin\delta < 1$, so können die Erscheinungen der Bewegung aus der Gleichung

$$dt = \frac{d\theta\,.\cos\theta \sqrt{a^2 + f^2\cos\theta^2}}{\sqrt{(\sin\delta - \sin\theta)\{4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2 (\sin\delta - \sin\theta)\}}}$$

erkannt werden. Aus derselben ergibt sich zuerst, dass niemals $\sin\theta > \sin\delta$ werden, d. h. dass niemals die Neigung gegen den Horizont θ die Anfangsneigung δ an Grösse übertreffen kann.

Zusatz 3.

§. 780. Die Neigung θ kann nur verschwinden, wenn $\varepsilon^2 a^2 \sin\delta < 4fg$ ist; ist also die im Anfange beigebrachte Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon < \frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$$

gewesen, so wird der Kreisel endlich niederfallen. Dies ge-

schieht auch, wenn dem geneigten Kreisel gar keine Bewegung beigebracht worden ist.

Zusatz 4.

§. 781. War aber die im Anfange beigebrachte Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon > \frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}},$$

so kann die Neigung θ nicht über eine bestimmte Grenze hinaus abnehmen und sobald sie diese erreicht hat, wird der Kreisel sich wieder bis zur anfänglichen Neigung δ aufrichten. Die kleinste Neigung θ ergibt sich aber aus der Gleichung:

$$4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta) = 0,$$

wonach wir erhalten

$$\sin\theta = \frac{\varepsilon^2 a^2 - \sqrt{\varepsilon^4 a_4 - 16\varepsilon^2 a^2 fg\sin\delta + 64f^2 g^2}}{8fg}.$$

Zusatz 5.

§. 782. Wenn daher die im Anfange beigebrachte Winkelgeschwindigkelt ε gleichsam unendlich gross war, so wird die Grenze des kleinsten Werthes

$$\sin\theta = \sin\delta,$$

oder es wird der Kreisel beständig dieselbe Neigung beibehalten. Ist ε aber sehr gross, so wird die Neigung sehr nahe bestimmt durch

$$\sin\theta = \sin\delta - \frac{2fg\cos\delta^2}{\varepsilon^2 a^2},$$

so dass wir erhalten

$$\theta = \delta - \frac{2fg\cos\delta}{\varepsilon^2 a^2}.$$

Anmerkung.

§. 783. Da der langsamer zur Drehung angetriebene Kreisel bald niederfällt, so verdient diejenige Winkelgeschwindigkeit bemerkt zu werden, welche der Kreisel übertroffen haben muss, um sich wieder aufzurichten. Es würde diese Geschwindigkeit

$$= \frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$$

sein, welcher die grösste Neigung gegen den Horizont, nämlich $\theta = 0$ zukommt; da aber in Folge der Bewegung des Kreisels die Axe sich nicht bis zum Horizont neigen kann, so wird man diejenige Neigung für die grösste zu halten haben, bei welcher der

Kreisel gleichsam mit seinem Körper den Horizont berührt. Setzt man dieselbe $=i$, so muss, damit der Kreisel sich nicht bis zu derselben hinneige, die im Anfange beigebrachte Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon > \frac{2\cos i\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta - \sin i}}$$

sein, und so lange sie grösser als dieser Werth bleibt, wird der Kreisel nicht niederfallen. Dies ist die Ursache, wesshalb ein Kreisel, weil seine Bewegung in Folge der Reibung und anderer Hindernisse allmählig kleiner wird, endlich niederfällt.

Da ich übrigens hier auf derartige Hindernisse keine Rücksicht genommen habe, so ist es kein Wunder, dass auch die übrigen Erscheinungen nicht genügend mit der Erfahrung übereinstimmen, wenn auch ein bestimmter, zur Fortdauer der drehenden Bewegung erforderlicher Grad der Geschwindigkeit höchst übereinstimmend mit der Erfahrung ist. Man würde aber ohne Zweifel einen sehr grossen Unterschied wahrnehmen, wenn man die gefundenen Differentialformeln integrirte; allein eben wegen dieser Ursache wird es nicht der Mühe werth sein, diese Arbeit zu unternehmen, da dieselben so verwickelt sind, dass man sie durch Logarithmen und Kreisbogen nicht darstellen kann. Sie würden aber noch verwickelter ausgefallen sein, wenn man nicht im Kreisel alle Momente der Trägheit einander gleich angenommen hätte; daher werde ich auch diesen Gegenstand nicht berühren, weil die aufgestellten Principien durch die aufgestellten Beispiele hinreichend erläutert sind. Ich werde vielmehr dahin streben, eine fruchtbarere Entwickelung der Theorie sich bewegender starrer Körper aufzustellen. Obgleich nämlich die bisherigen Lehren das ganze Werk zu beenden scheinen, würde doch, wenn wir mittelst derselben die Wirkung beliebiger Kräfte bestimmen wollten, die oben vorgeschriebene Methode zu mühsam sein, indem man zuerst die Axe, um welche die Kräfte den Körper, wenn er sich in Ruhe befände, zu drehen anfangen würden, hierdurch aber die Veränderung der Axe, um welche der Körper sich wirklich drehet und die Veränderung der Winkelgeschwindigkeit bestimmen muss. Ich werde aus diesem Grunde eine vollkommnere und mehr dem Gebrauche angepasste Methode vorlegen, deren man sich hierauf zu schwierigern Untersuchungen bedienen kann.

Kapitel XV.

Von der freien Bewegung starrer, durch beliebige Kräfte angetriebener Körper.

Lehrsatz 10.

§. 784. Auf welche Weise auch ein starrer Körper durch Kräfte angetrieben werden mag, so ist die augenblickliche Wirkung in diesen vier Umständen enthalten: erstens der Veränderung der Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit; zweitens der Veränderung der Richtung dieses Punktes; drittens der Veränderung der Winkelgeschwindigkeit um die, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende, Drehungsaxe und viertens der Veränderung der Drehungsaxe selbst.

Beweis.

Auf welche Weise ein starrer Körper sich auch bewegen mag, so wird seine Bewegung zu jeder Zeit in eine fortschreitende, mit welcher der Mittelpunkt der Trägheit fortrückt und eine drehende Bewegung um eine beliebige, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe zerlegt. Daher enthält die Kenntniss dieser Bewegung folgende vier Elemente:

1) die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit;
2) die Richtung, in welcher er sich bewegt;
3) die durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe, um welche der Körper sich dreht, und
4) die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung.

Hat man diese vier Umstände erkannt, so wird man von der Bewegung des Körpers in diesem Augenblick eine vollständige Vorstellung haben. In Folge der antreibenden Kräfte ist

es aber möglich, dass diese vier Gegenstände sich ändern, und um die Wirkung jener kennen zu lernen, müssen wir daher im Stande sein zu bestimmen, eine wie grosse Veränderung die einzelnen Elemente in einem unendlich kleinen Zeittheilchen erleiden. Die Wirkung der Kräfte besteht demnach nicht sowohl in diesen vier Elementen, als vielmehr in ihrer augenblicklichen Veränderung und wenn wir diese angeben können, werden wir die Wirkung vollständig erkannt haben; hieraus ergibt sich die Wahrheit des Lehrsatzes.

Zusatz 1.

§. 785. So wie man daher bei der Bewegung von Punkten die Wirkung der Kräfte aus der Veränderung der Geschwindigkeit und der Richtung vollständig erkennt, muss man bei der Bewegung starrer Körper ausser diesen beiden, auf den Mittelpunkt der Trägheit sich beziehenden, Veränderungen auch diejenigen kennen, welche so wohl die Drehungsaxe als auch die Winkelgeschwindigkeit erleidet.

Zusatz 2.

§. 786. Wie wir demnach die Kräfte bestimmt haben, durch welche eine drehende Bewegung um eine feste Axe eine gegebene Beschleunigung erlangt, wird man auch diejenigen Kräfte bestimmen können, durch welche ausserdem die Drehungsaxe selbst eine gegebene Veränderung erleidet.

Zusatz 3.

§. 787. Die Grundlage der gesammten Theorie von der Bewegung starrer Körper besteht demnach darin, dass wir, wie auch immer die antreibenden Kräfte beschaffen sein mögen, jene vier in einem Zeitmomente hervorgebrachten Veränderungen anzugeben im Stande sind.

Anmerkung 1.

§. 788. Die zu diesem Ziele führenden Principien sind im Vorhergehenden schon genügend auseinander gesetzt worden, wo wir gezeigt haben, auf welche Weise die Veränderung so wohl in der Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit, als auch in der Drehungsaxe und deren Bewegung bestimmt werden muss. Allein weil dieser spätere Theil des Werkes, in welchem die Summe dieser Theorie enthalten ist, sich auf mehrere Untersuchungen stützt,

welche oft bedeutende Schwierigkeit zu enthalten pflegen, so werde ich hier dieselben gleichsam in Eine zusammenziehen und diese Theorie so aufstellen, dass sie mittelst eines einzigen Princips abgemacht werden kann. Ich hätte mich zwar sogleich dieses leichtern Verfahrens bedienen können und würde so nicht geringe Schwierigkeiten, welche uns in der obigen Behandlung aufgestossen sind, vermieden haben; allein bei einem noch so wenig behandelten Gegenstande erschien es nicht unangemessen, eine mühsamere und weitläufigere Methode voranzuschicken, damit hierdurch die einzelnen Untersuchungen in einer fast neuen Sache sich dem Geiste fester einprägten und die Schwierigkeiten selbst, worin dieser Theil der Mechanik noch verwickelt zu sein schien, deutlicher durchschau't würden. Nichts desto weniger aber werde ich diesen Gegenstand hier gleichsam von neuem behandeln, und nichts von dem bisher Angeführten zu Hülfe rufen.

Anmerkung 2.

§. 789. Die ganze Arbeit kommt demnach darauf hinaus, dass wir bestimmen, wie grosse Veränderungen in den vier erwähnten Elementen durch gegebene Kräfte hervorgebracht werden, und weil eine directe Methode diess zu leisten nicht vorliegt, wollen wir umgekehrt zuerst nach den Kräften forschen, welche zur Hervorbringung gegebener augenblicklicher Veränderungen erforderlich sind, damit wir von hier umgekehrt zu demjenigen, was wir suchen, zurückkehren können. Da nun die in der Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit hervorgebrachte Veränderung keine Schwierigkeit hat, so wollen wir ihn als in Ruhe betrachten und untersuchen, was für Kräfte erforderlich sind, damit so wohl die Drehungsaxe, um welche der Körper sich jetzt dreht, als auch die Winkelgeschwindigkeit in einem unendlich kleinen Zeittheilchen gegebene Veränderungen annehmen. Weil wir nämlich die Drehungsaxe nebst der Winkelgeschwindigkeit als gegeben annehmen, so wird die Bewegung der einzelnen Elemente des Körpers gegeben sein und wenn wir diese nach je drei festen Richtungen zerlegen, werden wir im Stande sein zu ermitteln, wie stark diese drei Geschwindigkeiten so wohl in Folge der veränderten Lage der Drehungsaxe, als der Veränderung der Winkelgeschwindigkeit sich ändern und zugleich die Kräfte anzugeben, welche diese Aenderungen in den einzelnen Elementen des Körpers hervorbringen. Indem wir

endlich diese elementaren Kräfte vereinigen, werden wir die gesuchten endlichen Kräfte erlangen. Da wir also zuerst die Bewegung der einzelnen Elemente des Körpers, während dieser sich um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe mit gegebener Winkelgeschwindigkeit drehet, kennen müssen; so wollen wir in der folgenden Aufgabe ihre Zerlegung nach je drei festen Axen, für welche ich die drei Hauptaxen des Körpers annehmen werde, lehren.

Aufgabe 85.

§. 790. Ein starrer Körper dreht sich mit gegebener Geschwindigkeit um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe; man soll die Bewegung seiner einzelnen Elemente bestimmen und dieselbe nach den Richtungen der Hauptaxen zerlegen.

Auflösung.

(Figur 107.) Um den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers I, welcher in der Figur nicht dargestellt ist, denke man sich eine sphärishe Oberfläche beschrieben, auf welcher A, B und C die Pole der Hauptaxen, also die Bogen AB, AC und BC Quadranten sind. Es drehe sich nun der Körper um die beliebige Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ und im Sinne ABC, und es seien zur Bestimmung des Drehungspoles O die Bogen $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$. Man betrachte nun ein beliebiges Element des Körpers, und es schneide eine von demselben nach dem Mittelpunkte I gezogene gerade Linie die sphärische Oberfläche in Z; sein Abstand vom Mittelpunkte I sei $=r$, während man den Radius der Kugel durch die Einheit ausdrückt. Offenbar wird die Bewegung dieses Elementes der des Punktes Z ähnlich sein, während man die Geschwindigkeit des letztern im Verhältniss $1:r$ vermehrt. Es wird daher hinreichend sein, die Bewegung des Punktes Z zu bestimmen und wenn man zu diesem Ende den Bogen ZzT normal auf OZ setzt, so wird Zz die Richtung der Bewegung und ihre Geschwindigkeit $=\Omega \sin OZ$ sein, weil $\sin OZ$ den Abstand des Punktes Z von der Drehungsaxe IO ausdrückt. Man setze aber den Bogen ZT gleich einem Quadranten, damit der Radius IT der Richtung der Bewegung Zz parallel werde; alsdann muss die, nach der Richtung IT übertragene Geschwindigkeit $\Omega \sin OZ$ nach den Richtungen der Hauptaxen IA, IB IC zerlegt werden. Zu diesem Ende ziehe man die Bogen AT,

BT und CT, welche die Neigungen jener geraden Linie IT gegen diese Axen messen und man erhält

die Geschwindigkeit längs $IA = \Omega \sin OZ \cos AT$
längs $IB = \Omega \sin OZ \cos BT$
und längs $IC = \Omega \sin OZ \cos CT.$

Da aber der Bogen OT gleichfalls ein Quadrant ist, so erhält man aus dem Dreieck AOT

$\cos AT = \cos AOT \sin AO = -\sin AOZ \sin AO$, weil $TOZ = 90^\circ$

und auf ähnliche Weise

$$\cos BT = \cos BOT \sin BO = \sin BOZ \sin BO,$$
$$\cos CT = \cos COT \sin CO = \sin COZ \sin CO.$$

Da aber

$$\sin AOZ \sin OZ = \sin AZ \sin OAZ,$$
$$\sin BOZ \sin OZ = \sin BZ \sin OBZ$$

und $$\sin COZ \sin OZ = \sin CZ \sin OCZ;$$

so wird

die Geschwindigkeit längs $IA = -\Omega \sin AO \sin AZ \sin OAZ,$
- $IB = \Omega \sin BO \sin BZ \sin OBZ$
und - $IC = \Omega \sin CO \sin CZ \sin OCZ.$

Ferner ist aber

$$\sin BAO = \frac{\cos CO}{\sin AO}, \quad \cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin AO},$$
$$\sin BAZ = \frac{\cos CZ}{\sin AZ} \text{ und } \cos BAZ = \frac{\cos BZ}{\sin AZ},$$

demnach $$\sin OAZ = \frac{\cos CO \cos BZ - \cos BO \cos CZ}{\sin AO \sin AZ};$$

und wir erhalten so

die Geschwindigkeit längs $IA = \Omega[\cos BO \cos CZ - \cos CO \cos BZ]$,

und ganz ähnlich

die Geschwindigkeit längs $IB = \Omega[\cos CO \cos AZ - \cos AO \cos CZ]$,
- - - $IC = \Omega[\cos AO \cos BZ - \cos BO \cos AZ]$.

Multiplicirt man diese Geschwindigkeiten durch r, so erhält man die des vorausgesetzten Elementes. Setzt man zu diesem Ende die den Hauptaxen parallelen Coordinaten $= x$, y und z, so wird

$$r \cos AZ = x, \quad r \cos BZ = y \text{ und } r \cos CZ = z;$$

wir erhalten demnach, weil $AO = \alpha$, $BO = \beta$ und $CO = \gamma$, die Geschwindigkeit des vorausgesetzten Elementes

längs $IA = \Omega[z \cos\beta - y \cos\gamma]$,
- $IB = \Omega[x \cos\gamma - z \cos\alpha]$
und - $IC = \Omega[y \cos\alpha - x \cos\beta]$.

Aufgabe 86.

§. 791. **Ein starrer Körper dreht sich um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit; man soll die elementaren Kräfte finden, durch welche seine einzelnen Elemente angetrieben werden müssen, damit im Zeitelemente dt so wohl die Drehungsaxe, als auch die Winkelgeschwindigkeit gegebene Veränderungen erleiden.**

Auflösung.

(Figur 108.) Es sei I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers, seine Hauptaxen IA, IB und IC, und es drehe sich der Körper um die beliebige Axe IO, deren Neigung gegen jene drei, nämlich $AIO=\alpha$, $BIO=\beta$ und $CIO=\gamma$ ist, dabei sei die im Sinne ABC gerichtete Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$. Diese Grössen sollen im Zeittheilchen dt um ihre Differentiale $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ und $d\Omega$ wachsen, und man hat die hierzu erforderlichen elementaren Kräfte zu bestimmen. Man betrachte ein beliebiges in Z gelegenes Element dM des Körpers, dessen Lage durch die den Hauptaxen parallelen Coordinaten $IX=x$, $XY=y$ und $YZ=z$ bestimmt wird; ferner setze man die, zur Hervorbringung der vorgeschriebenen Bewegung desselben erforderlichen und längs der Hauptaxen zerlegten, Kräfte $Za=p$, $Zb=q$ und $Zc=r$. Nach denselben Richtungen zerlege man die Bewegung des Elementes, und setze die Geschwindigkeit längs $Za=u$, längs $Zb=v$ und längs $Zc=w$. Da nun nach den ersten Principien der Bewegung

$$du=\frac{2gpdt}{dM},\quad dv=\frac{2gqdt}{dM} \text{ und } dw=\frac{2grdt}{dM}$$

ist, so sind die gesuchten Kräfte:

$$p=\frac{dudM}{2gdt},\quad q=\frac{dv.dM}{2gdt} \text{ und } r=\frac{dwdM}{2gdt}.$$

In der vorhergehenden Aufgabe haben wir aber die drei Geschwindigkeiten u, v und w folgendermaassen ausgedrückt gefunden:

$$u=\Omega[z\cos\beta-y\cos\gamma],\quad v=\Omega[x\cos\gamma-z\cos\alpha]$$

und

$$w=\Omega[y\cos\alpha-x\cos\beta];$$

um wieviel diese nun im Zeittheilchen dt zunehmen werden, hat man so wohl nach der Veränderlichkeit der als gegeben betrachteten Buchstaben Ω, α, β und γ, als auch der Coordinaten x, y und z zu beurtheilen. Die Differentiale der letztern,

nämlich dx, dy und dz stellen aber die kleinen Wege dar, durch welche das Element dM im Zeittheilchen dt geführt wird, so dass

$$dx = udt = \Omega dt(z\cos\beta - y\cos\gamma),$$
$$dy = vdt = \Omega dt(x\cos\gamma - z\cos\alpha),$$

und
$$dz = wdt = \Omega dt(y\cos\alpha - x\cos\beta)$$

ist. Stellt man nun die Differentiation gehörig an, so erhalten wir:

$$du = d\Omega[z\cos\beta - y\cos\gamma] - \Omega[zd\beta\sin\beta - yd\gamma\sin\gamma] + \Omega dt[w\cos\beta - v\cos\gamma],$$
$$dv = d\Omega[x\cos\gamma - z\cos\alpha] - \Omega[xd\gamma\sin\gamma - zd\alpha\sin\alpha] + \Omega dt[u\cos\gamma - w\cos\alpha]$$

und

$$dw = d\Omega[y\cos\alpha - x\cos\beta] - \Omega[yd\alpha\sin\alpha - xd\beta\sin\beta] + \Omega dt[v\cos\alpha - u\cos\beta].$$

Da aber

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

also

$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = \sin\gamma^2$, $\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2 = \sin\beta^2$ und $\cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \sin\alpha^2$ ist, so gehen die letzten Formeln in die folgenden über:

$$du = d\Omega[z\cos\beta - y\cos\gamma] - \Omega zd\beta\sin\beta + \Omega yd\gamma\sin\gamma + \Omega^2 dt[y\cos\alpha\cos\beta + z\cos\alpha\cos\gamma - x\sin\alpha^2],$$
$$dv = d\Omega[x\cos\gamma - z\cos\alpha] - \Omega xd\gamma\sin\gamma + \Omega zd\alpha\sin\alpha + \Omega^2 dt[z\cos\beta\cos\gamma + x\cos\alpha\cos\beta - y\sin\beta^2]$$
$$dw = d\Omega[y\cos\alpha - x\cos\beta] - \Omega yd\alpha\sin\alpha + \Omega xd\beta\sin\beta + \Omega^2 dt[x\cos\alpha\cos\gamma + y\cos\beta\cos\gamma - z\sin\gamma^2].$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke durch $\frac{dM}{2gdt}$, so erhält man die gesuchten Kräfte p, q und r.

Zusatz 1.

§. 792. Werden daher die einzelnen Elemente des Körpers durch je drei solche Kräfte angetrieben, während der Körper sich um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit Ω dreht, so wird diese nach Verlauf des Zeittheilchens dt den Zuwachs $d\Omega$ erhalten. Zugleich aber wird die Drehungsaxe sich in Beziehung auf die Hauptaxen IA, IB und IC so verändern, dass die Winkel α, β und γ um ihre Differentiale $d\alpha$, $d\beta$ und $d\gamma$ zunehmen.

Zusatz 2.

§. 793. In so fern als wir die Kräfte betrachten, welche dasselbe Element dM des Körpers antreiben, sind die in die-

sen Formeln befindlichen Grössen x, y und z gleichsam constant, weil durch sie die immer dieselbe bleibende Lage des Elementes in Beziehung auf die Hauptaxen bestimmt wird.

Zusatz 3.

§. 794. Wollen wir aber von diesem Elemente auf andere übergehen, indem wir die sie antreibenden Kräfte suchen, so werden dieselben Grössen x, y und z als veränderlich, die übrigen α, β, γ und Ω nebst ihren Differentialen als constant angesehen werden müssen, weil diese für alle Elemente des Körpers in demselben Augenblicke dieselben bleiben.

Zusatz 4.

§. 795. Wenn wir daher die, alle Elemente antreibenden, Kräfte in Eine Summe vereinigen wollen, so kommen nur die zu integrirenden Formeln $\int x dM$, $\int y dM$ und $\int z dM$ vor, und da deren Differentiale, weil I der Mittelpunkt der Trägheit ist, verschwinden, so werden offenbar die Summen aller Kräfte p, q und r für sich verschwinden.

Anmerkung.

§. 796. Da die Summen aller Kräfte p, q und r verschwinden, was immer geschehen muss, so lange der Mittelpunkt der Trägheit in Ruhe bleibt, so wird man ihre Wirkung nur nach ihren Momenten zu beurtheilen haben. Ferner werden andere beliebige Kräfte, welche dieselben Momente haben, dieselbe Wirkung hervorbringen, wenn man nur ihnen gleiche und entgegengesetzte im Mittelpunkte der Trägheit anbringt. Hier ist es nicht hinreichend, dass die Kräfte dasselbe Moment in Bezug auf Eine beliebige Axe haben, sondern es ist nothwendig, dass sie in Bezug auf durchaus alle Axen dieselben Momente bilden, sonst würde man sie nicht für gleichgeltend zu halten haben. Diess tritt aber ein, wenn sie nur für die drei Hauptaxen dieselben Momente ergeben, wie wir diess in dem folgenden Satze ausser Zweifel setzen werden.

Aufgabe 87.

§. 797. Während ein starrer Körper sich um eine beliebige, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe mit gegebener Winkelgeschwindigkeit dreht, soll man in Bezug auf die drei Hauptaxen die Momente der Kräfte bestimmen, durch welche so wohl der Drehungsaxe, als auch der Winkelgeschwindigkeit eine gegebene Veränderung beigebracht wird.

Auflösung.

(Figur 108.) Es bleiben zur Bestimmung der Drehungsaxe IO, um welche sich der Körper jetzt mit der Winkelgeschwindigkeit Ω im Sinne ABC dreht, die Winkel $AIO = \alpha$, $BIO = \beta$ und $CIO = \gamma$; dieselben sollen im Zeittheilchen dt um ihre Differentiale zunehmen. Ferner betrachte man für das, durch die Coordinaten $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ bestimmte Element dM des Körpers in Z die vorher hergeleiteten elementaren Kräfte

$$Za = p = \frac{du.dM}{2gdt}, \quad Zb = q = \frac{dv.dM}{2gdt} \text{ und } Zc = r = \frac{dw.dM}{2gdt}.$$

Aus denselben entspringt, in Bezug auf die Axe IA, das Moment im Sinne BC

$$= ry - qz = \frac{dM}{2gdt}[ydw - zdv];$$

in Bezug auf die Axe IB das Moment im Sinne CA

$$= pz - rx = \frac{dM}{2gdt}[zdu - xdw];$$

in Bezug auf die Axe IC das Moment im Sinne AB

$$= qx - py = \frac{dM}{2gdt}[xdv - ydu].$$

Wenn man nun statt du, dv und dw die vorhergefundenen Formeln substituirt, so findet man:

$$\begin{aligned} ydw - zdv = {} & d\Omega[(y^2 + z^2)\cos\alpha - xy\cos\beta - xz\cos\gamma] \\ & - \Omega(y^2 + z^2)\,d\alpha.\sin\alpha + \Omega xy\,d\beta.\sin\beta + \Omega xz\,d\gamma.\sin\gamma \\ & + \Omega^2 dt[(y^2 - z^2)\cos\beta\cos\gamma \\ & + xy\cos\alpha\cos\gamma - xz\cos\alpha\cos\beta - yz(\sin\gamma^2 - \sin\beta^2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zdu - xdw = {} & d\Omega[(x^2 + z^2)\cos\beta - yz\cos\gamma - xy\cos\alpha] \\ & - \Omega(x^2 + z^2)d\beta.\sin\beta + \Omega yz\,d\gamma.\sin\gamma + \Omega xy\,d\alpha.\sin\alpha \\ & + \Omega^2 dt[(z^2 - x^2)\cos\alpha\cos\gamma \\ & + yz\cos\alpha\cos\beta - xy\cos\beta\cos\gamma - xz(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xdv - ydu = {} & d\Omega[(x^2 + y^2)\cos\gamma - xz\cos\alpha - yz\cos\beta] \\ & - \Omega(x^2 + y^2)d\gamma.\sin\gamma + \Omega xz\,d\alpha.\sin\alpha + \Omega yz\,d\beta.\sin\beta \\ & + \Omega^2 dt[(x^2 - y^2)\cos\alpha\cos\beta \\ & + xz\cos\beta\cos\gamma - yz\cos\alpha\cos\gamma - xy(\sin\beta^2 - \sin\alpha^2)]. \end{aligned}$$

Man multiplicire nun diese Formeln durch $\frac{dM}{2gdt}$ und integrire durch die ganze Ausdehnung des Körpers; es seien zu diesem Ende Ma^2, Mb^2 und Mc^2 die Momente der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxen IA, IB und IC. Da nun nach §. 452

$$\int x^2 dM = \tfrac{1}{2}M[b^2 + c^2 - a^2], \ \int yz\,dM = 0,$$
$$\int y^2 dM = \tfrac{1}{2}M[a^2 + c^2 - b^2], \ \int xz\,dM = 0,$$
$$\int z^2 dM = \tfrac{1}{2}M[a^2 + b^2 - c^2], \ \int xy\,dM = 0,$$

so erhalten wir die drei Momente der Kräfte in Bezug auf die Hauptaxen, durch welche die vorgeschriebene Wirkung hervorgebracht wird, folgendermaassen ausgedrückt:

I. Das Moment der Kräfte in Bezug auf die Axe *IA*, im Sinne *BC*

$$\frac{M}{2g\,dt}[a^2 d\Omega \cos\alpha - \Omega a^2 d\alpha . \sin\alpha + \Omega^2(c^2 - b^2)dt \cos\beta \cos\gamma];$$

II. Das Moment der Kräfte in Bezug auf die Axe *IB*, im Sinne *CA*

$$\frac{M}{2g\,dt}[b^2 d\Omega \cos\beta - \Omega b^2 d\beta . \sin\beta + \Omega^2(a^2 - c^2)dt \cos\alpha \cos\gamma];$$

III. Das Moment der Kräfte in Bezug auf die Axe *IC*, im Sinne *AB*

$$\frac{M}{2g\,dt}[c^2 d\Omega \cos\gamma - \Omega c^2 d\gamma . \sin\gamma + \Omega^2(b^2 - a^2)dt \cos\alpha \cos\beta].$$

Zusatz 1.

§. 798. Damit also der Körper sich um dieselbe Axe gleichförmig drehe, werden, weil $d\Omega = 0$, $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$ und $d\gamma = 0$ ist, die drei Momente sein:

$$\text{I.} \quad = \frac{M\Omega^2(c^2 - b^2)\cos\beta\cos\gamma}{2g},$$

$$\text{II.} \quad = \frac{M\Omega^2(a^2 - c^2)\cos\alpha\cos\gamma}{2g},$$

und

$$\text{III.} \quad = \frac{M\Omega^2(b^2 - a^2)\cos\alpha\cos\beta}{2g},$$

welche nur dann verschwinden, wenn die Drehungsaxe auf eine der Hauptaxen fällt.

Zusatz 2.

§. 799. Auf ähnliche Weise ersieht man, welcher Kräfte es bedarf, damit entweder nur die Winkelgeschwindigkeit, oder nur die Lage der Drehungsaxe sich ändere. Die Kräfte, deren Momente mit den vorher erhaltenen übereinstimmen, werden diess nämlich leisten, wenn man nur ihnen gleiche und entgegengesetze im Mittelpunkte der Trägheit anbringt, damit man die Kräfte selbst für verschwindend halten kann und die ganze Wirkung ihren Momenten allein zugeschrieben werden muss.

Zusatz 3.

§. 800. Dreht sich der Körper um die Hauptaxe IA mit der Winkelgeschwindigkeit Ω, welche um ihr Differential $d\Omega$ zunehmen soll, so wird, weil $\alpha = 0$ und $\beta = \gamma = 90^0$ ist, zu diesem Ende nur das Moment der Kräfte in Beziehung auf die Axe $IA = \frac{Ma^2 d\Omega}{2g dt}$ erfordert, wie wir schon oben (§. 608.) gefunden haben.

Anmerkung.

§. 801. Diese Aufgabe würde nicht schwieriger zu lösen gewesen sein, wenn wir dem Körper ausser der drehenden Bewegung eine beliebige fortschreitende beigelegt hätten, welche sich im Zeittheilchen dt auch nach der vorgeschriebenen Weise verändern sollte. Wenn nämlich der Mittelpunkt der Trägheit eine beliebige Bewegung hat, welche nach den Hauptaxen zerlegt die Geschwindigkeiten l, m und n ergibt, die im Zeittheilchen dt ebenfalls um ihre Differentiale zuzunehmen haben; so müssen die Geschwindigkeiten u, v und w, deren Werthe oben aus der drehenden Bewegung hervorgegangen sind, um diese fortschreitenden Geschwindigkeiten l, m und n vermehrt werden. Aus den Incrementen derselben würden aber Kräfte hervorgehen, deren gleichgeltende durch den Mittelpunkt der Trägheit geht und welche sich eben so verhält, als wenn der Körper, ohne irgend eine drehende Bewegung, diese fortschreitende allein verfolgen müsste. Hierdurch wird dasjenige, was wir oben gezeigt haben, bestätigt, dass man in einer solchen gemischten Bewegung immer die fortschreitende und drehende von einander trennen und jede für sich, als ob die andere nicht da wäre, betrachten und bestimmen darf.

Aufgabe 88.

§. 802. Ein starrer Körper wird, während er sich um die gegebene Axe IO mit der gegebenen Winkelgeschwindigkeit Ω dreht, durch beliebige Kräfte angetrieben und es sind zugleich diesen gleiche und entgegengesetzte am Mittelpunkte der Trägheit angebracht; man soll so wohl die Veränderung der Axe, als auch die im Zeitelemente dt hervorgebrachte Aenderung der Winkelbewegung bestimmen.

Auflösung.

Man bestimme die Momente der antreibenden Kräfte in-

Bezug auf die Hauptaxen des Körpers, und es sei das Moment der Kräfte in Bezug auf die Axe

IA im Sinne $BC = P$,
IB im Sinne $CA = Q$,
IC im Sinne $AB = R$.

Die Momente der Trägheit des Körpers in Bezug auf dieselben Axen seien wie bisher Ma^2, Mb^2 und Mc^2. Wenn der Körper sich jetzt im Sinne ABC und mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ um die Axe IO dreht, deren Neigungen gegen dieselben Hauptaxen $AIO = \alpha$, $BIO = \beta$ und $CIO = \gamma$ sind; so werden diese Grössen im Zeittheilchen dt die, den folgenden Gleichungen entsprechenden, Aenderungen erleiden:

$$\frac{2gP\,dt}{Ma^2} = d\Omega\cos\alpha - \Omega d\alpha.\sin\alpha + \frac{c^2-b^2}{a^2}\Omega^2 dt\cos\beta\cos\gamma,$$

$$\frac{2gQ\,dt}{Mb^2} = d\Omega\cos\beta - \Omega d\beta.\sin\beta + \frac{a^2-c^2}{b^2}\Omega^2 dt\cos\alpha\cos\gamma$$

und

$$\frac{2gR\,dt}{Mc^2} = d\Omega\cos\gamma - \Omega d\gamma.\sin\gamma + \frac{b^2-a^2}{c^2}\Omega^2 dt\cos\alpha\cos\beta.$$

Durch diese Gleichungen werden die vier Unbekannten α, β, γ und Ω bestimmt, weil man diese wegen

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

nur für drei anzusehen hat. Da also

$$d\alpha\sin\alpha\cos\alpha + d\beta\sin\beta\cos\beta + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma = 0$$

ist, so multiplicire man die erste Gleichung durch $\cos\alpha$, die zweite durch $\cos\beta$ und die dritte durch $\cos\gamma$, und addire die Produkte; alsdann ergibt sich

$$d\Omega + \left[\frac{c^2-b^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{b^2} + \frac{b^2-a^2}{c^2}\right]\Omega^2 dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= \frac{2gdt}{M}\left[\frac{P\cos\alpha}{a^2} + \frac{Q\cos\beta}{b^2} + \frac{R\cos\gamma}{c^2}\right]$$

oder

$$d\Omega = \frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\Omega^2 dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \frac{2gdt}{M}\left[\frac{P\cos\alpha}{a^2} + \frac{Q\cos\beta}{b^2} + \frac{R\cos\gamma}{c^2}\right].$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\Omega d\alpha\sin\alpha = \frac{c^2-b^2}{a^2}\Omega^2 dt\cos\beta\cos\gamma\left[1 + \frac{(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2c^2}\cos\alpha^2\right]$$
$$+ \frac{2gdt}{M}\left[\frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{b^2} + \frac{R\cos\alpha\cos\gamma}{c^2} - \frac{P\sin\alpha^2}{a^2}\right],$$

$$\Omega d\beta \sin\beta = \frac{a^2-c^2}{b^2}\,\Omega^2 dt \cos\alpha \cos\gamma\left[1+\frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{a^2c^2}\cos\beta^2\right]$$
$$+\frac{2gdt}{M}\left[\frac{R\cos\beta\cos\gamma}{c^2}+\frac{P\cos\beta\cos\alpha}{a^2}-\frac{Q\sin\beta^2}{b^2}\right],$$
$$\Omega d\gamma \sin\gamma = \frac{b^2-a^2}{c^2}\,\Omega^2 dt \cos\alpha \cos\beta\left[1+\frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2}\cos\gamma^2\right]$$
$$+\frac{2gdt}{M}\left[\frac{P\cos\gamma\cos\alpha}{a^2}+\frac{Q\cos\gamma\cos\beta}{b^2}-\frac{R\sin\gamma^2}{c^2}\right].$$

Wenn man aber die erste jener Gleichungen durch $a^2\cos\alpha$, die zweite durch $b^2\cos\beta$ und die dritte durch $c^2\cos\gamma$ multiplicirt, und die Produkte addirt, so erhält man

$$\frac{2gdt}{M}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]=d\Omega[a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2]$$
$$-\Omega[a^2d\alpha\sin\alpha\cos\alpha+b^2d\beta\sin\beta\cos\beta+c^2d\gamma\sin\gamma\cos\gamma].$$

Multiplicirt man endlich diese Gleichung durch $2M\Omega$ und integrirt auf der einen Seite, so ergibt sich

$$M\Omega^2[a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2]=4g\int\Omega dt[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma],$$

welche Grösse die lebendige Kraft des Körpers ausdrückt (§. 746.).

Zusatz 1.

§. 803. Wird daher der Körper, während er sich um eine beliebige, durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende, Axe dreht, durch beliebige Kräfte angetrieben, so werden hierdurch die augenblicklichen Aenderungen so wohl in der Lage der Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen, als auch in der Winkelgeschwindigkeit bestimmt.

Zusatz 2.

§. 804. Wird der Körper durch gar keine äussern Kräfte angetrieben, so erleidet die Drehungsaxe nebst der Winkelgeschwindigkeit solche Veränderungen, dass wir haben:

I. $$d\Omega=\frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\,\Omega^2 dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

II. $$d\alpha.\sin\alpha=\frac{c^2-b^2}{a^2}\,\Omega dt\cos\beta\cos\gamma\left[1+\frac{(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2c^2}\cos\alpha^2\right]$$

III. $$d\beta.\sin\beta=\frac{a^2-c^2}{b^2}\,\Omega dt\cos\alpha\cos\gamma\left[1+\frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2}{a^2c^2}\cos\beta^2\right],$$

IV. $$d\gamma.\sin\gamma=\frac{b^2-a^2}{c^2}\,\Omega dt\cos\alpha\cos\beta\left[1+\frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2}\cos\gamma^2\right]$$

und es bleibt die lebendige Kraft $M\Omega^2[a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2]$ immerwährend constant.

Zusatz 3.

§. 805. Wenn der Körper sich in Ruhe befindet, also $\Omega=0$ ist, so wird aus den Momenten der Kräfte P, Q und R, genommen in Bezug auf die Hauptaxen, die Axe, um welche der Körper sich zu drehen anfängt, durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{b^2}+\frac{R\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}-\frac{P\sin\alpha^2}{a^2}=0,$$

oder

$$\frac{P}{a^2}=\cos\alpha\left[\frac{P\cos\alpha}{a^2}+\frac{Q\cos\beta}{b^2}+\frac{R\cos\gamma}{c^2}\right],$$

$$\frac{R\cos\beta\cos\gamma}{c^2}+\frac{P\cos\beta\cos\alpha}{a^2}-\frac{Q\sin\beta^2}{b^2}=0,$$

oder

$$\frac{Q}{b^2}=\cos\beta\left[\frac{P\cos\alpha}{a^2}+\frac{Q\cos\beta}{b^2}+\frac{R\cos\gamma}{c^2}\right]$$

und

$$\frac{P\cos\gamma\cos\alpha}{a^2}+\frac{Q\cos\gamma\cos\beta}{b^2}-\frac{R\sin\gamma^2}{c^2}=0,$$

oder

$$\frac{R}{c^2}=\cos\gamma\left[\frac{P\cos\alpha}{a^2}+\frac{Q\cos\beta}{b^2}+\frac{R\cos\gamma}{c^2}\right].$$

Da nun hieraus

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\frac{P}{a^2}:\frac{Q}{b^2}:\frac{R}{c^2}$$

folgt, so wird

$$\cos\alpha=\frac{P}{a^2}:\sqrt{\frac{P^2}{a^4}+\frac{Q^2}{b^4}+\frac{R^2}{c^4}},$$

$$\cos\beta=\frac{Q}{b^2}:\sqrt{\frac{P^2}{a^4}+\frac{Q^2}{b^4}+\frac{R^2}{c^4}},$$

$$\cos\gamma=\frac{R}{c^2}:\sqrt{\frac{P^2}{a^4}+\frac{Q^2}{b^4}+\frac{R^2}{c^4}}$$

und im Zeittheilchen dt:

$$d\Omega=\frac{2gdt}{M}\sqrt{\frac{P^2}{a^4}+\frac{Q^2}{b^4}+\frac{R^2}{c^4}}.$$

Anmerkung 1.

§. 806. In dieser einzigen Aufgabe ist demnach alles enthalten, was wir oben auf vielen Umwegen mit grosser Mühe entwickelt haben, während wir uns hier doch nur der ersten Principien der Bewegung bedient haben und alles höchst einleuchtend ist. Oben haben wir, während der Körper ruhet, die

Axe, um welche ihm die Kräfte die erste drehende Bewegung beibringen, sehr mühevoll bestimmt, hier aber ergab sich diese Bestimmung wie ein Zusatz von selbst aus der gegenwärtigen Aufgabe. Damit man nun deren Uebereinstimmung mit der obigen um so leichter durchschaue, und die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens keine Verzögerung hervorbringe, sei wieder zur Bestimmung der Drehungsaxe IF (Figur 86.) der Winkel $AIE = \eta$ und der $EIF = \theta$, alsdann wird

$$\cos\alpha = \cos\eta\cos\theta,\ \cos\beta = -\sin\eta\cos\theta \text{ und } \cos\gamma = \sin\theta.$$

Da also $\operatorname{tg}\eta = -\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ ist, so erhält man

$$\operatorname{tg}\eta = -\frac{Qa^2}{Pb^2} \text{ und } \operatorname{tg}\theta = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\cos\eta = \frac{Ra^2}{Pc^2}\cos\eta.$$

Da nun dort (§. 639.) aber die antreibenden Kräfte $VP = P$, $VQ = Q$ und $VR = R$ sind, wenn der Winkel $AIV = \delta$ und die Linie $IV = h$ ist; so wird das Moment dieser Kräfte in Bezug auf die Axe IA und im Sinne BC

$$= Rh\sin\delta,$$

diess ist hier für uns $= P$. Ferner ist ihr Moment, in Bezug auf die Axe IB und im Sinne CA, unser hiesiges Q

$$= -Rh\cos\delta;$$

endlich ist ihr Moment, in Bezug auf die Axe IC und im Sinne AB, unser jetziges R

$$= Qh\cos\delta - Ph\sin\delta.$$

Substituirt man diese Werthe statt P, Q und R, so erhalten wir ganz wie dort

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{a^2\cos\delta}{b^2\sin\delta} \text{ und } \operatorname{tg}\theta = \frac{a^2(Q\cos\delta - P\sin\delta)}{Rc^2\sin\delta}\cos\eta.$$

Ferner wird auch dasjenige, was wir oben in Betreff der augenblicklichen Veränderung der drehenden Bewegung, während der durch keine Kräfte angetriebene Körper sich um eine andere als um eine der Hauptaxen dreht, durch verwickelte Rechnungen endlich ermittelt haben, hier sehr einfach, indem wir die Momente der Kräfte $P = 0$, $Q = 0$ und $R = 0$ setzen, wie wir im Zusatz 2. gezeigt haben.

Was wir aber oben kaum anzurühren wagten, wenn nämlich der Körper überdies durch beliebige Kräfte angetrieben wird, haben wir hier mit gleicher Leichtigkeit und derselben Arbeit glücklich abgemacht; so dass es scheint, als ob wir nur in diesem Kapitel von den ersten Principien der Bewegung ausgegangen wären und die ganze Theorie der Bewegung starrer Körper vollständig aufgebaut hätten.

Anmerkung 2.

§. 807. Da aber unter der Voraussetzung beliebiger antreibender Kräfte, deren Momente, in Bezug auf die Hauptaxen und im Sinne ABC genommen, P, Q und R sind, die ganze Arbeit in der Bestimmung der drei Winkel α, β und γ und der Winkelgeschwindigkeit Ω enthalten ist, wozu wir drei Gleichungen gefunden haben, indem jene Winkel unter sich eine Bedingung einhalten; so wird man jene Gleichungen durch eine leichte Substitution weit bequemer einrichten können. Wenn wir nämlich, weil wir der Buchstaben x, y und z zur Bestimmung der Natur des Körpers nicht mehr bedürfen,

$$\Omega\cos\alpha = x,\ \Omega\cos\beta = y \text{ und } \Omega\cos\gamma = z$$

setzen; so werden alle Winkel aus der Rechnung eliminirt und die Summe der ganzen Theorie der Bewegung starrer Körper in diesen drei ziemlich einfachen Formeln enthalten sein:

$$dx + \frac{c^2-b^2}{a^2}yzdt = \frac{2gPdt}{Ma^2},$$

$$dy + \frac{a^2-c^2}{b^2}xzdt = \frac{2gQdt}{Mb^2}$$

und

$$dz + \frac{b^2-a^2}{c^2}xydt = \frac{2gRdt}{Mc^2}.$$

Wird daher der Körper durch keine Kräfte angetrieben, so erhalten wir sogleich

$$a^2xdx + b^2ydy + c^2zdz = 0$$

oder

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \text{Constans}.$$

Ferner erhält man aber aus je zwei Gleichungen, indem man dt eliminirt,

$$\frac{a^2dx}{b^2dy} = \frac{(c^2-b^2)y}{(a^2-c^2)x},$$

und daher durch Integration

$$\frac{a^2}{c^2-b^2}x^2 = \frac{b^2}{a^2-c^2}y^2 + \text{Constans}.$$

War demnach im Anfange $x = \mathfrak{A}$, $y = \mathfrak{B}$ und $z = \mathfrak{C}$, und setzen wir

$$\frac{a^2}{c^2-b^2} = A,\quad \frac{b^2}{a^2-c^2} = B \text{ und } \frac{c^2}{b^2-a^2} = C;$$

so erhalten wir

$$Ax^2 - By^2 = A\mathfrak{A}^2 - B\mathfrak{B}^2 \text{ und } Ax^2 - Cz^2 = A\mathfrak{A}^2 - C\mathfrak{C}^2$$

also

$$y = \frac{\sqrt{Ax^2 - A\mathfrak{A}^2 + B\mathfrak{B}^2}}{\sqrt{B}} \text{ und } z = \frac{\sqrt{Ax^2 - A\mathfrak{A}^2 + C\mathfrak{C}^2}}{\sqrt{C}}.$$

Da nun

$$Adx + yzdt = 0$$

ist, so wird

$$dt = -\frac{Adx\sqrt{BC}}{\sqrt{(Ax^2 - A\mathfrak{A}^2 + B\mathfrak{B}^2)(Ax^2 - A\mathfrak{A}^2 + C\mathfrak{C}^2)}}.$$

Auf diese Weise ist auch diese Aufgabe, welche uns oben keine geringe Mühe verursacht hat, ziemlich kurz gelöst.

Aufgabe 89.

§. 808. Hat man zu irgend einer Zeit die Drehungsaxe in Bezug auf die Hauptaxen, zugleich mit der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um diese Axe gekannt; so soll man zu jeder beliebigen Zeit die Lage der Hauptaxen in Bezug auf den absoluten Raum bestimmen.

Auflösung.

(Figur 94.) In dem absoluten Raume denke man sich eine unbewegliche Kugel, in deren Mittelpunkte sich des Körpers Mittelpunkt der Trägheit I befindet, und nehme auf derselben den festen grössten Kreis $ZXVY$ und auf diesem den festen Punkt Z an, auf welchen man die Lage der Hauptaxen zu jeder Zeit bezieht. Nun mögen aber nach Verlauf der Zeit t die Hauptaxen des Körpers auf der unbeweglichen Kugel den Punkten A, B und C entsprechen, von diesen ziehe man nach Z Bogen grösster Kreise und setze dieselben, nämlich $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$, so wie die Winkel $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ und $XZC = \nu$. Jetzt befinde sich aber die Drehungsaxe in O, so dass $AO = \alpha$, $BO = \beta$ und $CO = \gamma$ ist, und um dieselbe drehe sich der Körper im Sinne ABC mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$. Im Zeittheilchen dt wird sich demnach der Pol A durch den kleinen Bogen $Aa = \Omega dt \sin\alpha$ (§. 678.) bewegen, wo Aa normal auf den Bogen OA ist, so dass wir haben

$$\sin BAa = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \text{ und } \cos BAa = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

Es ist aber

$$\sin ZAB = -\frac{\cos n}{\sin l} \text{ und } \cos ZAB = \frac{\cos m}{\sin l},$$

und hieraus schliesst man, dass

$$\sin ZAa = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\sin l}$$

und

$$\cos ZAa = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\sin l}$$

ist. Zieht man nun aus a auf den Bogen ZA das Perpendikel $a\alpha$, so wird

$$A\alpha = \frac{\Omega dt}{\sin l}[\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n]$$

und
$$a\alpha = \frac{\Omega dt}{\sin l}[\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n].$$

Es ist aber

$$A\alpha = -dl \text{ und } a\alpha = -\sin l d\lambda;$$

man erhält daher hieraus und nach der Analogie die folgenden Werthe der Differentiale:

$$\sin l dl = \Omega[\cos\beta \cos n - \cos\gamma \cos m]\,dt,$$
$$\sin l^2 d\lambda = -\Omega[\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n]dt,$$
$$\sin m dm = \Omega[\cos\gamma \cos l - \cos\alpha \cos n]\,dt,$$
$$\sin m^2 d\mu = -\Omega[\cos\gamma \cos n + \cos\alpha \cos l]dt,$$
$$\sin n dn = \Omega[\cos\alpha \cos m - \cos\beta \cos l]dt,$$
$$\sin n^2 d\nu = -\Omega[\cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m]dt.$$

Von der 1., 3. und 5. Gleichung genügt es aber je zwei aufzulösen, da

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

ist und, wenn dieselben aufgelöst sind, Eine der übrigen die ganze Arbeit vollendet (§. 678.).

Zusatz 1.

§. 809. Setzen wir $\Omega\cos\alpha = x$, $\Omega\cos\beta = y$ und $\Omega\cos\gamma = z$, so dass wir aus den Momenten der antreibenden Kräfte P, Q und R nach §. 807 haben

$$dx + \frac{c^2 - b^2}{a^2} yzdt = \frac{2gPdt}{Ma^2}, \quad dy + \frac{a^2 - c^2}{b^2} xzdt = \frac{2gQdt}{Mb^2}$$

und
$$dz + \frac{b^2 - a^2}{c^2} xydt = \frac{2gRdt}{Mc^2};$$

so muss man nun die folgenden Gleichungen hinzufügen:

$$\sin l dl = [y \cos n - z \cos m]dt, \quad \sin m dm = [z \cos l - x \cos n]dt,$$
$$\sin n dn = [x \cos m - y \cos l]dt, \quad \sin l^2 d\lambda = -[y \cos m + z \cos n]dt,$$
$$\sin m^2 d\mu = -[z \cos n + x \cos l]dt, \quad \sin n^2 d\nu = -[x \cos l + y \cos m]dt.$$

Zusatz 2.

§. 810. Setzen wir ferner $\cos l = p$, $\cos m = q$ und $\cos n = r$, so nehmen die letzten Gleichungen, weil

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

ist, die folgenden Formen an:

$$dp + [yr - zq]dt = 0, \quad dq + [zp - xr]dt = 0, \quad dr + [xq - yp]dt = 0,$$

$$d\lambda+\frac{[yq+zr]dt}{q^2+r^2}=0,\ d\mu+\frac{[zr+xp]dt}{p^2+r^2}=0,\ d\nu+\frac{[xp+yq]dt}{p^2+q^2}=0.$$

Hieraus erhält man auch

$$xdp+ydq+zdr=0,$$

so wie

$$pdp+qdq+rdr=0 \text{ ist.}$$

Anmerkung.

§. 811. Wenn ich auch hier die vorhergehende Aufgabe als schon aufgelöst betrachtet habe, so müssen doch meistentheils beide Aufgaben verbunden und ihre Auflösungen zugleich angestellt werden, wie dies im vorhergehenden Kapitel bei der Bewegung der Kreisel in Anwendung gekommen ist. Diese Verbindung beider Aufgaben ist nämlich nothwendig, sobald die antreibenden Kräfte von der absoluten Lage des Körpers abhängig sind und diess pflegt immer einzutreten, wenn äussere Kräfte da sind. In diesen Fällen enthalten daher die Momente der Kräfte P, Q und R die Bogen l, m und n, und vielleicht auch die Winkel λ, μ und ν; so dass man alle in Zusatz 1. dargestellten Gleichungen zugleich erwägen muss, ehe man die Auflösung unternehmen kann. Wird überdiess der Körper mit fortschreitender Bewegung fortgeführt, so pflegen die Kräfte auch von dieser abzuhängen, wesshalb man die Formeln, welche die fortschreitende Bewegung enthalten, zugleich den übrigen wird hinzufügen müssen und in welchen Fällen die Auflösung im höchsten Grade verwickelt wird.

Nachdem wir nun diese Aufgaben abgemacht haben, werden wir die allgemeine Aufgabe von der freien Bewegung starrer Körper, welche durch beliebige Kräfte angetrieben werden, angreifen können.

Aufgabe 90.

§. 812. Ein starrer Körper ist anfangs auf beliebige Weise geworfen worden und wird hierauf durch beliebige Kräfte angetrieben, deren Wirkung er frei Folge leisten kann; man soll seine Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Was zuerst seine fortschreitende oder die Bewegung betrifft, durch welche der Mittelpunkt der Trägheit fortgeführt wird, so wird dieselbe nach denjenigen Vorschriften, welche für die Bewegung von Punkten gelehrt worden sind, bestimmt werden. Man denke sich nämlich die ganze Masse des Körpers

$=M$ in seinem Mittelpunkte der Trägheit vereinigt und in den einzelnen Augenblicken alle Kräfte, welche den Körper antreiben, jede nach ihrer Richtung im Mittelpunkte der Trägheit angebracht. Man erhält so den Fall eines Punktes, dessen endliche Masse aber $=M$ angenommen werden muss und welcher durch Kräfte angetrieben wird, dessen Bewegung also nach den oben gegebenen Vorschriften bestimmt oder wenigstens durch analytische Formeln ausgedrückt werden kann, wobei wir keine Rücksicht auf die drehende Bewegung nehmen, durch welche inzwischen vielleicht der Körper um seinen Mittelpunkt der Trägheit getrieben wird. Um hierauf diese Bewegung zu bestimmen, lasse man die fortschreitende ganz zur Seite, betrachte den Mittelpunkt der Trägheit jetzt als in Ruhe und erforsche zuerst die drei Hauptaxen des Körpers, welche die aus dem Mittelpunkte der Trägheit I (Figur 94.) gezogenen geraden Linien IA, IB und IC, und in Bezug auf welche die Momente der Trägheit Ma^2, Mb^2 und Mc^2 seien. Hat man diese kennen gelernt, so denke man sich um den Mittelpunkt der Trägheit I eine unbewegliche Kugel beschrieben und nehme auf ihr so wohl den grössten Kreis $ZXVY$, als auch auf demselben den festen Punkt Z an, wodurch die Lage des Körpers zu jeder Zeit dargestellt wird. Nun halte nach Verlauf der Zeit t der Körper, in Folge der drehenden Bewegung, die in der Figur dargestellte Lage ein, in welcher die Hauptaxen auf der sphärischen Oberfläche den, um Quadranten von einander abstehenden Punkten A, B und C entsprechen. Man setze zur Bestimmung ihrer gegenwärtigen Lage die Bogen

$$ZA=l, \quad ZB=m \text{ und } ZC=n,$$

und die Winkel

$$XZA=\lambda, \quad XZB=\mu \text{ und } XZC=\nu;$$

wie diese von einander abhängig sind, ergibt sich aus der sphärischen Trigonometrie. Ferner drehe sich jetzt der Körper um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ im Sinne ABC, und man setze zur Bestimmung der Lage dieser Axe die Bogen

$$AO=\alpha, \quad BO=\beta \text{ und } CO=\gamma.$$

Diese Grössen sind durch ihre Differentiale so zu bestimmen, dass sie, wenn man $t=0$ setzt, dem Anfangszustande des Körpers entsprechen. Zu diesem Ende betrachte man die Kräfte, welche jetzt den Körper antreiben und bestimme ihre

Momente in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers; es sei das Moment der Kräfte in Bezug auf

die Axe IA, im Sinne $BC = P$,
die Axe IB, im Sinne $CA = Q$
und die Axe IC, im Sinne $AB = R$.

Setzt man nun der Kürze wegen $\Omega \cos\alpha = x$, $\Omega \cos\beta = y$ und $\Omega \cos\gamma = z$, so dass $\Omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ wird; so haben wir oben (§. 807.) gefunden:

$$dx + \frac{c^2 - b^2}{a^2} yzdt = \frac{2gPdt}{Ma^2},$$

$$dy + \frac{a^2 - c^2}{b^2} xzdt = \frac{2gQdt}{Mb^2}$$

und

$$dz + \frac{b^2 - a^2}{c^2} xydt = \frac{2gRdt}{Mc^2}.$$

Setzt man ferner $\cos l = p$, $\cos m = q$ und $\cos n = r$, so verbinde man mit diesen Gleichungen die folgenden:

$$dp + (yr - zq)dt = 0, \quad dq + (zp - xr)dt = 0, \quad dr + (xq - yp)dt = 0,$$

$$d\lambda + \frac{(yq + zr)dt}{q^2 + r^2} = 0, \quad d\mu + \frac{(zr + xp)dt}{r^2 + p^2} = 0, \quad d\nu + \frac{(xp + yq)dt}{p^2 + q^2} = 0,$$

(§. 810.).

Kann man diese so auflösen und integriren, dass sich zu jeder beliebigen Zeit t die Grössen x, y, z, p, q, r, λ, μ und ν angeben lassen, so wird die Aufgabe vollständig gelöst sein. Bei diesen Gleichungen hat man aber zu bemerken, dass

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$

also

$$pdp + qdq + rdr = 0$$

und hierauf auch

$$xdp + ydq + zdr = 0$$

ist. Endlich haben wir

$$\sin(\mu - \lambda) = -\frac{\cos n}{\sin l \sin m} \text{ und } \cos(\mu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos m}{\sin l \sin m} \quad (§. 682.),$$

also

$$\operatorname{tg}(\mu - \lambda) = \frac{r}{pq} \text{ eben so } \operatorname{tg}(\nu - \mu) = \frac{p}{qr} \text{ und } \operatorname{tg}(\lambda - \nu) = \frac{q}{pr}$$

oder

$$\operatorname{tg}(\nu - \lambda) = -\frac{q}{pr};$$

so dass es hinreichend ist, einen einzigen der drei Winkel λ, μ und ν zu finden.

Anmerkung.

§. 813. Diese Vorschriften zur Bestimmung der Bewegung starrer Körper erstrecken sich sehr weit, und sind nicht an die freie Bewegung allein gebunden. Auf welche Weise nämlich

auch die Bewegung derselben gebunden wird, mögen sie entweder auf einer gewissen Ebene, oder längs anderer Körper fortzugehen gezwungen oder mag ein gewisser fester Punkt derselben zurückgehalten werden; so kann die Frage immer auf die gegebenen Vorschriften zurückgeführt werden. Auf der Seite nämlich, wo sie einen andern Körper berühren, wird es einen Druck geben, welcher zuerst unbestimmt in die Rechnung eingeführt, hierauf aber so bestimmt werden muss, dass die Bewegung mit den vorausgesetzten Bedingungen übereinstimmend gemacht werde; auf diese Weise wird dann auch das Zusammentreffen der Körper erforscht werden. Ehe wir Untersuchungen dieser Art vornehmen, wird es angemessen sein, einen gewissen Fall der freien Bewegung in Erwägung zu ziehen, in welchem eine drehende Bewegung um eine veränderliche Axe stattfindet, während der Körper durch äussere Kräfte angetrieben wird; eine solche Bewegung wird nämlich durch die Kraft der Schwere, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Trägheit eines jeden Körpers geht, nicht hervorgebracht. Die schwierigste Untersuchung dieser Art besteht ohne Zweifel in der drehenden Bewegung der Himmelskörper, die aber nur unter der Voraussetzung der Principien der theoretischen Astronomie unternommen werden kann. Durch die Uebereinstimmung aller Beobachtungen, welche man bis jetzt hat anstellen können, hat man aber erfahren, dass alle Himmelskörper sich so bewegen, als ob sie sich wechselseitig anzögen oder gegenseitig zu einander durch Kräfte getrieben würden, welche im umgekehrten doppelten Verhältniss der Abstände stehen und ausserdem den Massen proportional sind. So wie nämlich alle Körper gegen die Erde schwer sind, haben sie auch ein gewisses Streben nach allen Himmelskörpern, welches desto grösser ausfällt, je kleiner das Quadrat des Abstandes wird. Aus diesen Kräften pflegen nun die Astronomen die fortschreitenden Bewegungen der Himmelskörper abzuleiten, und da man diese Untersuchung zur Bewegung von Punkten zu zählen hat, werden wir hier nur die drehenden Bewegungen der Himmelskörper untersuchen, und diesen Gegenstand werde ich im folgenden Kapitel allgemein so zu behandeln mich bestreben, dass die Astronomie dadurch einen nicht zu verachtenden Zuwachs erlangen wird.

Kapitel XVI.

Von der drehenden Bewegung der Himmelskörper.

Aufgabe 91.

§. 814. (Figur 109.) Die einzelnen Elemente eines starren Körpers werden gegen einen gewissen Punkt F durch Kräfte getrieben, welche ihren Massen, dividirt durch die Quadrate ihrer Abstände von jenem Punkte, proportional sind; man soll die Momente dieser Kräfte in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers bestimmen.

Auflösung.

Es seien IA, IB und IC die Hauptaxen des Körpers, und Ma^2, Mb^2 und Mc^2 seine Momente der Trägheit in Bezug auf sie. Man setze ferner den Abstand des Punktes F, oder des Mittelpunktes der Kräfte vom Mittelpunkte der Trägheit des Körpers I, nämlich $IF = s$; derselbe sei so gegen die Hauptaxen des Körpers geneigt, dass die Winkel $AIF = \zeta$, $BIF = \eta$ und $CIF = \theta$ sind. Fällt man daher aus F auf die Ebene AIB das Perpendikel FE und aus E auf die Axe IA die Normale EA, so wird

$$AI = s\cos\zeta,\quad AE = s\cos\eta \text{ und } EF = s\cos\theta.$$

Die Kraft, welche die einzelnen Körper gegen den Punkt F treibt, sei ferner so gross, dass sie im Abstande $= e$ der Schwere gleich werde, in andern Abständen wird sie dann nach den Quadraten derselben kleiner werden. Betrachten wir nun ein beliebiges Element dM des Körpers in Z, für welches die den Hauptaxen entsprechenden Coordinaten $IX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ sind; alsdann wird die Kraft, welche dieses Element gegen den Punkt F antreibt,

$$= \frac{e^2}{ZF^2} dM$$

sein. Diese Kraft zerlege man jetzt nach den Richtungen der Axen Zp, Zq und Zr, und es wird

$$\text{die Kraft längs } Zp = \frac{e^2(s\cos\zeta - x)dM}{ZF^3},$$

$$\text{die Kraft längs } Zq = \frac{e^2(s\cos\eta - y)dM}{ZF^3}$$

und

$$\text{die Kraft längs } Zr = \frac{e^2(s\cos\theta - z)dM}{ZF^3};$$

hiernach erhält man die Momente dieser Kräfte in Bezug auf die Hauptaxen, nämlich das Moment in Bezug auf

$$\text{die Axe } IA, \text{ im Sinne } BC = \frac{e^2 s(y\cos\theta - z\cos\eta)dM}{ZF^3},$$

$$\text{die Axe } IB, \text{ im Sinne } CA = \frac{e^2 s(z\cos\zeta - x\cos\theta)dM}{ZF^3},$$

$$\text{die Axe } IC, \text{ im Sinne } AB = \frac{e^2 s(x\cos\eta - y\cos\zeta)dM}{ZF^3}.$$

Indem man diese Momente durch den ganzen Körper zusammennimmt, erhalten wir die Momente, welche wir oben durch die Buchstaben P, Q und R angegeben haben; so dass, weil s eine constante Grösse ist,

$$P = e^2 s \int \frac{(y\cos\theta - z\cos\eta)dM}{ZF^3},$$

$$Q = e^2 s \int \frac{(z\cos\zeta - x\cos\theta)dM}{ZF^3}$$

$$R = e^2 s \int \frac{(x\cos\eta - y\cos\zeta)dM}{ZF^3}$$

wird. Es ist aber

$$ZF = \sqrt{(s\cos\zeta - x)^2 + (s\cos\eta - y)^2 + (s\cos\theta - z)^2},$$

oder weil $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1$,

$$ZF = \sqrt{s^2 - 2sx\cos\zeta - 2sy\cos\eta - 2sz\cos\theta + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Da aber bei den Himmelskörpern der Abstand $IF = s$ immer sehr gross im Vergleich mit dem Körper selbst, oder den Grössen x, y und z ist; so erhalten wir hinreichend genau für unsern Zweck:

$$\frac{1}{ZF^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{3x\cos\zeta + 3y\cos\eta + 3z\cos\theta}{s^4}.$$

Weil ferner I der Mittelpunkt der Trägheit des Körpers ist, und IA, IB und IC seine Hauptaxen sind, haben wir

$$\int x dM = 0, \quad \int y dM = 0, \quad \int z dM = 0,$$

wie auch

$$\int xy\,dM = 0,\quad \int xz\,dM = 0 \text{ und } \int yz\,dM = 0;$$

wenn wir daher diese Substitutionen machen, so erhalten wir

$$P = e^2 s \int \frac{[3y^2 \cos\eta \cos\theta - 3z^2 \cos\eta \cos\theta]dM}{s^4}$$

$$= \frac{3e^2 \cos\eta \cos\theta}{s^3} \int (y^2 - z^2) dM,$$

$$Q = \frac{3e^2 \cos\zeta \cos\theta}{s^3} \int (z^2 - x^2) dM$$

und

$$R = \frac{3e^2 \cos\zeta \cos\eta}{s^3} \int (x^2 - y^2) dM.$$

Da aber die Momente der Trägheit gegeben sind und nach §. 661.

$$\int x^2 dM = \tfrac{1}{2} M(b^2 + c^2 - a^2),\quad \int y^2 dM = \tfrac{1}{2} M(a^2 + c^2 - b^2)$$

und

$$\int z^2 dM = \tfrac{1}{2} M(a^2 + b^2 - c^2)$$

ist; so wird

$$P = \frac{3Me^2(c^2 - b^2) \cos\eta \cos\theta}{s^3},$$

$$Q = \frac{3Me^2(a^2 - c^2) \cos\zeta \cos\theta}{s^3}$$

und

$$R = \frac{3Me^2(b^2 - a^2) \cos\zeta \cos\eta}{s^3}.$$

Zusatz 1.

§. 815. Diese Momente der Kräfte sind nicht mit geometrischer Strenge bestimmt worden, sondern gelten nur dann, wann der Abstand des anziehenden Punktes die Grösse des angezogenen Körpers weit übertrifft. Auf diese Weise können wir dieselben bequem mittelst der Momente der Trägheit so einfach ausdrücken.

Zusatz 2.

§. 816. Hat der angezogene Körper alle Momente der Trägheit unter sich gleich, so verschwinden auch diese Momente der Kräfte. Die drehende Bewegung der Himmelskörper erleidet daher von solchen Kräften nur in so fern eine Einwirkung, als sie nicht kugelförmig sind oder wenigstens gleiche Momente der Trägheit haben.

Anmerkung. 1.

§. 817. Wollen wir bestimmen, wie viel diese Kräfte zur fortschreitenden Bewegung beitragen, so müssen wir die ein-

zelnen elementaren Kräfte am Mittelpunkte der Trägheit anbringen; und wenn wir diese für jede beliebige Axe in Eine Summe vereinigen, erhalten wir die ganze Kraft, welche den Körper zur fortschreitenden Bewegung antreibt. Damit wir aber zu zwei Dimensionen der Veränderlichen x, y und z aufsteigen, müssen wir den Werth von ZF genauer ausdrücken, so dass wir haben:

$$\frac{1}{ZF^3}=\frac{1}{s^3}+\frac{3(x\cos\zeta+y\cos\eta+z\cos\theta)}{s^4}$$
$$+\frac{15(x\cos\zeta+y\cos\eta+z\cos\theta)^2}{2s^5}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{2s^5}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung durch $(s\cos\zeta-x)dM$ und integriren hierauf nach den obigen Vorschriften, so ergibt sich bis zur zweiten Dimension:

$$\int\frac{(s\cos\zeta-x)dM}{ZF^3}=\frac{M\cos\zeta}{s^2}+\frac{15\cos\zeta}{2s^4}\int dM[x^2\cos\zeta^2+y^2\cos\eta^2$$
$$+z^2\cos\theta^2]-\frac{3\cos\zeta}{2s^4}\int dM[x^2+y^2+z^2]-\frac{3\cos\zeta}{s^4}\int x^2dM$$
$$=\frac{M\cos\zeta}{s^2}+\frac{3M\cos\zeta}{2s^4}[a^2(3-5\cos\zeta^2)+b^2(1-5\cos\eta^2)$$
$$+c^2(1-5\cos\theta^2)].$$

Wir erhalten daher die drei folgenden Kräfte:

I) längs $IA=\frac{Me^2\cos\zeta}{s^2}$
$$+\frac{3Me^2\cos\zeta}{2s^4}[a^2(3-5\cos\zeta^2)+b^2(1-5\cos\eta^2)+c^2(1-5\cos\theta^2)]$$

II) längs $IB=\frac{Me^2\cos\eta}{s^2}$
$$+\frac{3Me^2\cos\eta}{2s^4}[b^2(3-5\cos\eta^2)+c^2(1-5\cos\theta^2)+a^2(1-5\cos\zeta^2)]$$

III) längs $IC=\frac{Me^2\cos\theta}{s^2}$
$$+\frac{3Me^2\cos\theta}{2s^4}[c^2(3-5\cos\theta^2)+a^2(1-5\cos\zeta^2)+b^2(1-5\cos\eta^2)].$$

Diese drei Kräfte werden zuerst auf eine einzige, in der Richtung IF antreibende zurückgeführt, welche ist

$$\frac{Me^2}{s^2}+\frac{3Me^2}{2s^4}[a^2(1-5\cos\zeta^2)+b^2(1-5\cos\eta^2)+c^2(1-5\cos\theta^2)]$$

und welcher ausserdem diese drei hinzuzufügen sind:

1) längs IA die Kraft $\frac{3Ma^2e^2\cos\zeta}{s^4}$,

2) längs IB die Kraft $\frac{3Mb^2e^2\cos\eta}{s^4}$,

3) längs IC die Kraft $\frac{3Mc^2e^2\cos\theta}{s^4}$.

Es ergibt sich hieraus, dass, wenn die Hauptmomente der Trägheit unter sich gleich sind, alle Kräfte auf die einzige längs IF wirkende Kraft

$$\frac{Me^2}{s^2}$$

zurückgeführt werden, welche letztere man in der Theorie der Astronomie betrachtet. In den übrigen Fällen wird aber jene Centripetalkraft nicht rein dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional, sondern es treten noch ausserdem kleine, dem Biquadrate umgekehrt proportionale Glieder hinzu, welche aber ausserdem von der Lage des Körpers in Bezug auf die Kräfte F abhängig sind. Es wird nützlich sein, diese Abweichung in der astronomischen Rechnung zu beachten, vorzüglich wenn die Körper merklich von der sphärischen Figur abweichen.

Anmerkung 2.

§. 818. Ich habe hier angenommen, dass die einzelnen Elemente des Körpers gegen einen einzigen Punkt F getrieben werden, während sie doch in der Hypothese der Anziehung auch gegen die einzelnen Elemente des anziehenden Körpers angetrieben werden. Ist aber der anziehende Körper eine Kugel, so wird er gewiss eben so eine Anziehung ausüben, als ob seine ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, so dass unsere Aufgabe auch diese Fälle in sich begreift. Ist aber der anziehende Körper nicht kugelförmig, so wird zwar ein wenig so wohl das umgekehrte doppelte Verhältniss, als auch die Richtung der Kraft, welche nicht mehr auf einen bestimmten Punkt zugeht, sich ändern; allein diese Unregelmässigkeit hat man in sehr grosser Entfernung als verschwindend anzusehen, besonders da die Himmelskörper wenig von der Kugelgestalt abweichen. Hier aber, wo ich nur die drehende Bewegung im Auge habe, abstrahire ich von der fortschreitenden und betrachte den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers als in Ruhe; ich werde nun zuerst erforschen, um welche Axe der Körper, wenn er selbst ruhet, eine drehende Bewegung annehmen wird.

Aufgabe 92.

§. 819. (Figur 110.) Es befindet sich ein Körper in Ruhe und wird vom Mittelpunkte der Kräfte F aus auf die vorher bestimmte Weise angetrieben; man soll die Axe bestimmen, um welche er im ersten Augenblick eine drehende Bewegung annehmen wird und die daraus hervorgehende Winkelgeschwindigkeit.

Auflösung.

Wir betrachten demnach den Körper als in Ruhe, oder abstrahiren vielmehr von seiner fortschreitenden Bewegung; denken wir uns daher seinen Mittelpunkt der Trägheit im Mittelpunkte einer Kugel, so seien A, B und C die Pole der Hauptaxen, und in Bezug auf sie wie bisher Ma^2, Mb^2 und Mc^2 die Momente der Trägheit. Nun durchschneide eine aus dem Mittelpunkte der Trägheit nach dem Mittelpunkte der Kräfte gezogene gerade Linie die Oberfläche der Kugel im Punkte F, so dass die Bogen $AF = \zeta$, $BF = \eta$ und $CF = \theta$ sind; der Abstand des Mittelpunktes der Kräfte sei $= s$ und seine anziehende Kraft so gross, dass sie im Abstande e der Schwere gleich wird. Hieraus ergeben sich die Momente der Kräfte P, Q und R in Bezug auf die Axen IA, IB und IC, nämlich:

$$P = \frac{3Me^2(c^2 - b^2)\cos\eta\cos\theta}{s^3},$$

$$Q = \frac{3Me^2(a^2 - c^2)\cos\zeta\cos\theta}{s^3}$$

und

$$R = \frac{3Me^2(b^2 - a^2)\cos\zeta\cos\eta}{s^3}.$$

Nach §. 805. wird daher der Körper um eine solche Axe IO sich zu drehen anfangen, dass, wenn man die Bogen $AO = \alpha$, $BO = \beta$ und $CO = \gamma$ setzt,

$$\cos\alpha = \frac{P}{a^2} : \sqrt{\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}},$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{b^2} : \sqrt{\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}}$$

und

$$\cos\gamma = \frac{R}{c^2} : \sqrt{\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}}$$

wird, und er im Zeittheilchen dt die entsprechende Winkelgeschwindigkeit

$$d\Omega = \frac{2gdt}{M}\sqrt{\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}}$$

erlangt, welche zugleich im Sinne ABC gerichtet sein wird. Ferner findet man hieraus den Abstand des Drehungspoles O vom Punkte F so ausgedrückt, dass (nach §. 678.)

$$\cos OF = \left[\frac{P\cos\zeta}{a^2} + \frac{Q\cos\eta}{b^2} + \frac{R\cos\theta}{c^2}\right] : \sqrt{\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}}$$

wird.

Zusatz 1.

§. 820. Bemerkenswerth ist hier der Fall, in welchem der Mittelpunkt der Kräfte F zwischen je zwei Hauptpole fällt. Es liege nämlich dieser Punkt auf dem Bogen AB, alsdann wird, weil

$$\cos\theta^2 = 0 \text{ und } \cos\zeta^2 + \cos\eta^2 = 1$$

ist,

$$P = 0,\ Q = 0 \text{ und } R = \frac{3Me^2(b^2 - a^2)\sin\zeta\cos\zeta}{s^3}.$$

Ferner wird auch

$$\cos\alpha = 0,\quad \cos\beta = 0 \text{ und } \cos\gamma = 1,$$

so dass der Drehungspol O in den Hauptpol C fällt.

Zusatz 2.

§. 821. In demselben Falle, in welchem der Mittelpunkt der Kräfte sich in der Ebene AIB befindet und der Körper sich um die Axe IC zu drehen anfängt, erlangt er im ersten Zeittheilchen dt die entstehende Winkelgeschwindigkeit

$$d\Omega = \frac{6ge^2(b^2 - a^2)dt\sin\zeta\cos\zeta}{c^2s^3} = \frac{3ge^2(b^2 - a^2)dt\sin 2\zeta}{c^2s^3}$$

im Sinne AB.

Zusatz 3.

§. 822. Hat daher der Körper in demselben Falle schon eine drehende Bewegung um diese Axe IC, mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ im Sinne AB; so wird dieselbe, in Folge der gegen den Mittelpunkt der Kräfte F gerichteten Kraft so beschleunigt, dass

$$d\Omega = \frac{3ge^2(b^2 - a^2)dt\sin 2\zeta}{c^2s^3}$$

wird.

Anmerkung.

§. 823. Wenn daher der Mittelpunkt der Kräfte F so um den Körper herumgeführt wird, dass er auf dem die zwei Hauptaxen IA und IB umfassenden grössten Kreise AB fortschreitet und der Körper sich um die dritte Hauptaxe IC zu drehen angefangen hat, so geht hieraus hervor, dass die letztere Drehung beständig fortdauern und nur die Winkelgeschwin-

digkeit Ω bald grösser, bald kleiner werden wird. Dieser Fall verdient durchaus mit allem Eifer entwickelt zu werden, weil er die librirende Bewegung des Mondes, vermöge welcher der letztere immer fast dieselbe Seite der Erde zuwendet, zu umfassen scheint. Damit diese Untersuchung leichter und deutlicher gemacht werde, wollen wir annehmen, dass zuerst der Mittelpunkt der Kräfte mit gleichförmiger Bewegung um den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers in derselben Ebene herumgeführt werde, und beständig denselben Abstand beibehalte.

Aufgabe 93.

§. 824. Ein Körper dreht sich um seine Hauptaxe IC, und es wird der Mittelpunkt der Kräfte F in einer auf jene Axe normalen Ebene gleichförmig herumgeführt, wobei sein Abstand vom Mittelpunkte der Trägheit des Körpers derselbe bleibt; man soll die drehende Bewegung dieses Körpers bestimmen.

Auflösung.

(Figur 111.) Weil die Drehungsaxe IC constant und in Bezug auf den Himmel gleichsam fest bleibt, sei XCY die halbe Himmelskugel und XY ein um den Pol C beschriebener grösster Kreis, auf welchem der Mittelpunkt der Kräfte F gleichförmig fortschreitet; ferner werden auch die beiden übrigen Hauptpole A und B des Körpers sich beständig auf diesem Kreise befinden. Man setze nun die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Kräfte $F=\delta$, und da dieser sich anfangs in X befunden hat, so wird er nach Verlauf der Zeit t nothwendig den Bogen $XF=\delta t$ beschrieben haben. In demselben Augenblick befinde sich aber die eine Hauptaxe in A, und wenn man nun den Bogen $XA=\lambda$ setzt und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Axe IC und im Sinne $AB=\Omega$ ist; so wird

$$d\lambda=\Omega dt.$$

Weil aber $AF=\delta t-\lambda$ ist, so wird unser obiges ζ hier $=\delta t-\lambda$, und wenn wir die übrigen constanten Grössen a^2, b^2, c^2, e^2 und s beibehalten; so haben wir wie oben die Gleichung

$$d\Omega=\frac{3ge^2(b^2-a^2)dt\sin 2\zeta}{c^2s^3}.$$

Führen wir aber den Winkel $ACF=\zeta$ ein, so haben wir $\zeta=\delta t-\lambda$, $\lambda=\delta t-\zeta$, $d\lambda=\delta dt-d\zeta=\Omega dt$; mithin

$$\Omega=\delta-\frac{d\zeta}{dt}.$$

Nehmen wir daher das Element dt als constant an, so ergibt sich folgende aufzulösende Gleichung

$$dd\zeta + \frac{3ge^2(b^2-a^2)}{c^2s^3}\,dt^2 \sin 2\zeta = 0.$$

Wir setzen der Kürze wegen $\frac{3ge^2(b^2-a^2)}{c^2s^3} = N$ und multipliciren diese Gleichung durch $2d\zeta$, alsdann ergibt sich

$$2d\zeta dd\zeta + 2Ndt^2 d\zeta \sin 2\zeta = 0,$$

deren Integral ist

$$d\zeta^2 - Ndt^2 \cos 2\zeta = Cdt^2$$

und woraus

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{C + N\cos 2\zeta}}, \quad \text{wie auch } \Omega = \delta - \sqrt{C + N\cos 2\zeta}$$

folgt. Aus jener Gleichung muss man aber zu jeder beliebigen Zeit t den Bogen $AF = \zeta$ bestimmen und wenn dieser constant wäre, würde der Körper dem Mittelpunkte der Kräfte F beständig dieselbe Seite zuwenden. In so fern demnach N nicht $= 0$ und der Winkel ζ der Veränderung unterworfen ist, ist auch die Winkelgeschwindigkeit Ω veränderlich. Um diese Erscheinungen zu erforschen, ist es angemessen, je zwei Fälle zu entwickeln, je nachdem nämlich $b^2 > a^2$ oder $b^2 < a^2$ ist, welche beide, nach Verhältniss der Constanten C, eine unendliche Mannichfaltigkeit umfassen.

Fall I., wo $b^2 > a^2$.

§. 825. Es sei daher

$$\frac{3ge^2(b^2-a^2)}{c^2s^3} = n$$

positiv, und während der Mittelpunkt der Kräfte F mit der Geschwindigkeit δ auf dem Kreise XFY fortschreitet, setzen wir zur Zeit t den rückwärts liegenden Bogen $FA = \zeta$ und haben alsdann

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{C + n\cos 2\zeta}}.$$

Hier mache ich hinsichtlich der Constanten C folgende Bemerkungen:

1. Ist $C = -n$ (denn einen grössern negativen Werth kann C nicht haben), so wird

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n(-1 + \cos 2\zeta)}}$$

und es ist daher nothwendig der Winkel $\zeta = 0$. Es wird näm-

lich der Punkt A immer mit F zusammenfallen und sich mit ihm gleichförmig um die Axe IA drehen.

2. Ist $C=0$, so wird der Winkel $\zeta < \pm 45^0$, er wird sich also innerhalb der Grenzen $+45^0$ und -45^0 befinden. Der Punkt A wird sich daher niemals über 45^0 vom Punkte F entfernen, und sich bald vor bald hinter demselben befinden; seine Bewegung muss man aus der Gleichung

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n \cos 2\zeta}}$$

ableiten.

3. Ist $C=n$, so geht die Gleichung

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n(1+\cos 2\zeta)}}$$

über in die folgende

$$dt = \frac{d\zeta}{\cos\zeta\sqrt{2n}},$$

deren Integral

$$t = \frac{1}{\sqrt{2n}} \log.\text{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\zeta)$$

ist, wenn nämlich für $t=0$ auch $\zeta=0$ gewesen ist. Hieraus ersieht man, dass erst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit

$$\zeta = 90^0$$

wird.

4. Ist $C>n$, so wird sich der Punkt A von F in einer endlichen Zeit bis auf 90^0 entfernen, er wird hierauf weiter bis zu dem F entgegengesetzten Punkte fortschreiten und, indem er nach der andern Seite herumgeht, wieder nach F zurückkehren. Es sei nämlich

$$C = m^2 n,$$

wo $m^2 > 1$, alsdann wird, weil

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n(m^2+\cos 2\zeta)}}$$

ist, sehr nahe

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{m} - \frac{\cos 2\zeta}{2m^3}\right]$$

und wenn man intregrirt

$$t\sqrt{n} = \frac{\zeta}{m} - \frac{\sin 2\zeta}{4m^3}.$$

Hieraus folgt, dass der Winkel ζ nach und nach alle Werthe annimmt.

5. Bis jetzt haben wir $\Omega < \delta$ gesetzt, so dass die Bewegung des Punktes F geschwinder sei, als die drehende Bewegung um die Axe IC. Findet das Entgegengesetzte statt, so hat man nur

das Zeichen der Formel $\sqrt{C + n\cos 2\zeta}$ zu ändern.

Fall II., wo $b^2 < a^2$.

§. 826. Es sei daher

$$\frac{3ge^2(a^2 - b^2)}{c^2 s^3} = n\text{, wonach}$$

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{C - n\cos 2\zeta}} \text{ und } \Omega = \delta - \sqrt{C - n\cos 2\zeta}$$

wird. Setzt man in diesen Gleichungen $\zeta = 90^0 + \varphi$, so dass φ den Abstand des Poles B vom Mittelpunkte der Kräfte F, rückläufig genommen bezeichnet; so ergeben sich die vorhergehenden Formeln, welche deswegen dieselben Erscheinungen darstellen werden.

Zusatz 1.

§. 827. Setzen wir daher voraus, dass für $b^2 > a^2$ der Mittelpunkt der Kräfte F anfangs mit dem Pole A zusammengefallen sei, so wird der Körper immer dieselbe Seite dem Punkte F zuwenden, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Geschwindigkeit δ des Mittelpunkts der Kräfte gleich war.

Zusatz 2.

§. 828. Wenn aber im Anfange, wo F mit A zusammentraf, die Winkelgeschwindigkeit des Körpers Ω etwas grösser oder kleiner als δ war, der Unterschied aber nicht

$$\sqrt{2n} = \sqrt{\frac{6ge^2(b^2 - a^2)}{c^2 s^3}}$$

übertraf; so wird sich der Pol A nach beiden Seiten von F nicht über einen bestimmten Zwischenraum entfernen und um den letzten Punkt gleichsam Schwingungen auszuführen scheinen. Hierin erblickt man eine Aehnlichkeit mit der libratorischen Bewegung des Mondes.

Zusatz 3.

§. 829. Bei einer solchen libratorischen Bewegung ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers am grössten oder kleinsten, während der Punkt A mit F in Conjunction ist und sich hierauf entweder recht- oder rückläufig von ihm entfernen wird, wesshalb die kleinste Geschwindigkeit grösser als $\delta - \sqrt{2n}$ ist. Es ist daher möglich, dass eine solche Bewegung entsteht, während anfangs der Körper durchaus keine drehende Bewegung gehabt hat.

Anmerkung 1.

§. 830. Es bleibt demnach kein Zweifel übrig, dass die libratorische Bewegung des Mondes auf diese Weise entstehe; es ist selbst wahrscheinlich, dass beim Monde der Fall stattfindet, wonach ihm im Anfange durchaus keine drehende Bewegung beigebracht worden ist, dass aber ferner seine Hauptaxe IA, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit Ma^2 ein Minimum, der Erde zugewandt gewesen ist. Weil wir nun wissen, dass die Ausweichungen des Poles A von F sehr klein sind, werden wir die Zeit dieser Schwingungen bestimmen können. Da nämlich der Bogen $AF = \zeta$ sehr klein ist, so wird $\cos 2\zeta = 1 - 2\zeta^2$, mithin

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{C + n - 2n\zeta^2}}$$

und wenn man integrirt

$$t\sqrt{2n} = \text{arc.sin}.\left(\frac{\zeta\sqrt{2n}}{C+n}\right).$$

Da nun bei der grössten Digression $d\zeta = 0$ und $\zeta = \sqrt{\frac{C+n}{2n}}$ wird, so erhalten wir die Zeit, in welcher der Punkt A sich am weitesten von F entfernt,

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2n}} \text{ Secunden},$$

und die doppelte Zeit $\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$ ist diejenige, in welcher der Punkt A nach seiner Ausweichung von F wieder zu diesem zurückkehrt. Alsdann wird aber die Winkelgeschwindigkeit am kleinsten sein, wenn nämlich der Pol A sich rückläufig von F entfernt und es wird diese Winkelgeschwindigkeit

$$= \delta - \sqrt{C + n}.$$

Damit dieselbe verschwinde, muss die Constante $C = \delta^2 - n$ sein, und es wird daher in diesem Falle die grösste Ausweichung nothwendig $= \frac{\delta}{\sqrt{2n}}$. Betrachten wir nun auch die Zeit Eines Umlaufes des Mittelpunktes der Kräfte F, welche $= \frac{2\pi}{\delta}$ Secunden ist, und wird deren Hälfte Einer Schwingungszeit des Poles A oder $\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$ gleich; so haben wir

$$\delta = \sqrt{2n} \text{ oder } n = \frac{\delta^2}{2} \text{ und } C = \frac{\delta^2}{2} = n.$$

Es würde demnach die Digression nicht mehr sehr klein sein, wie wir angenommen haben.

Anmerkung 2.

§. 831. Wir schliessen daher hieraus, dass die libratorische Bewegung des Mondes nicht erklärt werden kann, indem wir annehmen, es sei ihm im Anfange durchaus keine drehende Bewegung beigebracht worden. Da es vielmehr sehr wahrscheinlich ist, dass, wenn der Mond sich um die Erde in einer Kreisbahn gleichförmig bewegte, was die Voraussetzung unserer Aufgabe ist, er immerwährend uns dieselbe Seite zuwenden und keine Nutation an derselben bemerkbar sein würde; so müssen wir unter derselben Voraussetzung annehmen, es sei dem Monde im Anfange eine solche drehende Bewegung beigebracht worden, dass seine Winkelgeschwindigkeit genau $=\delta$, d. h. gleich der Geschwindigkeit der Erde um den Mond und zugleich seine Axe IA gegen die Erde gerichtet gewesen ist. Diess ist aber hinreichend wahrscheinlich, da nämlich in Bezug auf die Axe IA das Moment der Trägheit sehr klein ist und, wenn sein Körper als ein oblonges Sphäroid vorausgesetzt wird, seine grösste Axe die Ursache sein konnte, welche anfangs diese Axe der Erde zugewandt hat. Ferner muss man es vielleicht derselben Ursache zuschreiben, dass, während der Mond die erste Bewegung annahm, eben diese Axe ihre Richtung gegen die Erde beibehalten hat; diess ist dasselbe, als ob die erste Winkelgeschwindigkeit der Geschwindigkeit der Erde δ gleich gewesen wäre. Da also der Mond, wenn er einen Kreis um die Erde mit gleichförmiger Bewegung beschriebe, uns beständig dieselbe Seite zuwenden würde; so müssen die beobachteten Librationen seiner unregelmässigen Bewegung, bei welcher er bald schneller bald langsamer fortschreitet, zugeschrieben werden.

Wir wollen daher die vorhergehende Aufgabe auch unter der Voraussetzung auflösen, dass der Punkt F weder gleichförmig herumgeführt werde, noch beständig denselben Abstand vom Mittelpunkte der Trägheit des Körpers behalte.

Aufgabe 94.

§. 832. Ein Körper dreht sich um seine Hauptaxe IC, der Mittelpunkt der Kräfte F wird aber in einer auf jene normalen Ebene weder gleichförmig noch in demselben Abstande herumgeführt, ferner ist im Anfange die Axe IA nach dem

Mittelpunkt der Kräfte F gerichtet gewesen und hat eine ähnliche Bewegung empfangen; man soll die libratorische Bewegung des Körpers bestimmen.

Auflösung.

Die unregelmässige Bewegung des Punktes F wird man so ausdrücken können, dass er in der Zeit t den Bogen $XF = \delta t + \alpha \sin At$ beschrieben habe und es sei, zur Bestimmung des veränderlichen Abstandes

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \beta \cos At).$$

Ist daher jetzt die Winkelgeschwindigkit $= \Omega$, so wird, wenn man den Bogen $XA = \lambda$ setzt,

$$d\lambda = \Omega dt,$$

und wir erhalten, wenn wir den Bogen $AF = \zeta$ setzen,

$$d\Omega = \frac{3ge^2(b^2 - a^2)dt \sin 2\zeta}{c^2 s^3}.$$

Da nun $\lambda = \delta t + \alpha \sin At - \zeta$ ist, so wird

$$\Omega = \delta + A\alpha \cos At - \frac{d\zeta}{dt},$$

und wenn wir $\frac{3ge^2(b^2 - a^2)}{c^2 f^3} = n$ setzen,

$$-A^2\alpha\, dt \sin At - \frac{dd\zeta}{dt} = ndt(1 + \beta \cos At) \sin 2\zeta.$$

Nehmen wir nun an, dass der Bogen ζ immer sehr klein bleibe, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{dd\zeta}{dt^2} + A^2\alpha \sin At + 2n\zeta(1 + \beta \cos At) = 0.$$

Dieser kann man sehr nahe Genüge leisten, indem man $\zeta = m \sin At$ setzt, wodurch wir erhalten, weil das Glied $\beta \cos At$ sehr klein im Vergleich mit 1 ist:

$$-A^2 m \sin At + A^2 \alpha \sin At + 2mn \sin At = 0.$$

Hieraus folgt $m = \frac{A^2\alpha}{A^2 - 2n}$, also

$$\zeta = \frac{A^2\alpha}{A^2 - 2n} \sin At \text{ und}$$

$$\Omega = \delta + A\alpha \cos At - \frac{A^3 \alpha \cos At}{A^2 - 2n}$$
$$= \delta - \frac{2A\alpha n}{A^2 - 2n} \cos At.$$

Da nun hier $XF = \delta t + \alpha \sin At$ ist, so wird der erstere Theil δt der mittlere Ort des Punktes F und der zweite Theil

$\alpha \sin At$ seine Gleichung oder Prostaphäresis genannt, woraus sich ergibt, dass seine Ausweichung FA dieser Mittelpunktsgleichung proportional und, weil n positiv, grösser als sie ist. So oft daher die Mittelpunktsgleichung verschwindet, oder der wahre Ort mit dem mittlern übereinstimmt, wendet der Körper dem Mittelpunkte der Kräfte F dieselbe Seite zu, wobei freilich die kleinern Ungleichheiten, welche das Verhältniss der Grösse β herbeiführen würde, vernachlässigt sind. Diess aber weiter zu verfolgen und genauer zu bestimmen, ist ohne grössere Kenntniss der Astronomie nicht angemessen.

Zusatz 1.

§. 833. Drückt man demnach die Ungleichheit der Bewegung des Punktes F so aus, dass er in der Zeit t den Bogen

$$XF = \delta t + \alpha \sin At$$

zurücklegen soll, so wird in derselben Zeit der Bogen der Libration

$$FA = \zeta = \frac{A^2\alpha}{A^2 - 2n} \sin At,$$

wo $n = \dfrac{3ge^2(b^2 - a^2)}{c^2f^3}$ ist und f den mittlern Abstand des Mittelpunktes der Kräfte F bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 834. Wollen wir diesen Librationsbogen ζ genauer bestimmen, so tritt auch die Veränderlichkeit des Abstandes $FI = s$ in die Rechnung ein, so dass, wenn $\dfrac{1}{s^3} = \dfrac{1}{f^3}(1 + \beta \cos At)$ ist, man findet

$$\zeta = \frac{A^2\alpha}{A^2 - 2n} \sin At + \frac{n\alpha\beta}{4(A^2 - 2n)} \sin 2At.$$

Zusatz 3.

§. 835. Ist auf ähnliche Weise allgemeiner der in der Zeit t beschriebene Bogen

$$XF = C + \delta t + \alpha \sin(At + \mathfrak{A}) + \alpha' \sin(A't + \mathfrak{A}') \text{ etc.}$$

und $\dfrac{1}{s^3} = \dfrac{1}{f^3}\Big[1 + \beta \cos(At + \mathfrak{A}) + \beta' \cos(A't + \mathfrak{A}') \text{ etc.}\Big]$;

so findet man sehr nahe den Bogen der Libration

$$FA = \zeta = \frac{A^2\alpha}{A^2 - 2n} \sin(At + \mathfrak{A}) + \frac{A'^2\alpha'}{A'^2 - 2n} \sin(A't + \mathfrak{A}') + \text{etc.}$$

Anmerkung 1.

§. 836. Hier ist es gleichgültig, ob $n = \dfrac{3ge^2(b^2 - a^2)}{c^2f^3}$ positiv

oder negativ ist, und es findet die oben erforderlich gewesene Bedingung, dass für das Verschwinden des Bogens ζ, $b^2 > a^2$ sein muss, nicht mehr statt. Setzt man nämlich im Fall II. (§. 826.) $C = n$, so wird

$$dt\sqrt{2n} = \frac{d\zeta}{\sin\zeta} \text{ und } t\sqrt{2n} = \log(\operatorname{tg} {}^1\!/\!_2\zeta) - \text{Const.};$$

wonach, wenn im Anfange für $t = 0$, $\zeta = 0$ gewesen ist, eine unendlich grosse Constante hinzugefügt werden muss, so dass nur nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit der Punkt A sich von F entfernen wird. Wenn daher, während der Punkt F gleichförmig auf einem Kreise herumgetragen wird, eine beliebige Hauptaxe anfangs nach dem Punkte F gerichtet war und zugleich mit demselben und mit gleicher Geschwindigkeit sich zu drehen angefangen hat; so wird sie beständig mit ihm in Verbindung bleiben. Nimmt hierauf ferner der Punkt F eine grössere oder kleinere Bewegung an, so wird der Pol A sich von ihm, den gefundenen Formeln entsprechend, entfernen. Es ist auch klar, dass, wenn $n = 0$ oder $b^2 = a^2$ wäre, in welchem Falle der Körper sich gleichförmig um den Pol C dreht, die Entfernungen ζ beständig dem Unterschiede zwischen dem mittlern und dem wahren Orte des Punktes F gleich sein würden. Ist aber n positiv oder $b^2 > a^2$, so werden die Entfernungen grösser als dieser Unterschied sein, hingegen kleiner, wenn $b^2 < a^2$ ist. Uebrigens lässt sich die Zahl A, welche die Ungleichheit der Bewegung bestimmt, aus der Zeit ableiten, nach welcher die Ungleichheit $\sin At$ zu denselben Werthen zurückkehrt. Geschieht dies nach Θ Secunden, so wird

$$\sin A\Theta = \sin 2\pi, \text{ also } A = \frac{2\pi}{\Theta}.$$

Anmerkung 2.

§. 837. Es ergibt sich hieraus, dass die Libration des Mondes, vermöge welcher er der Erde nicht immer dieselbe Seite zuwendet, am meisten dem Mangel einer gleichförmigen Bewegung, wodurch die Erde um den Mond oder, was dasselbe ist, der Mond um die Erde scheinbar herumgeführt wird, zugeschrieben werden muss, und dass die Ungleichheit der Hauptmomente im Monde nicht viel hierzu beiträgt, weil diese nur auf die Coefficienten der Glieder einwirkt. Die Libration würde nämlich auch stattfinden können, wenn der Mond kugelförmig oder seine Hauptmomente gleich wären. Es stellt sich aber dann kein Grund dar, warum dem Monde im Anfange eine ge-

nau eben so grosse Bewegung, als unsere Formeln angeben, beigebracht sein sollte. Ist aber der Mond ein sphäroidischer, entweder verlängerter oder zusammengedrückter Körper, so können wir auf eine gewisse Weise den Grund einsehen, wesshalb im Anfange eine bestimmte und vor den übrigen bemerkbare Hauptaxe angefangen hat, der Erde zugewandt zu sein. Ob er aber ein verlängertes oder zusammengedrücktes Sphäroid sei, lässt sich nach der Grösse der Libration beurtheilen; denn wenn diese den Unterschied zwischen dem wahren und dem mittlern Orte des Mondes überschreitet, so ist dies ein Zeichen, dass $b^2 > a^2$ ist, oder dass die der Erde zugewandte Axe des Mondes das kleinste Moment hat. Es ist hier aber nicht der Ort, irgend etwas zu bestimmen, da der Mond auch gegen die Sonne gedrängt und so die Libration gestört wird. Ausserdem wird aber auch, so wie der Mond sich nicht in derselben Ebene um die Erde bewegt, umgekehrt die Bewegung des Mittelpunktes der Kräfte F nicht in derselben Ebene um den Mond ausgeführt, wodurch diese Untersuchung so sehr verwickelt wird, dass sie in einer allgemeinen Abhandlung nicht Platz finden kann. Uebrigens würde es immer ein ausgezeichnetes Geheimniss sein, dass der Mond anfangs eine genau so grosse drehende Bewegung empfangen hat, als dieser Fall der Libration es verlangt; wäre ihm nämlich eine grössere oder kleinere beigebracht worden, so würde er uns im Verlaufe der Zeit die entgegengesetzte Seite haben zuwenden müssen. Indessen erfordert diese Erscheinung den vorgeschriebenen Grad der Geschwindigkeit nicht so genau, weil, wenn dieselbe auch ein wenig grösser oder kleiner gewesen sein sollte, die Librationen dennoch nach der vorhergehenden Aufgabe stattfinden müssten; hierdurch wird das Geheimniss nicht wenig aufgehellt. Ein solcher Spielraum kann aber nur dann zugelassen werden, wenn

$$b^2 > a^2 \text{ oder } n > 0$$

ist. Die Differentialgleichung

$$\frac{dd\zeta}{dt^2} + A^2\alpha \sin At + 2n\zeta(1 + \beta \cos At) = 0$$

kann nämlich allgemeiner, indem eine willkührliche Constante hinzutritt, so integrirt werden, dass

$$\zeta = C \sin t\sqrt{2n} + \frac{A^2\alpha}{A^2 - 2n} \sin At$$

ist, wodurch die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \delta - C\sqrt{2n}\cos t\sqrt{2n} - \frac{2A\alpha n}{A^2 - 2n}\cos At$$

wird. Man kann hier auch statt $t\sqrt{2n}$ schreiben $(t+\gamma)\sqrt{2n}$, so dass C und γ beliebig angenommen werden. Da also im Anfange für $t=0$,

$$\zeta = C\sin\gamma\sqrt{2n}$$

war, während die beigebrachte Winkelgeschwindigkeit

$$= \delta - C\sqrt{2n}\cos\gamma.\sqrt{2n} - \frac{2A\alpha n}{A^2 - 2n}$$

und C ein hinreichend kleiner Bruch ist; so ergibt sich eine solche libratorische Bewegung, dass beständig ein gewisser Theil des Mondes uns verborgen bleibt. Es muss aber der Bruch $\frac{A^2\alpha}{A^2-2n}$ sehr klein sein, damit man statt $\sin 2\zeta$ mit Recht 2ζ setzen darf.

Anmerkung 3.

§. 838. Die Erklärung der libratorischen Bewegung des Mondes kommt demnach darauf hinaus, dass wir feststellen, es sei der Mond ein verlängertes Sphäroïd, dessen grössere Axe oder diejenige, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit den kleinsten Werth hat, anfangs gegen die Erde gerichtet gewesen ist; es sei aber dem Monde um eine, auf die Ebene der Erdbahn normale, Axe eine drehende Bewegung beigebracht worden, deren Winkelgeschwindigkeit nahebei der mittlern Bewegung des Mondes gleich war, worin übrigens ein namhafter Spielraum stattfinden konnte. Es ist selbst auch hinreichend, wenn nur nahebei die Drehungsaxe auf die Ebene der Erdbahn normal und die grössere Axe gegen die Erde gerichtet gewesen ist. Denn auch in diesem Falle muss eine umgekehrte Nutation der Mondscheibe eintreten, wenn wir dieselbe auch nicht leicht bestimmen können.

Indem wir nun diesen Fall verlassen, wollen wir zu andern, aus den Centripetalkräften entspringenden Störungen der drehenden Bewegung fortschreiten, wodurch man die Nutation der Erdaxe erklären kann.

Aufgabe 95.

§. 839. Ein Körper dreht sich um eine Axe, welche einer der Hauptaxen sehr nahe liegt und ist zugleich der Einwirkung des Mittelpunktes der Kräfte unterworfen; man soll die augen-

blickliche, so wohl in der Drehungsaxe als in der Winkelgeschwindigkeit hervorgebrachte, Aenderung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 112.) Es seien A, B und C die drei Hauptpole des Körpers, und in Bezug auf sie Ma^2, Mb^2 und Mc^2 die Momente der Trägheit, der Körper drehe sich aber jetzt um den A sehr nahe liegenden Pol O mit der Winkelgeschwindigkeit Ω im Sinne ABC. Es wird daher, wenn man die drei Bogen $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$ setzt, der Bogen α sehr klein, β und γ aber sehr wenig von 90° verschieden, so dass man

$$\cos\alpha = 1 \text{ und } \cos\beta = \cos\gamma = 0$$

setzen kann. Wenn wir nun $x=\Omega\cos\alpha$, $y=\Omega\cos\beta$ und $z=\Omega\cos\gamma$ setzen, so wird man also y und z für verschwindend klein halten können, aber nicht ihre Differentiale, welche

$$dy = -\Omega d\beta \text{ und } dz = -\Omega d\gamma$$

sein werden. Eine nach dem Mittelpunkte der Kräfte gezogene gerade Linie gehe nun durch den Punkt F, und es seien die Bogen $AF=\zeta$, $BF=\eta$ und $CF=\theta$; der Abstand des Mittelpunktes der Kräfte werde $=s$ und seine anziehende Kraft so gross angenommen, dass sie im Abstande e der Schwere gleich wird. Durch die Wirksamkeit dieser Kraft werden demnach die Grössen x, y und z im Zeittheilchen dt so geändert werden, dass man (nach §§. 812. und 814.) hat:

$$dx + \frac{c^2-b^2}{a^2}yzdt = \frac{6ge^2(c^2-b^2)dt\cos\eta\cos\theta}{a^2s^3}$$

$$dy + \frac{a^2-c^2}{b^2}xzdt = \frac{6ge^2(a^2-c^2)dt\cos\zeta\cos\theta}{b^2s^3}$$

$$dz + \frac{b^2-a^2}{c^2}xydt = \frac{6ge^2(b^2-a^2)dt\cos\zeta\cos\eta}{c^2s^3}.$$

Da nun $dx=d\Omega$ ist, so wird wegen der verschwindend kleinen Werthe von y und z

$$d\Omega = \frac{6ge^2(c^2-b^2)\,dt\cos\eta\cos\theta}{a^2s^3},$$

$$-\Omega d\beta = \frac{6ge^2(a^2-c^2)dt\cos\zeta\cos\theta}{b^2s^3}$$

und

$$-\Omega d\gamma = \frac{6ge^2(b^2-a^2)dt\cos\zeta\cos\eta}{c^2s^3}.$$

Um diese Veränderung sorgfältiger zu erforschen, wollen wir den Bogen FO suchen, da aber (§. 808.)

$$\sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}, \quad \cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}, \quad \sin BAF = \frac{\cos\theta}{\sin\zeta}$$

und

$$\cos BAF = \frac{\cos\eta}{\sin\zeta}$$

ist; so wird

$$\sin FAO = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta},$$

$$\cos FAO = \frac{\cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta}$$

und hieraus

$$\cos FO = \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta + \cos\alpha\cos\zeta.$$

Das Differential dieser Gleichung wird, weil $\sin\beta = \sin\gamma = 1$ und $\sin\alpha = 0$ ist,

$$(Fo - FO)\sin FO = \cos\eta d\beta + \cos\theta d\gamma;$$

da aber $FO = FA = \zeta$ ist, so erhält man

$$(Fo - FO)\sin\zeta = -\frac{6ge^2 dt\cos\zeta\cos\eta\cos\theta}{\Omega s^3}\left[\frac{a^2 - c^2}{b^2} + \frac{b^2 - a^2}{c^2}\right]$$

oder

$$Fo - FO = \frac{6ge^2(c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)dt\cos\zeta\cos\eta\cos\theta}{\Omega b^2 c^2 s^3\sin\zeta}.$$

Zur Bestimmung der Lage des Punktes o haben wir, weil

$\operatorname{tg} BAO = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$ ist,

$$-\frac{OAo}{\cos BAO^2} = \frac{-d\gamma\cos\beta\sin\gamma + d\beta\cos\gamma\sin\beta}{\cos\beta^2};$$

also

$$OAo = \frac{d\gamma\cos\beta\sin\gamma - d\beta\cos\gamma\sin\beta}{\sin\alpha^2} \text{ und } Oo = \sqrt{d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

Da aber ferner

$$d\alpha = \frac{-d\beta\sin\beta\cos\beta - d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

so wird, wegen $\cos\alpha = 1$,

$$\operatorname{tg} OoA = \frac{d\beta\sin\beta\cos\gamma - d\gamma\sin\gamma\cos\beta}{d\beta\sin\beta\cos\beta + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}$$
$$= \frac{d\beta\cos\gamma - d\gamma\cos\beta}{d\beta\cos\beta + d\gamma\cos\gamma}.$$

Zusatz 1.

§. 840. Sind die Momente der Trägheit in Bezug auf die Axen IB und IC einander gleich, oder ist $b^2 = c^2$, so wird zuerst $d\Omega = 0$, oder es erleidet die Winkelgeschwindigkeit keine Veränderung.

Ferner wird aber

$$d\beta = -\frac{6ge^2(a^2-c^2)dt\cos\zeta\cos\theta}{\Omega c^2 s^3}$$

und

$$d\gamma = \frac{6ge^2(a^2-c^2)dt\cos\zeta\cos\eta}{\Omega c^2 s^3},$$

so dass

$$d\beta\cos\eta + d\gamma\cos\theta = 0$$

wird.

Zusatz 2.

§. 841. In diesem Falle, wo $b^2 = c^2$ ist, wird

$$Fo - FO = 0,$$

oder es wird der Drehungspol O so nach o übertragen, dass der kleine Weg Oo normal auf den Bogen FO ist. Es wird ferner dieser kleine Weg

$$Oo = \frac{6ge^2(a^2-c^2)dt\cos\zeta\sin\zeta}{\Omega c^2 s^3}$$

und es fragt sich nun, ob derselbe von O gegen FA, oder entgegengesetzt gerichtet ist.

Zusatz 3.

§. 842. Da aber $\sin FO : \sin FAO = \sin AO : \sin AFO$, so wird

$$\sin AFO = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\sin\zeta\sin FO} \quad (§. 840.)$$

Weil nun FO sich nicht verändert, so wird nach der Figur, worin man O als AF sich nähernd angenommen hat, durch Differentiation:

$$-OFo.\cos AFO = \frac{-d\gamma\cos\eta + d\beta\cos\theta}{\sin\zeta\sin FO}$$

$$= -\frac{6ge^2(a^2-c^2)dt\sin\zeta\cos\zeta}{\Omega c^2 s^3\sin FO},$$

und daher

$$OFo = \frac{6ge^2.(a^2-c^2)dt\sin\zeta\cos\zeta}{\Omega c^2 s^3\sin FO.\cos AFO}.$$

Der Winkel AFO ist aber unendlich klein, also $\cos AFO = 1$, ferner $FO = FA = \zeta$, also

$$OFo = \frac{6ge^2(a^2-c^2)dt\cos\zeta}{\Omega c^2 s^3}$$

und es wird, wenn $a^2 > c^2$ ist, der Punkt O sich dem Bogen AF nähern oder um A im Sinne CB fortschreiten.

Anmerkung.

§. 843. Dieser Fall, in welchem $b^2 = c^2$ ist, so dass der Körper zwei gleiche Hauptmomente in Bezug auf die Axen IB und IC hat und er sich nahebei um die besondere Axe IA mit

der Winkelgeschwindigkeit Ω im Sinne BC dreht, findet vorzüglich bei der drehenden Bewegung der Erde statt und verdient daher vollständiger entwickelt zu werden. Damit diess leichter geschehen könne, setzen wir, weil $AO=\alpha$ ist, den Winkel $BAO=\varrho$ und es wird alsdann

$$90^0-\beta=\alpha\cos\varrho \text{ und } 90^0-\gamma=\alpha\sin\varrho,$$

oder

$$\beta=90^0-\alpha\cos\varrho \text{ und } \gamma=90^0-\alpha\sin\varrho.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen $\frac{3ge^2(a^2-c^2)}{\Omega c^2 s^3}=N$, so dass

$$d\beta=-2Ndt\cos\zeta\cos\theta \text{ und } d\gamma=2Ndt\cos\zeta\cos\eta$$

wird; so erhalten wir

$$-d\alpha.\cos\varrho+\alpha d\varrho.\sin\varrho=-2Ndt\cos\zeta\cos\theta$$

und

$$-d\alpha.\sin\varrho-\alpha d\varrho.\sin\varrho=2Ndt\cos\zeta\cos\eta.$$

Aus diesen zwei Gleichungen leitet man ab:

$$d\alpha=2Ndt\cos\zeta[\cos\varrho\cos\theta-\sin\varrho\cos\eta]$$

und

$$\alpha d\varrho=-2Ndt\cos\zeta[\sin\varrho\cos\theta+\cos\varrho\cos\eta].$$

Legen wir nun dem Mittelpunkte der Kräfte F eine beliebige Bewegung bei, so werden wir auch so lange diese Formeln benutzen können, als der Bogen $AO=\alpha$ so klein bleibt, dass die angewandten Zusammenziehungen stattfinden dürfen.

Aufgabe 96.

§. 844. Ein Körper hat zwei gleiche Hauptmomente und dreht sich nahebei um die dritte Hauptaxe, der Mittelpunkt der Kräfte aber wird gleichförmig im Kreise um den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers herumgeführt; man soll zu jeder Zeit die Lage und Bewegung des Körpers bestimmen.

Auflösung.

(Figur 113.) Es schreite der Mittelpunkt der Kräfte durch den grössten Kreis XFY mit der Winkelgeschwindigkeit $=\delta$ fort, und es sei derselbe im Verlauf der Zeit t von X nach F gelangt, so dass $XF=\delta t$ ist. Man betrachte daher auf der Kugel den festen Kreis XZY, auf welchem Z der Pol des Kreises XFY ist, so dass der Winkel $XZF=\delta t$ wird. Nun befinde sich aber die besondere Axe des Körpers in A, und man setze den Winkel $XZA=\lambda$, wie auch den Bogen $ZA=p$; hierauf sei AB, welcher vom Bogen ZA um den Winkel $ZAB=q$ absteht, gleichsam des Körpers erster Meridian. Ferner drehe sich der Körper jetzt um die Axe IO, so dass der sehr kleine Bogen $AO=\alpha$ und der Winkel $BAO=\varrho$ ist, mit der Winkelgeschwindigkeit $=\varepsilon$. Weil wir nun wissen, dass diese

constant ist, wird der Punkt A im Zeittheilchen dt nach a übergehen, so dass $Aa = \varepsilon dt \sin\alpha = \alpha\varepsilon dt$ und der Winkel aAO ein Rechter ist. Es wird daher, weil $ZAO = q + \varrho$ ist, $ZAa = q + \varrho - 90^0$, und wenn man das Perpendikel $a\alpha$ auf ZA fällt, so wird

$$a\alpha = -\alpha\varepsilon dt\cos(q+\varrho) \text{ und } A\alpha = \alpha\varepsilon dt\sin(q+\varrho).$$

Hieraus schliessen wir, dass

$$dp = -\alpha\varepsilon dt\sin(q+\varrho) \text{ und } d\lambda = \frac{\alpha\varepsilon dt\cos(q+\varrho)}{\sin p}$$

ist, und weil der Körper sich gleichsam um den Pol A dreht, erhalten wir $dq = \varepsilon dt.$

Endlich findet man im Dreieck AZF, wo $ZA = p$, $ZF = 90^0$ und $AZF = \lambda - \delta t$ ist,

$$\cos FA = \cos\zeta = \sin p\cos(\lambda - \delta t) \text{ und } \operatorname{cotg} ZAF = -\cos p\operatorname{cotg}(\lambda - \delta t).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen den Winkel $ZAF = \varphi$, so dass $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\operatorname{tg}(\lambda - \delta t)}{\cos p}$ und $BAF = \varphi - q$ ist; so erhalten wir hieraus

$$\cos BF = \cos(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\eta \text{ und } \cos CF = \sin(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\theta.$$

Es ist aber

$$\sin\varphi\sin\zeta = \sin(\lambda - \delta t) \text{ und } \cos\varphi\sin\zeta = -\cos p\cos(\lambda - \delta t),$$

also $\cos\eta = -\cos p\cos q\cos(\lambda - \delta t) + \sin q\sin(\lambda - \delta t)$

und $\cos\theta = \cos q\sin(\lambda - \delta t) + \cos p\sin q\cos(\lambda - \delta t).$

Setzt man nun $\frac{3ge^2(a^2 - c^2)}{\varepsilon c^2 s^3} = N$, so erhält man (§. 843.)

$$d\alpha = 2Ndt\sin p\cos(\lambda - dt)[\cos p\sin(q+\varrho)\cos(\lambda - \delta t) + \cos(q+\varrho)\sin(\lambda - \delta t)]$$

und

$$\alpha d\varrho = -2Ndt\sin p\cos(\lambda - \delta t)[\sin(q+\varrho)\sin(\lambda - \delta t) - \cos p\cos(q+\varrho)\cos(\lambda - \delta t)]$$

und verbindet man hiermit

$$dq = \varepsilon dt \text{ und } dp = -\alpha\varepsilon dt\sin(q+\varrho);$$

so hat man mittelst dieser vier Gleichungen die vier Grössen p, q, α und ϱ zu bestimmen. Die zwei ersten lassen sich in diese einfacheren umformen:

$$d\alpha.\cos(q+\varrho) - \alpha d\varrho.\sin(q+\varrho) = 2Ndt\sin p\sin(\lambda - \delta t)\cos(\lambda - \delta t$$

und

$$d\alpha.\sin(q+\varrho) + \alpha d\varrho.\cos(q+\varrho) = 2Ndt\sin p\cos p\cos(\lambda - \delta t)^2.$$

Da nun $q = \varepsilon t + C$ ist, so setzen wir $q + \varrho = \omega$, also $\varrho = \omega - q$ und indem wir die frühern Gleichungen hinzufügen, haben wir folgende vier:

$dp = -\varepsilon\alpha dt \sin\omega$

$d\lambda = \dfrac{\varepsilon\alpha dt\cos\omega}{\sin p}$

$d\alpha.\cos\omega - \alpha d\omega.\sin\omega + \varepsilon\alpha dt\sin\omega = 2Ndt\sin p\sin(\lambda-\delta t)\cos(\lambda-\delta t)$

$d\alpha.\sin\omega + \alpha d\omega.\cos\omega - \varepsilon\alpha dt\cos\omega = 2Ndt\sin p\cos p\cos(\lambda-\delta t)^2$.

Setzen wir nun überdem $\lambda - \delta t = \varphi$, welcher Buchstab nicht mit dem vorhergehenden φ zu verwechseln ist, so erhalten wir

$$dp = -\varepsilon\alpha dt\sin\omega$$

$$d\varphi = -\delta dt + \frac{\varepsilon\alpha dt\cos\omega}{\sin p}$$

$$d\alpha.\cos\omega - \alpha d\omega.\sin\omega + \varepsilon\alpha dt\sin\omega = 2Ndt\sin q\sin\varphi\cos\varphi$$

$$d\alpha.\sin\omega + \alpha d\omega.\cos\omega - \varepsilon\alpha dt\cos\omega = 2Ndt\sin p\cos p\cos\varphi^2.$$

Nun setzen wir ferner $\alpha\cos\omega = x$ und $\alpha\sin\omega = y$, damit wir die folgenden Gleichungen erhalten:

1) $dp = -\varepsilon y dt$; 2) $d\lambda = \dfrac{\varepsilon x dt}{\sin p}$; 3) $d\varphi = -\delta dt + \dfrac{\varepsilon x dt}{\sin p}$;

4) $dx + \varepsilon y dt = Ndt\sin p\sin 2\varphi$;

5) $dy - \varepsilon x dt = Ndt\sin p\cos p + Ndt\sin p\cos p\cos 2\varphi$.

Da x und y sehr kleine Grössen sind, so werden wir uns der Wahrheit hinreichend nähern, wenn wir in den zwei letzten Gleichungen den Bogen p und den Winkel λ als constant betrachten. Legen wir demnach denselben gleichsam mittlere Werthe bei, so dass sehr nahe $p = n$ und $\lambda = m$, also $d\varphi = -\delta dt$ ist; so erhalten wir:

4) $dx - \dfrac{\varepsilon y d\varphi}{\delta} = -\dfrac{Nd\varphi}{\delta}\sin n\sin 2\varphi$

5) $dy + \dfrac{\varepsilon x d\varphi}{\delta} = -\dfrac{Nd\varphi}{\delta}\sin n\cos n - \dfrac{Nd\varphi}{\delta}\sin n\cos n\cos 2\varphi$.

Man wird diesen beiden Gleichungen offenbar Genüge leisten können, indem man

$$x = E + F\cos 2\varphi \text{ und } y = G\sin 2\varphi$$

setzt und die Coefficienten so bestimmt, dass

$$E = -\frac{N\sin n\cos n}{\varepsilon}, \quad F = -\frac{N\sin n(2\delta + \varepsilon\cos n)}{\varepsilon^2 - 4\delta^2}$$

und

$$G = \frac{N\sin n(2\delta\cos n + \varepsilon)}{\varepsilon^2 - 4\delta^2}$$

wird. Weil aber diese Auflösung nur eine besondere ist, setze man $x = E + F\cos 2\varphi + u$ und $y = G\sin 2\varphi + v$; es ergeben sich alsdann die zwei Gleichungen

$$du - \frac{\varepsilon v d\varphi}{\delta} = 0 \text{ und } dv + \frac{\varepsilon u d\varphi}{\delta} = 0,$$

aus welchen man

$$u = h \sin \frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta) \text{ und } v = h \cos \frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$$

ableitet, wobei h und ζ beliebige Constanten sind. Wir haben demnach

$$x = \alpha \cos \omega = -\frac{N \sin n \cos n}{\varepsilon} - \frac{N \sin n(2\delta + \varepsilon \cos n)}{\varepsilon^2 - 4\delta^2} \cos 2\varphi + h \sin \frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$$

und

$$y = \alpha \sin \omega = \frac{N \sin n(2\delta \cos n + \varepsilon)}{\varepsilon^2 - 4\delta^2} \sin 2\varphi + h \cos \frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta),$$

wo φ den Winkel $FZA = \lambda - \delta t$ ausdrückt. Da nun

$$dp = -\varepsilon y dt = \frac{\varepsilon y d\varphi}{\delta}$$

ist, so erhalten wir durch Integration

$$p = n - \frac{\varepsilon N \sin n(2\delta \cos n + \varepsilon)}{2\delta(\varepsilon^2 - 4\delta^2)} \cos 2\varphi + h \sin \frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta) = ZA.$$

Endlich wird die Gleichung

$$d\lambda = \frac{\varepsilon x dt}{\sin p} = -\frac{\varepsilon x d\varphi}{\delta \sin n}$$

ergeben

$$\lambda = m - Nt \cos n + \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon^2 - 4\delta^2)} \sin 2\varphi + \frac{h}{\sin n} \cos \frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta) = XZA.$$

Zusatz 1.

§. 845. Da nach unserer Annahme $\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, so ersieht man, dass im Verlauf der Zeit der Abstand $AO = \alpha$ nicht über eine gewisse Grenze zunehmen kann und ist diese hinreichend klein, so werden wir uns unserer Voraussetzung mit Sicherheit bedienen können. Zugleich ergibt sich aber auch, dass dieser Abstand α nur dann ganz verschwinden kann, wenn zufällig sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$ wird.

Zusatz 2.

§. 846. Vernachlässigt man die von den Winkeln $2\varphi = 2FZA$ und $\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$ abhängigen Ungleichheiten, so wird der Pol A sich gleichförmig um den Punkt Z, und zwar rückläufig mit der Winkelgeschwindigkeit $= N \cos n$ bewegen, wenn nämlich $N = \frac{3ge^2(a^2 - c^2)}{\varepsilon c^2 s^3}$ eine positive Zahl ist. Er wird auf diese

Weise einen ganzen Umlauf in der Zeit $= \frac{2\pi}{N \cos n}$ Secunden ausführen, während der Mittelpunkt der Kräfte F einen Umlauf in $\frac{2\pi}{\delta}$ und der Körper selbst in $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ Secunden ausführt.

Zusatz 3.

§. 847. Ausserdem aber erleiden sowohl der Abstand ZA, als auch der Winkel XZA geringe Ungleichheiten zum Theil von dem Winkel $2\varphi = 2FZA$, zum Theil von dem Winkel $\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta) = C - \varepsilon t$, d. h. Ungleichheiten, welche zum Theil von der Bewegung des Mittelpunktes der Kräfte, zum Theil von der drehenden Bewegung des Körpers selbst abhängig sind. Setzen wir daher den Winkel $ZAB = \psi$, so wird

$$ZA = n - \frac{\varepsilon N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{2\delta(\varepsilon^2 - 4\delta^2)} \cos 2\varphi - h \sin(\psi + \zeta) \quad \text{und}$$

$$XZA = m - Nt \cos n + \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon^2 - 4\delta^2)} \sin 2\varphi + \frac{h}{\sin n} \cos(\psi + \zeta).$$

Anmerkung 1.

§. 848. Wir haben hier angenommen, dass der Körper sich in demselben Sinne drehe, in welchem der Mittelpunkt der Kräfte F um ihn herumgeführt wird; wie diess bei der Erde geschieht, welche sich von Westen gegen Osten dreht, in welchem Sinne wir auch die Sonne und den Mond mit eigener Bewegung fortrücken sehen. Ferner haben wir auch die Zahl $N = \frac{3ge^2(a^2 - c^2)}{\varepsilon c^2 s^3}$ als positiv oder den Körper als so beschaffen betrachtet, dass sein Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe, um welche er sehr nahe sich dreht, ein maximum $= Ma^2$ sei, während das Moment in Bezug auf die im Aequator angenommenen Axen ein minimum und $= Mc^2$ ist. Dass die Erde diese Eigenschaften besitzt, zeigen die über die zusammengedrückte sphäroidische Gestalt derselben angestellten Beobachtungen. Bei dieser Einrichtung muss demnach die Axe der Erde sich um den Pol der Ekliptik Z rückläufig bewegen, wie diess durch die Beobachtungen erkannt wird. Ausserdem ist aber weder diese Bewegung der Axe gleichförmig, noch ihr Abstand vom Pole der Ekliptik Z constant, sondern einer doppelten Ungleichheit unterworfen, von denen die eine von dem doppelten Winkel $FZA = \varphi$, die andere aber von der drehenden

Bewegung des Körpers abhängig ist. Die letztere kann grösser oder kleiner sein, je nachdem im Anfange der Drehungspol O sowohl in Bezug auf den Pol A, als in Bezug auf die Lage des Mittelpunktes der Kräfte F gestellt gewesen ist. Es bezeichnet nämlich ω den Winkel ZAO, und wenn im Anfange oder wenigstens zu einer gegebenen Zeit ausser diesem Winkel die Grössen $AO=\alpha$, $ZAO=\omega$, $FZA=\varphi$ und $ZAB=\psi$ bekannt sind, wobei AB als erster Meridian des Körpers angenommen wird; so werden durch die zwei Gleichungen

$$\alpha\cos\omega+\frac{N\sin n\cos n}{\varepsilon}+\frac{N\sin n(\varepsilon\cos n+2\delta)}{\varepsilon^2-4\delta^2}\cos 2\varphi + h\sin(\psi+\zeta)=0$$

und

$$\alpha\sin\omega-\frac{N\sin n(\varepsilon+2\delta\cos n)}{\varepsilon^2-4\delta^2}\sin 2\varphi-h\cos(\psi+\zeta)=0$$

die zwei Constanten h und ζ bestimmt. Wenn demnach sich nicht etwa $h=0$ ergibt, so wird der Pol A tägliche Ungleichheiten erleiden, so dass er innerhalb einer jeden Umdrehung sich wechselweise dem Pole der Ekliptik nähert und von ihm entfernt, und zugleich wechselweise rück- oder rechtläufig schwankt. In Folge dieser Ungleichheit würde der Pol A in den einzelnen Umläufen einen Kreis beschreiben und da der Mittelpunkt des letztern ruhet, wird man ihn vielmehr für den wahren Pol der Erde halten, so dass diese Ungleichheiten nicht wahrgenommen werden. Alsdann werden aber die übrigen Ungleichheiten, welche von der Wirksamkeit des Mittelpunktes der Kräfte abhängig sind, nicht auf diesen scheinbaren, sondern auf den Pol der Hauptaxe selbst einwirken.

Anmerkung 2.

§. 849. Indem wir aber diese täglichen Ungleichheiten übergehen, welche vielleicht auf die Schwankung der Axe einwirken, so werden, wenn $a^2>c^2$ ist und der Körper sich in demselben Sinne, als der Mittelpunkt der Kräfte dreht, die Erscheinungen sich folgendermaassen verhalten:

Erstens wird der Abstand des Poles A vom Punkte Z, welcher der Scheitel oder Pol der vom Mittelpunkte der Kräfte beschriebenen Bahn ist, veränderlich sein und zwar den kleinsten Werth erhalten, wenn der Winkel $FZA=\varphi$ entweder $=0^0$ oder $=180^0$ ist; er wird aber den grössten Werth haben, wenn $\varphi=90^0$ oder $=270^0$ ist und es wird der Unterschied zwischen dem grössten und kleinsten Werthe

$$=\frac{\varepsilon N \sin n(\varepsilon+2\delta\cos n)}{\delta(\varepsilon^2-4\delta^2)}.$$

Zweitens wird der Pol A um den Punkt Z rückläufig mit ungleichförmiger Bewegung fortschreiten und wenn wir diese, wie es gebräuchlich ist, durch die um die Mittelpunktsgleichung zu verbessernde mittlere Bewegung darstellen; so wird er mit der mittleren Bewegung und der Winkelgeschwindigkeit $=N\cos n$ zurückschreiten. Alsdann wird aber die Correction oder die grösste Mittelpunktsgleichung

$$=\frac{\varepsilon N(\varepsilon\cos n+2\delta)}{2\delta(\varepsilon^2-4\delta^2)},$$

welche addirt werden muss, wenn $FZA=\varphi$ entweder 45^0 oder 225^0, hingegen subtrahirt, wenn φ entweder 135^0 oder 315^0 ist. Hierbei ist zu bemerken, dass dieser Winkel $FZA=\varphi$ gefunden wird, indem man die Länge des Mittelpunktes der Kräfte F von der Länge des Poles A subtrahirt. Uebrigens betrachten wir hier die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung ε als sehr gross, im Vergleich mit der Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kräfte δ; wäre nämlich $\varepsilon=2\delta$, so würden die gefundenen Versuche selbst ins Unendliche übergehen. In diesem Falle würde man aber die Integration unserer Gleichungen auf eine besondere Weise anzustellen haben; indem man nämlich

$$x=E+F\cos 2\varphi+A\varphi\sin 2\varphi \text{ und } y=G\sin 2\varphi+B\varphi\cos 2\varphi$$

setzt, wird man

$$E=-\frac{N\sin n\cos n}{2\delta},\quad A=B=-\frac{N\sin n(1+\cos n)}{2\delta}$$

und

$$F+G=\frac{N\sin n(1-\cos n)}{4\delta}$$

finden. Da aber hier x und y beständig wachsen und so die aufgestellte Hypothese bald überschreiten würden, so könnte die ganze Rechnung nicht mehr stattfinden. Unsere Formeln werden daher nur dann angewandt werden können, wenn ε^2 merklich von $4\delta^2$ verschieden ist.

Kapitel XVII.

Vollständigere Darstellung der Bewegung der Kreisel auf einer horizontalen Ebene, unter Beiseitesetzung der Reibung.

Erklärung 14.

§. 850. (Figur 114.) Die Axe des Kreisels ist die gerade Linie AF, welche aus der Spitze F durch den Mittelpunkt der Trägheit I gezogen und zugleich seine besondere Hauptaxe ist, so dass in Bezug auf alle auf dieselben normalen Axen IB die Momente der Trägheit unter sich gleich sind.

Zusatz 1.

§. 851. Die passendste Figur eines Kreisels ist demnach die gedrehete, welche erzeugt wird, indem eine beliebige Figur sich um die Axe AF herumwälzt; wenn nur dieselbe in der Spitze F, womit er auf der horizontalen Ebene fortschreiten kann, endet.

Zusatz 2.

§. 852. In einem Kreisel müssen aber die folgenden Grössen, welche in die Rechnung eintreten, bekannt sein:

1) seine Masse oder Gewicht, welches $= M$ sei;
2) der Abstand der Spitze vom Mittelpunkte der Trägheit, oder $IF = f$;
3) das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AF $= Ma^2$ und
4) das Moment der Trägheit in Bezug auf alle, auf jene normalen Axen, welches $= Mc^2$ sei.

Zusatz 3.

§. 853. Da wir oben im allgemeinen die Hauptmomente der Trägheit eines jeden Körpers gleich Ma^2, Mb^2 und Mc^2 gesetzt haben, so wollen hier die zwei letztern einander gleich, also $b^2 = c^2$ annehmen.

Zusatz 4.

§. 854. Während daher der Kreisel mit seiner Spitze F auf der horizontalen Ebene fortschreitet, kann seine Axe AF sich nicht über eine bestimmte Grenze zum Horizont neigen, welche man erhält, indem man von F nach dem Körper des Kreisels die äusserste gerade Linie Fk zieht. Es wird nämlich alsdann der Winkel AFk jene Grenze angeben.

Anmerkung.

§. 855. Oben haben wir nur solche Kreisel betrachtet, in denen alle Momente der Trägheit unter sich gleich waren, welche Bedingung zu beschränkt war. Jetzt wollen wir daher die Bewegung der Kreisel im allgemeinen erforschen, indem die Bedingung, dass AF die Hauptaxe und in Bezug auf die zwei übrigen Axen die Momente der Trägheit einander gleich seien, mit der Natur der Kreisel nothwendig verbunden zu sein scheint. Die Grundsätze aber, aus welchen die Bestimmung dieser Bewegung hergeleitet werden muss, sind oben in Kapitel XIV. schon auseinander gesetzt worden, wo wir gesehen haben, dass die ganze Arbeit von dem Drucke, mit welchem der Kreisel während seiner Bewegung sich in seiner Spitze F auf die horizontale Ebene stützt, abhängig ist. Obgleich dieser Druck nur erst nach der zu Ende geführten Auflösung erkannt werden kann, tritt er doch sogleich in die Rechnung ein. Es sei demnach Π dieser Druck, dessen Richtung von der Spitze F immer vertikal nach oben geht. Wir haben nun oben §. 767. gezeigt, dass, wenn man die Neigung der Axe AF gegen den Horizont $=\theta$ setzt und diese im Zeittheilchen dt um ihr Differential $d\theta$ wächst, das Element dt aber constant angenommen wird, alsdann

$$\frac{\cos\theta . dd\theta - \sin\theta . d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{f}\left(\frac{\Pi}{M} - 1\right)$$

oder

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + f \cdot \frac{\cos\theta . dd\theta - \sin\theta d\theta^2}{2g dt^2}$$

$$= 1 + f \cdot \frac{d(d\theta . \cos\theta)}{2g dt^2} = 1 + f \frac{dd . \sin\theta}{2g dt^2}$$

sein wird. Da wir nun festsetzen, dass der Kreisel durch die Kraft Π und ausserdem nur durch die Schwere angetrieben werde, so kann sein Mittelpunkt der Trägheit I keine andere Bewegung, als eine in vertikaler Richtung entweder auf- oder absteigende annehmen, während sein Abstand von der horizontalen Ebene $= f \sin\theta$ ist. Ist ihm aber anfangs überdem eine gewisse horizontale Bewegung beigebracht worden, so wird er diese beständig gleichförmig beibehalten und so die ganze Frage auf die drehende Bewegung allein zurückgeführt. Da nun also die Schwere nichts hierzu beiträgt und alle Störungen nur aus dem Drucke Π hervorgehen, so müssen wir die Momente dieser Kraft in Bezug auf die Hauptaxen des Kreisels bestimmen.

Aufgabe 97.

§. 856. Wenn ein Kreisel eine beliebige gegen den Horizont geneigte Lage einhält, und zugleich der Druck Π, womit seine Spitze sich auf die horizontale Ebene stützt, gegeben ist; so soll man die Momente dieser Kraft in Bezug auf die Hauptaxen des Kreisels bestimmen.

Auflösung.

(Figur 115.) Um des Kreisels Mittelpunkt der Trägheit I ist eine Kugel beschrieben, auf welcher Z der Scheitelpunkt ist und es schneide die Axe des Kreisels die Kugel in den Punkten A und F; die zwei übrigen Hauptaxen mögen aber die Kugel in den Punkten B und C treffen. Wenn nämlich auch diese zwei Axen für sich nicht bestimmt werden, so ist es doch angemessen, zwei bestimmte, so wohl unter sich als auf die Axe AF normale, Linien anzunehmen, durch welche man hierauf die Lage des Kreisels zu jeder Zeit angibt. Man setze die Bogen der grössten Kreise $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$, alsdann wird $l = 90^\circ - \theta$, wenn θ die Neigung der Axe AF gegen den Horizont bezeichnet. Da nun die Spitze F, deren Abstand vom Mittelpunkte der Trägheit $IF = f$ ist, in der vertikalen Richtung durch eine Kraft $F\Pi = \Pi$ angetrieben wird, so dass der Winkel $AF\Pi = l$ ist; so zerlege man dieselbe nach den Richtungen FA und FV, von welchen die letztere in der vertikalen Ebene AZF normal auf AF ist. Es wird alsdann die Kraft längs $FA = \Pi \cos l$ und die längs $FV = \Pi \sin l$, wobei jene, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit geht, keine Momente ergeben wird. Diese Kraft $VF = \Pi \sin l$ wird aber

in Bezug auf die Axe AF ebenfalls kein Moment ergeben, dagegen in Bezug auf die Axe IB das Moment $= \Pi f \sin l \sin VFB$ im Sinne AC, und auf ähnliche Weise in Bezug auf die Axe IC das Moment $= \Pi f \sin l \sin VFC$ im Sinne BA. Es ist aber $\angle VFB = ZAB$ und

$$\sin ZAB = -\cos ZAC = -\frac{\cos n}{\sin l},$$

ferner $\angle VFC = ZAC$ und

$$\sin ZAC = \cos ZAB = \frac{\cos m}{\sin l}.$$

Wir haben daher die folgenden Momente der Kräfte
in Bezug auf die Axe $IB = -\Pi f \cos n$ im Sinne AC
und in Bezug auf die Axe $IC = \Pi f \cos m$ im Sinne BA,
und da wir die Momente der Kräfte in Bezug auf die Axen IA, IB und IC, im Sinne BC, CA und AB oben (§. 814.) allgemein gleich P, Q und R gesetzt haben; so wird für unsern Fall

$$P = 0,\ Q = +\Pi f \cos n \text{ und } R = -\Pi f \cos m.$$

Aufgabe 98.

§. 857. Ein Kreisel dreht sich in einer beliebigen geneigten Lage um eine beliebige Axe, welche durch seinen Mittelpunkt der Trägheit geht; man soll die augenblickliche sowohl in der Drehungsaxe, als auch in der Winkelgeschwindigkeit hervorgebrachte Veränderung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 117.) Um den Mittelpunkt der Trägheit I denke man sich eine unbewegliche Kugel, auf welcher Z der Scheitelpunkt und ZX ein fester Vertikalkreis ist. Es habe jetzt der Kreisel eine solche Lage, dass die eigenthümliche Axe desselben dem Punkte A der Kugel, die zwei übrigen Hauptaxen aber den Punkten B und C entsprechen und man setze die Abweichungen dieser Axen vom Scheitel oder die Bogen $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$, so dass man hat

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1.$$

Ferner seien die Winkel $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ und $XZC = \nu$, deren Relationen zu jenen Bogen bekannt sind. Es drehe sich nun aber der Kreisel um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ im Sinne ABC, und es seien zur Bestimmung des Drehungspoles O die Bogen $AO = \alpha$, $BO = \beta$ und $CO = \gamma$. Setzt man ferner $\Omega \cos\alpha = x$, $\Omega \cos\beta = y$ und $\Omega \cos\gamma = z$, so werden, weil die Momente der Kräfte $P = 0$, $Q = \Pi f \cos n$ und

$R = -\Pi f \cos m$ sind und weil $b^2 = c^2$ ist, die im Zeittheilchen dt hervorgebrachten Veränderungen durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$\text{I)}\quad dx = 0$$

$$\text{II)}\quad dy + \frac{a^2 - c^2}{c^2} xzdt = \frac{2\Pi fg \cos n\, dt}{Mc^2}$$

$$\text{III)}\quad dz - \frac{a^2 - c^2}{c^2} xydt = -\frac{2\Pi fg \cos m\, dt}{Mc^2} \quad (\S.\ 812.).$$

Ausserdem muss man, zur Bestimmung von l, m, n, λ, μ und ν nach §. 809. folgende Gleichungen hinzufügen:

$dl.\sin l = (y \cos n - z \cos m) dt \qquad \sin l^2 d\lambda = -(y \cos m + z \cos n) dt$

$dm.\sin m = (z \cos l - x \cos n) dt \qquad \sin m^2 d\mu = -(z \cos n + x \cos l) dt$

$dn.\sin n = (x \cos m - y \cos l) dt \qquad \sin n^2 d\nu = -(x \cos l + y \cos m) dt.$

Da aber die Neigung der Axe gegen den Horizont, welche wir oben $= \theta$ gesetzt haben, hier $= 90^0 - l$ ist, wonach wir $\sin\theta = \cos l$ haben, so wird

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos l}{2gdt^2}.$$

Um diese Gleichungen mehr zusammenzuziehen, setzen wir

$$\cos l = p,\ \cos m = q \text{ und } \cos n = r,$$

und erhalten

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fddp}{2gdt^2},$$

so wie ausserdem die Gleichungen:

$$\text{I)}\quad dx = 0$$

$$\text{II)}\quad dy + \frac{a^2 - c^2}{c^2} xzdt = \frac{2\Pi fgrdt}{Mc^2},$$

$$\text{III)}\quad dz - \frac{a^2 - c^2}{c^2} xydt = -\frac{2\Pi fgqdt}{Mc^2},$$

$$\text{IV)}\quad dp = (qz - ry)dt \qquad \text{VII)}\quad d\lambda = -\frac{(qy + rz)dt}{1 - p^2},$$

$$\text{V)}\quad dq = (rx - pz)dt \qquad \text{VIII)}\quad d\mu = -\frac{(rz + px)dt}{1 - q^2},$$

$$\text{VI)}\quad dr = (py - qx)dt \qquad \text{IX)}\quad d\nu = -\frac{(px + qy)dt}{1 - r^2}.$$

Hierbei hat man zu bemerken, dass

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

ist.

Zusatz 1.

§. 858. Dreht sich der Kreisel um die Axe IA selbst, so dass $\alpha = 0$ und $\beta = \gamma = 90^0$ ist; so wird

$x = \Omega,\ y = 0,\ z = 0,\ dx = d\Omega,\ dy = -\Omega d\beta$ und $dz = -\Omega d\gamma$

Wir erhalten demnach die folgenden Gleichungen:

$$d\Omega = 0,\quad d\beta = -\frac{2\Pi fgrdt}{\Omega Mc^2},\quad d\gamma = \frac{2\Pi fgqdt}{\Omega Mc^2},$$

$$dp = 0,\quad dq = \Omega rdt,\quad dr = -\Omega qdt \text{ und } d\lambda = 0.$$

In diesem Falle erleidet also im ersten Augenblick weder die Winkelgeschwindigkeit Ω, noch die Lage des Punktes A eine Aenderung.

Zusatz 2.

§. 859. Da $dp = (qz - ry)dt$ ist, so wird, indem man differentiirt, $ddp = dt.(qdz - rdy) + dt(zdq - ydr)$; indem man die gegebenen Werthe substituirt, erhält man

$$\frac{ddp}{dt^2} = \frac{(a^2 - c^2)x}{c^2}(qy + rz) - \frac{2\Pi fg}{Mc^2}(q^2 + r^2) + x(qy + rz) - p(y^2 + z^2).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f(a^2 - c^2)x}{2gc^2}(qy + rz) - \frac{\Pi f^2}{Mc^2}(q^2 + r^2)$$
$$+ \frac{fx(qy + rz)}{2g} - \frac{fp(y^2 + z^2)}{2g},$$

oder

$$\frac{\Pi}{M}\left[1 + \frac{f^2(q^2 + r^2)}{c^2}\right] = 1 + \frac{fa^2x(qy + rz)}{2gc^2} - \frac{fp(y^2 + z^2)}{2g}$$

und so

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2gc^2 + fa^2x(qy + rz) - fc^2p(y^2 + z^2)}{2gc^2 + 2gf^2(q^2 + r^2)}.$$

Zusatz 3.

§. 860. Aus den Gleichungen IV., V. und VI. schliesst man, wie wir schon früher (§. 810.) bemerkt haben, auf

$$xdp + ydq + zdr = 0,$$

welche Gleichung, da $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ ist, statt der Gleichungen V. und VI. angenommen werden kann. Von den Gleichungen VII., VIII. und IX. wird es aber hinreichend sein, eine einzige zu behandeln und diese Arbeit wird zuletzt unternommen werden müssen.

Zusatz 4.

§. 861. Hat man die Grössen x, y und z gefunden, so wird, weil $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ist, die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; hieraus schliesst man umgekehrt auf die Winkel, indem wir haben

$$\cos\alpha = \frac{x}{\Omega},\quad \cos\beta = \frac{y}{\Omega} \text{ und } \cos\gamma = \frac{z}{\Omega}.$$

Aufgabe 99.

§. 862. Man soll die vorher gefundenen Differentialgleichungen, welche die Bewegung des Kreisels ausdrücken, so weit es möglich ist, zur Integration durchführen.

Auflösung.

Offenbar ist sogleich x constant, und setzen wir demnach $x=A$, so werden die übrigen zu integrirenden Gleichungen:

$$1)\quad dy+\frac{A(a^2-c^2)zdt}{c^2}=\frac{2\Pi fgrdt}{Mc^2},$$

$$2)\quad dz-\frac{A(a^2-c^2)ydt}{c^2}=-\frac{2\Pi fgqdt}{Mc^2},$$

$$3)\quad dp=dt(qz-ry),$$

$$4)\quad ydq+zdr=-Adp;$$

hierbei ist $\frac{\Pi}{M}=1+\frac{fddp}{2gdt^2}$ und $p^2+q^2+r^2=1$.

Multiplicirt man nun 1) in q und 2) in r, und addirt beide Produkte, so erhält man die Gleichung

$$qdy+rdz+\frac{A(a^2-c^2)}{c^2}dt(qz-ry)=0,$$

welche, weil $dt(qz-ry)=dp$ ist, übergeht in diese

$$qdy+rdz=-\frac{A(a^2-c^2)}{c^2}dp.$$

Addirt man hierzu die Gleichung 4), so erhält man die folgende

$$qdy+ydq+rdz+zdr=-\frac{a^2}{c^2}Adp,$$

deren Integral

$$qy+rz=B-\frac{a^2}{c^2}Ap$$

ist. Bildet man ferner $(1).y+(2).z$, so ergibt sich

$$ydy+zdz=\frac{2\Pi fgdt}{Mc^2}(ry-qz)=-\frac{2\Pi fgdp}{Mc^2}.$$

Da nun aber $\frac{\Pi}{M}=1+\frac{fddp}{2gdt^2}$ ist, so geht dieselbe über in die folgende

$$ydy+zdz=-\frac{2fgdp}{c^2}-\frac{f^2dpddp}{c^2dt^2},$$

woraus sich durch Integration ergibt

$$y^2+z^2=C-\frac{4fgp}{c^2}-\frac{f^2dp^2}{c^2dt^2}.$$

Es ist aber ferner

$$\frac{dp}{dt} = qz - ry,$$

und wir erhalten so die neue endliche Gleichung

$$y^2 + z^2 = C - \frac{4fgp}{c^2} - \frac{f^2}{c^2}(qz - ry)^2,$$

woraus, da

$$(qz - ry)^2 = \frac{Cc^2}{f^2} - \frac{4gp}{f} - \frac{c^2(y^2+z^2)}{f^2},$$

und da aus der vorhergehenden Gleichung

$$(qy + rz)^2 = \left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2,$$

durch Addition beider sich ergibt

$$(q^2+r^2)(y^2+z^2) = \frac{Cc^2}{f^2} - \frac{4gp}{f} - \frac{c^2(y^2+z^2)}{f^2} + \left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2.$$

Es ist aber $q^2 + r^2 = 1 - p^2$, und wir erhalten daher

$$(1 - p^2 + \frac{c^2}{f^2})(y^2 + z^2) = \frac{Cc^2}{f^2} - \frac{4gp}{f} + \left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2$$

oder

$$y^2 + z^2 = \frac{Cc^2 - 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}{c^2 + f^2 - f^2p^2}$$

und

$$(qz - ry)^2 = \frac{(Cc^2 - 4fgp)(1-p^2) - c^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}{c^2 + f^2 - f^2p^2}.$$

Da wir hiernach die Grössen $qy + rz$, $y^2 + z^2$ und $qz - ry$ durch p allein bestimmt haben, finden wir sogleich den Druck Π, durch dieselbe Grösse p allein folgendermaassen ausgedrückt:

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2gc^2 + fa^2A\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)}{2g(c^2 + f^2 - f^2p^2)} - \frac{fc^2p\left[Cc^2 - 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2\right]}{2g(c^2 + f^2 - f^2p^2)^2}.$$

Hierauf erhalten wir aber auch das Element der Zeit

$$dt = \frac{dp\sqrt{c^2 + f^2 - f^2p^2}}{\sqrt{(Cc^2 - 4fgp)(1-p^2) - c^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}},$$

und es ergibt sich ferner, ebenfalls durch p ausgedrückt,

$$d\lambda = -\frac{dt\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)}{1 - p^2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird so bestimmt, dass wir haben

$$\Omega^2 = A^2 + \frac{Cc^2 - 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}{c^2 + f^2 - f^2p^2},$$

und durch Ω wird der Bogen $AO = \alpha$ bekannt; so dass, weil die Zeit t durch p gegeben wird, wir für eine gegebene Zeit die Grössen Ω, α, p und λ angeben können. Obgleich endlich wenig daran liegt, die Grössen y und z jede für sich zu kennen, so ergibt sich doch aus den Gleichungen 1, und 2,

$$zdy - ydz + \frac{A(a^2 - c^2)(y^2 + z^2)}{c^2} dt = \frac{2\Pi fgdt}{Mc^2}(rz + qy),$$

also

$$\frac{ydz - zdy}{y^2 + z^2} = \frac{A(a^2 - c^2)dt}{c^2} - \frac{2\Pi fgdt\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)(c^2 + f^2 - f^2p^2)}{Mc^2\left[Cc^2 - 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2\right]}.$$

Da diese Gleichung auch integrabel ist, so ergibt sie den $\text{arc.tg}\left(\frac{z}{y}\right)$ und daher das Verhältniss zwischen y und z, aus welchem, in Verbindung mit $y^2 + z^2$, sich beide Grössen y und z getrennt ergeben. Hat man diese gefunden, so werden auch q und r, jedes für sich aus den Werthen der Formeln $qy + rz$ und $qz - ry$ abgeleitet.

Aufgabe 100.

§. 863. Es ist dem Kreisel anfangs in gegebener Neigung *eine* drehende Bewegung um die *eigenthümliche* Axe, mit *gegebener* Winkelgeschwindigkeit beigebracht worden; man soll seine Lage und Bewegung nach jeder beliebigen seitdem verflossenen Zeit bestimmen.

Auflösung.

(Figur 117.) Gesetzt es habe sich im Anfange, wo $t = 0$ ist, die Axe des Kreisels in a befunden, wobei der Abstand oder Bogen $Za = \mathfrak{l}$ ist und man setze $\cos\mathfrak{l} = \mathfrak{p}$, so dass $f\mathfrak{p}$ die Höhe des Mittelpunktes der Trägheit über der horizontalen Ebene ist. Zu derselben Zeit habe aber der Bogen AB sich auf ab befunden, so dass wir für den Anfang $l = \mathfrak{l}$, $m = 90^0 - \mathfrak{l}$, $n = 90^0$ und $\lambda = 0$, also $p = \mathfrak{p}$, $q = \sqrt{1 - \mathfrak{p}^2}$ und $r = 0$ haben. Ferner habe im Anfange der Kreisel, um die Axe IA und im Sinne BC, eine drehende Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$ empfangen, so dass $\alpha = 0$, $\beta = 90^0$ und $\gamma = 90^0$, also $\Omega = \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $y = 0$ und $z = 0$ war. Hieraus erhalten wir demnach, wenn die oben durch die Integration eingetretenen Constanten bestimmt werden:

$$1)\ A = \varepsilon; \quad 2)\ B = \frac{\varepsilon a^2 \mathfrak{p}}{c^2} \text{ und } 3)\ C = \frac{4fg\mathfrak{p}}{c^2}.$$

Man findet aber, indem man diese Werthe substituirt, zuerst zwischen t und p die Gleichung

$$dt = \frac{cdp\sqrt{c^2+f^2-f^2p^2}}{\sqrt{(\mathfrak{p}-p)[4c^2fg(1-p^2)-\varepsilon^2a^4(\mathfrak{p}-p)]}}.$$

Hierauf wird der Winkel $XZA = \lambda$ so bestimmt, dass man hat

$$d\lambda = -\frac{\varepsilon a^2 dt(\mathfrak{p}-p)}{c^2(1-p^2)} = -\frac{\varepsilon a^2 dp\sqrt{(\mathfrak{p}-p)(c^2+f^2-f^2p^2)}}{c(1-p^2)\sqrt{4c^2fg(1-p^2)-\varepsilon^2a^4(\mathfrak{p}-p)}}.$$

Ferner wird die Winkelgeschwindigkeit Ω im Sinne ABC durch die folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\Omega^2 = \varepsilon^2 + \frac{4c^4fg(\mathfrak{p}-p)+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)^2}{c^4(c^2+f^2-f^2p^2)},$$

und hieraus $\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{\Omega}$. Zur Bestimmung von $\cos\beta = \frac{y}{\Omega}$ und $\cos\gamma = \frac{z}{\Omega}$ ist aber zuerst

$$y^2+z^2 = \frac{4c^4fg(\mathfrak{p}-p)+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)^2}{c^4(c^2+f^2-f^2p^2} = \Omega^2-\varepsilon^2,$$

und ausserdem finden wir

$$qy+rz = \frac{\varepsilon a^2}{c^2}(\mathfrak{p}-p)$$

und $$qz-ry = \frac{\sqrt{(\mathfrak{p}-p)[4c^2fg(1-p^2)-\varepsilon^2a^4(\mathfrak{p}-p)]}}{c\sqrt{c^2+f^2-f^2p^2}}.$$

Ferner finden wir den Druck, welchen jetzt der Kreisel mittelst seiner Spitze gegen die horizontale Ebene ausübt, aus der Gleichung

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2c^4g+\varepsilon^2a^4f(\mathfrak{p}-p)}{2c^2g(c^2+f^2-f^2p^2)} - \frac{fp(\mathfrak{p}-p)[4c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)]}{2c^2g(c^2+f^2-f^2p^2)^2}.$$

Endlich erhält man, um die Grössen y und z jede für sich zu bestimmen, die Gleichung

$$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2} = \frac{\varepsilon(a^2-c^2)dt}{c^2} - \frac{\Pi}{M}\cdot\frac{\varepsilon a^2fgdt(c^2+f^2-f^2p^2)}{4c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)}$$

oder

$$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2} = \frac{\varepsilon(a^2-c^2)dt}{c^2} - \frac{\varepsilon a^2dt[2c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)]}{2c^2[4c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)]} + \frac{\varepsilon a^2f^2pdt(\mathfrak{p}-p)}{2c^2(c^2+f^2-f^2p^2)}.$$

Hat man aber y und z gefunden, so werden durch dieselben auch q und r bestimmt.

Zusatz 1.

§. 864. Der Bogen $ZA = l$ kann bis 90^0 wachsen oder es kann der Kreisel niederfallen, so lange

$$\varepsilon^2 a^4 \mathfrak{p} < 4c^2 fg$$

ist. Damit also der Kreisel nicht hinfalle, muss nothwendig die ihm zuerst beigebrachte Winkelgeschwindigkeit grösser als $\frac{2c}{a^2}\sqrt{\frac{fg}{\mathfrak{p}}}$ sein, wobei $\mathfrak{p} = \cos Za$ ist. Hat daher der Kreisel anfangs vertikal gestanden, so muss

$$\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg}}{a^2}$$

sein; wird diese Bedingung nämlich nicht beobachtet, so kann die leichteste Ursache den Kreisel in seiner Bewegung stören.

Zusatz 2.

§. 865. Ist aber $\varepsilon^2 a^4 \mathfrak{p} > 4c^2 fg$, so wird es eben so, wie die Grösse p nie $\mathfrak{p}$ übertreffen kann, eine Grenze geben, über welche hinaus sie nicht vermindert werden wird. Diesen Grenzwerth erhält man aus der Gleichung

$$4c^2 fgp^2 = 4c^2 fg - \varepsilon^2 a^4 \mathfrak{p} + \varepsilon^2 a^4 p,$$

und es ergibt sich hieraus

$$p = \frac{\varepsilon^2 a^4 - \sqrt{\varepsilon^4 a^8 - 16\varepsilon^2 a^4 c^2 fg\mathfrak{p} + 64c^4 f^2 g^2}}{8c^2 fg},$$

oder sehr nahe

$$p = \mathfrak{p} - \frac{4c^2 fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg\mathfrak{p}},$$

als der kleinste Werth von $p = \cos ZA$, woraus der grösste Werth des Bogens ZA folgt.

Zusatz 3.

§. 866. Betrachten wir aber in Figur 114. den Winkel IFk, so kann die Neigung der Axe gegen den Horizont, deren Sinus $= p$ ist, nicht kleiner als dieser Winkel werden, und es kann die drehende Bewegung des Kreisels nur dann immer fortdauern, wenn der kleinste Werth von p noch grösser als $\sin IFk$ ist. Setzen wir daher $\sin IFk = k$, so muss

$$\varepsilon^2 > \frac{4c^2 fg(1-k^2)}{a^4(\mathfrak{p}-k)}$$

sein.

Anmerkung 1.

§. 867. Es ist demnach angemessen, hier zwei Fälle aufzustellen, nämlich den einen, in welchem die dem Kreisel zuerst beigebrachte Winkelgeschwindigkeit ε kleiner als

$$\frac{2c\sqrt{fg(1-k^2)}}{a^2\sqrt{\mathfrak{p}-k}}$$

und den andern, in welchem sie grösser ist. Im erstern Falle, wo also

$$\varepsilon < \frac{2c\sqrt{fg(1-k^2)}}{a^2\sqrt{\mathfrak{p}-k}}$$

ist, wird der Kreisel bald niederfallen, weil er nicht bis zur kleinsten Neigung gelangen kann, ohne dass er mit seinem Körper die horizontale Ebene berührt, auf welche Weise die drehende Bewegung aufgehoben werden wird. Im letzten Falle aber, wo

$$\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg(1-k^2)}}{a^2\sqrt{\mathfrak{p}-k}}$$

ist, wird die drehende Bewegung beständig fortdauern, wenn wir nämlich von der Reibung und allen Hindernissen der Bewegung abstrahiren. Damit demnach eine immerwährende drehende Bewegung entstehe, muss nothwendig dem Kreisel zuerst eine grössere Winkelgeschwindigkeit ε beigebracht werden, als diese Formel darstellt. Es ist aber klar, dass, je grösser die dem Kreisel beigebrachte Winkelgeschwindigkeit ist, er sich desto weniger gegen den Horizont neigen wird und wäre jene Geschwindigkeit unendlich gross, so würde der Kreisel beständig dieselbe Neigung beibehalten. Ist aber die drehende Bewegung eine immerwährende, so wird sich der Kreisel von Anfang an mehr gegen den Horizont neigen, bis er die grösste Hinneigung erreicht, dann wird er sich wieder bis zu seiner anfänglichen Stellung aufrichten und hat er diese erreicht, so muss man annehmen, dass er gleichsam Eine Periode seiner Bewegung zurückgelegt habe, worauf er auf ähnliche Weise fortschreiten wird; denn niemals wird der Kreisel sich mehr als im Anfange aufrichten, wenn keine Reibung stattfindet. Erleidet nämlich der Kreisel, während er mit seiner Spitze über der horizontalen Ebene fortgeht, Reibung, so wird deren Wirkung dazu verwandt, den Kreisel aufzurichten, in so fern er nicht durch die Verminderung seiner Winkelgeschwindigkeit niederzufallen gezwungen wird. Es kann daher nicht wunderbar erscheinen, dass die Erfahrung nicht mit unserer Rechnung übereinstimmt, indem man die Abweichungen der Reibung zuschreiben muss.

Anmerkung 2.

§. 868. Man ersieht hieraus auch, nach welchem Verhältniss die Kreisel construirt werden müssen, damit sie am leich-

testen eine drehende Bewegung annehmen, oder damit die kleinste Winkelgeschwindigkeit hierzu ausreiche. Da nämlich die im Anfange beigebrachte Winkelgeschwindigkeit grösser sein muss als $\frac{2c\sqrt{fg}}{a^2}$ (§. 864.), so muss seine Figur von der Art sein, dass sein Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe AF sehr gross werde, im Vergleich mit dem Momente in Bezug auf die, auf jene normalen Axen. Die passendste Figur wird daher eine ebene, von einem sehr dünnen Stabe durchbohrte Scheibe sein, in welchem Falle $a^2 = 2c^2$ wird (§. 491.); und wenn der Radius dieser Scheibe $= h$ ist, wird $a^2 = \frac{1}{2}h^2$ und $c^2 = \frac{1}{4}h^2$, also

$$\varepsilon > \frac{2\sqrt{fg}}{h}.$$

Je kürzer ferner die Spitze oder der Zwischenraum $IF = f$ ist, desto mehr wird die zur Dauer der drehenden Bewegung erforderliche Winkelgeschwindigkeit ε vermindert; aber dann wird auch bei einer kleinen Neigung der Kreisel die horizontale Ebene mit seinem Körper berühren. Gesetzt es sei $h = \frac{1}{2}$ und $f = \frac{1}{4}$ Zoll, alsdann muss, weil $g = 187\frac{1}{2}$ Zoll ist,

$$\varepsilon > \sqrt{750}$$

angenommen werden. Nimmt man daher ε doppelt so gross oder $= 55$ an, so wird der Kreisel in Einer Secunde einen Bogen $= 55$ oder $\frac{55}{2\pi}$, d. h. fast neun Umläufe vollenden. Für Kreisel von einem grössern Maasstabe wird aber eine, im halben Verhältniss der Seiten kleinere Winkelgeschwindigkeit hinreichend sein.

Aufgabe 101.

§. 869. Einem Kreisel, welcher eine gegebene Neigung hat, ist im Anfange eine drehende Bewegung mit einer Winkelgeschwindigkeit beigebracht worden, welche hinreicht, damit seine Neigung nur sehr kleine Aenderungen erleide; man soll seine drehende Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Es bleibe alles so, wie es in der vorhergehenden Aufgabe aufgestellt worden ist, dabei aber nehmen wir hier an, dass ε^2 die Grösse $\frac{4c^2fg}{a^4\mathfrak{p}}$ bei weitem übertreffe. Wir setzen demnach

$$\varepsilon^2 = \frac{4nc^2fg}{a^4\mathfrak{p}},$$

wo n eine hinreichend grosse Zahl bezeichnet, alsdann haben wir zuerst für die Relation zwischen t und p, weil von Anfang an die letztere Grösse abnimmt, die Gleichung

$$dt = \frac{-dp\sqrt{\mathfrak{p}(c^2+f^2-f^2p^2)}}{2\sqrt{fg(\mathfrak{p}-p)(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}p^2-n\mathfrak{p}+np)}} \quad (\S.\ 863.).$$

Da nun p sehr wenig kleiner als $\mathfrak{p}$ ist, so setzen wir $p = \mathfrak{p}-u$, wo u ein sehr geringes Theilchen ist und erhalten

$$dt = \frac{+du\sqrt{\mathfrak{p}(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}}{2\sqrt{fgu(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3-nu)}}$$

und hieraus

$$t = \frac{+\sqrt{\mathfrak{p}(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}}{2\sqrt{nfg}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}u-u^2}}$$

$$= C + \frac{\sqrt{\mathfrak{p}(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}}{2\sqrt{nfg}}\,\text{arc.sin.vers.}\left(\frac{2nu}{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}\right),$$

wo $C=0$ sein muss. Es wird daher vom Anfange an, wo $u=0$ oder $p=\mathfrak{p}$, bis zu der Zeit wo die Neigung am grössten ist,

$$u = \frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}^2)}{n} \text{ oder } p = \mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}^2)}{n}$$

und die Zeit

$$= \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{p}(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}}{2\sqrt{nfg}},$$

welche letztere also desto kürzer ist, je grösser die Zahl n wird. Zweitens wird nun

$$d\lambda = -\frac{2\sqrt{nfg}}{c(1-\mathfrak{p}^2)\sqrt{\mathfrak{p}}}\,udt \quad (\S.\ 863.)$$

oder

$$\lambda = -\frac{\sqrt{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2}}{c(1-\mathfrak{p}^2)}\int\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{\frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}-u}}$$

$$= -\frac{\sqrt{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2}}{c(1-\mathfrak{p}^2)}\left[\frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}^2)}{2n}\,\text{arc.sin.vers.}\left(\frac{2nu}{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}^2)}\right) - \sqrt{\frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}^2)u}{n}-u^2}\,\right].$$

Der Bogen ZA schreitet nämlich im entgegengesetzten Sinne fort, und es wird nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{p}(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}}{2\sqrt{nfg}} = \frac{\pi c\sqrt{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2}}{\varepsilon a^2},$$

wo der Kreisel sich am stärksten gegen den Horizont hinneigt,

$$\lambda = -\frac{\pi\mathfrak{p}\sqrt{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2}}{2nc}.$$

Die Axe A wird zwar nicht mit gleichförmiger Bewegung um den Scheitel Z herumgeführt, vernachlässigt man aber die Ungleichförmigkeit dieser Bewegung, so wird die mittlere Winkelgeschwindigkeit

$$= \frac{\sqrt{\mathfrak{p}fg}}{c\sqrt{n}} = \frac{2fg}{\varepsilon a^2},$$

so dass dieselbe der Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um seine eigene Axe umgekehrt proportional ist. Während ferner der Kreisel die grösste Neigung hat, also $p = \mathfrak{p} - \frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4}$ ist, wird die Winkelgeschwindigkeit Ω so bestimmt, dass man hat

$$\Omega^2 = \varepsilon^2 + \frac{16f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2a^4} \text{ oder } \Omega = \varepsilon + \frac{8f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^3a^4}.$$

Es wird demnach

$$\cos\alpha = \cos AO = 1 - \frac{8f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^4a^4} = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

oder der sehr kleine Bogen

$$\alpha = AO = \frac{4fg\sqrt{1-\mathfrak{p}^2}}{\varepsilon^2a^2}.$$

Für den Druck der Spitze F gegen die horizontale Ebene hat man im Anfange der Bewegung, wo $p = \mathfrak{p}$ und die Axe des Kreisels am höchsten aufgerichtet ist,

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{c^2}{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2};$$

wann aber der Kreisel sich am stärksten gegen den Horizont neigt,

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{c^2+2f^2(1-\mathfrak{p}^2)}{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2} - \frac{8c^2f^3g\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2a^4(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}.$$

Diese Bestimmungen sind hinreichend, um die Bewegung kennen zu lernen.

Zusatz 1.

§. 870. Hat sich die Axe des Kreisels anfangs in a befunden, so ist, wenn man $ZA = \mathfrak{l}$ setzt, $\mathfrak{p} = \cos\mathfrak{l}$ und ist A die grösste Elongation der Axe vom Scheitel, so wird, wenn man $ZA = l$ setzt,

$$p = \cos l = \cos\mathfrak{l} - \frac{4c^2fg\sin\mathfrak{l}^2}{\varepsilon^2a^4}$$

und

$$l = \mathfrak{l} + \frac{4c^2fg\sin\mathfrak{l}}{\varepsilon^2a^4}.$$

Zusatz 2.

§. 871. Weil bei der grössten Neigung des Kreisels der Bogen ZA am grössten ist, muss offenbar der Drehungspol O auf eben diesen Bogen ZA fallen, so dass $ZO < ZA$ und der Zwischenraum

$$AO = \frac{4fg\sqrt{1-p^2}}{\varepsilon^2 a^2}$$

ist.

Anmerkung.

§. 872. Bis jetzt haben wir angenommen, dass dem Kreisel im Anfange eine drehende Bewegung um seine Axe AF beigebracht werde, welches der allgemeinste Fall ist. Es ist aber dennoch möglich, dass ihm um eine andere Axe eine Bewegung beigebracht werde, was geschieht, wenn die wahre Axe AF, während der Kreisel sich um sie dreht, zugleich einen Anstoss empfängt, in Folge dessen sie sich entweder mehr gegen den Horizont neigt oder sich mehr von demselben entfernt. Diess kommt nämlich auf dasselbe hinaus, als wenn dem Kreisel eine drehende Bewegung um eine andere Axe beigebracht würde, insofern nur daraus keine fortschreitende Bewegung entspringt und da diess keine Schwierigkeit hat, ist es angemessen, darauf keine Rücksicht zu nehmen. Der schon vorher behandelte Fall kann zwar hierzu gezählt werden, wenn wir einen gewissen mittlern Zustand, bei welchem der Kreisel sich schon um eine andere Axe ausser der AF dreht, als den Anfangszustand ansehen; weil aber dort die Axe des Kreisels sich niemals bis zur vertikalen Lage aufrichten kann, sind darin nicht alle Bewegungen enthalten. Es wird daher angemessen sein, den Fall noch zu behandeln, in welchem die Axe des Kreisels AF zuerst zwar die vertikale Lage einhält, ihm selbst aber eine drehende Bewegung um eine andere, gegen den Horizont geneigte Axe beigebracht wird; diesen Fall werden wir auch mittelst der vorher entwickelten allgemeinen Formeln auflösen können.

Aufgabe 102.

§. 873. Wenn die Axe eines Kreisels anfangs vertikal gewesen, und ihm um eine gewisse geneigte Axe eine drehende Bewegung mit gegebener Winkelschwindigkeit beigebracht worden ist, so soll man seine Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Da also anfangs der Punkt A sich in Z befunden hat, so setzen wir voraus, dass der Bogen AC auf den Kreis ZX gefallen sei, so dass der Bogen AB auf ZX normal war. Wenn man daher $t=0$ macht, so ist um diese Zeit $l=0$, $m=90^0$ und $n=90^0$, mithin $p=1$, $q=0$ und $r=0$; ferner $\mu=90^0$ und $\nu=0$, wobei λ unbestimmt bleibt. Nun ist aber anfangs dem Kreisel eine drehende Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $=\varepsilon$ im Sinne ABC, um einen auf dem Bogen AC gelegenen Pol beigebracht worden, so dass für $t=0$, $\alpha=\mathfrak{a}$, $\beta=90^0$ und $\gamma=90^0-\mathfrak{a}$, also $x=\varepsilon\cos\mathfrak{a}$, $y=0$ und $z=\varepsilon\sin\mathfrak{a}$ war. Unter diesen Voraussetzungen werden wir den Zustand des Kreisels nach der Zeit t mittelst §. 862. bestimmen, wenn wir den durch die Integration eingetretenen Constanten Werthe beilegen, welche diesen Bedingungen angemessen sind. Es wird daher

1) $A=\varepsilon\cos\mathfrak{a}$; 2) $B=\frac{a^2}{c^2}\varepsilon\cos\mathfrak{a}$; 3) $\frac{Cc^2}{f^2}-\frac{4g}{f}-\frac{c^2\varepsilon^2\sin\mathfrak{a}^2}{f^2}=0$

oder

$$C=\frac{4fg}{c^2}+\varepsilon^2\sin\mathfrak{a}^2.$$

Substituirt man aber diese Werthe, so erhält man

$$qy+rz=\frac{\varepsilon a^2\cos\mathfrak{a}}{c^2}(1-p)$$

$$qz-ry=\frac{\sqrt{\varepsilon^2c^4(1-p^2)\sin\mathfrak{a}^2+4c^2fg(1-p)(1-p^2)-\varepsilon^2a^4(1-p)^2\cos\mathfrak{a}^2}}{c\sqrt{c^2+f^2-f^2p^2}}$$

$$y^2+z^2=\frac{\varepsilon^2c^6\sin\mathfrak{a}^2+4c^4fg(1-p)+\varepsilon^2a^4f^2(1-p)^2\cos\mathfrak{a}^2}{c^4(c^2+f^2-f^2p^2)}$$

und hieraus

$$dt=\frac{-cdp\sqrt{c^2+f^2-f^2p^2}}{\sqrt{(1-p)[4c^2fg(1-p^2)+\varepsilon^2c^4(1+p)\sin\mathfrak{a}^2-\varepsilon^2a^4(1-p)\cos\mathfrak{a}^2]}},$$

weil im Anfange die Grösse p kleiner wird.

Da ferner $\Omega^2=x^2+y^2+z^2$ und $x=\varepsilon\cos\mathfrak{a}$ ist, so wird

$$\Omega^2=\varepsilon^2\cos\mathfrak{a}^2+\frac{\varepsilon^2c^6\sin\mathfrak{a}^2+4c^4fg(1-p)+\varepsilon^2a^4f^2(1-p)^2\cos\mathfrak{a}^2}{c^4(c^2+f^2-f^2p^2)}$$

und endlich

$$d\lambda=-\frac{\varepsilon a^2dt\cos\mathfrak{a}}{c^2(1+p)}.$$

Zusatz 1.

§. 874. Nach der für dt gefundenen Formel kann man beurtheilen, ob der Kreisel niederfallen wird, oder nicht. Setzt man nämlich $p=0$, so wird der Factor des Nenners $4c^2fg$

$+\varepsilon^2c^4\sin\alpha^2-\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2$, so oft er positiv ist, angeben, dass der Kreisel sich zum Falle neigt; dies geschieht demnach, wenn

$$4c^2fg+\varepsilon^2c^4\sin\alpha^2>\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2$$

ist.

Zusatz 2.

§. 875. Damit also der Kreisel nicht niederfalle, muss

erstens $$a^4\cos\alpha^2>c^4\sin\alpha^2 \text{ oder } \operatorname{tg}\alpha<\frac{a^2}{c^2},$$

zweitens $$\varepsilon^2>\frac{4c^2fg}{a^4\cos\alpha^2-c^4\sin\alpha^2}$$

sein; oder es muss die zuerst beigebrachte Winkelgeschwindigkeit ε die Grenze $\frac{2c\sqrt{fg}}{\sqrt{a^4\cos\alpha^2-c^4\sin\alpha^2}}$ überschreiten und zwar merklich, damit nämlich der Kreisel, während er sich neigt, nicht den Horizont mit seinem Körper berühre.

Zusatz 3.

§. 876. Sobald aber so wohl $\operatorname{tg}\alpha<\frac{a^2}{c^2}$, als auch

$$\varepsilon^2>\frac{4c^2fg}{a^4\cos\alpha^2-c^4\sin\alpha^2}$$

ist, kann die Axe des Kreisels sich nicht bis zum Horizont neigen oder die Grösse p bis 0 abnehmen. Der kleinste Werth dieser Grösse geht aber aus der Gleichung

$$4c^2fgp^2=\varepsilon^2p(a^4\cos\alpha^2+c^4\sin\alpha^2)-\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2+\varepsilon^2c^4\sin\alpha^2+4c^2fg$$

hervor und man erhält $p=$

$$\frac{\left\{\begin{matrix}\varepsilon^2[a^4\cos\alpha^2+c^4\sin\alpha^2]-\\ \sqrt{\varepsilon^4(a^4\cos\alpha^2+c^4\sin\alpha^2)^2-16\varepsilon^2c^2fg(a^4\cos\alpha^2-c^4\sin\alpha^2)+64c^4f^2g^2}\end{matrix}\right\}}{8c^2fg}.$$

Zusatz 4.

§. 877. Ist aber $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^2}{c^2}$ oder $a^4\cos\alpha^2=c^4\sin\alpha^2$, so wird die Gleichung zwischen p und t

$$dt=\frac{-dp\sqrt{c^2+f^2-f^2p^2}}{\sqrt{(1-p)[4fg(1-p^2)+2\varepsilon^2c^2p\sin\alpha^2]}},$$

und es kann p nicht nur bis 0, sondern auch bis zu einem negativen Werthe vermindert werden, welcher letztere sein würde:

$$p=\frac{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2-\sqrt{\varepsilon^4c^4\sin\alpha^2+16f^2g^2}}{4fg}.$$

Eine so grosse Neigung schliesst aber der Stand der Frage aus.

Anmerkung.

§. 878. (Figur 118.) Der Anfangszustand, welcher eine solche Bewegung ausdrückt, ist in der Figur 118. dargestellt, wo die Axe des Kreisels A sich im Scheitelpunkte selbst, die zwei übrigen in B und C befinden, und zwar haben wir den festen vertikalen Kreis AX so angenommen, dass der eine Quadrant AC auf ihm liegt, der andere AB auf ihn normal ist. Im Anfange der Bewegung war demnach $l=0$, $m=90^0$, $n=90^0$, mithin $p=1$, $q=0$ und $r=0$, ferner aber $\mu=90^0$, $\nu=0$ und λ unbestimmt. Hierauf nehme ich an, dass dem Kreisel im Anfange eine drehende Bewegung um die Axe IO beigebracht worden sei, und zwar mit der Geschwindigkeit ε im Sinne ABC, wobei der Bogen $AO=\mathfrak{a}$ ist; es war demnach, wenn man $t=0$ setzt, $\alpha=\mathfrak{a}$, $\beta=90^0$, $\gamma=90^0-\mathfrak{a}$ und $\Omega=\varepsilon$, also

$$x=\varepsilon\cos\mathfrak{a},\ y=0 \text{ und } z=\varepsilon\sin\mathfrak{a}.$$

Damit nun in diesem Falle der Kreisel nicht niederfalle, werden die zwei Bedingungen erfüllt werden müssen, die eine, dass

$$\operatorname{tg}\mathfrak{a} \text{ oder } \operatorname{tg} AO < \frac{a^2}{c^2}$$

und die zweite, dass

$$\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg}}{\sqrt{a^4\cos\mathfrak{a}^2 - c^4\sin\mathfrak{a}^2}}$$

sei. Wenn wir aber verlangen, dass die Axe sich so wenig als möglich neige, so sei $p=1-\omega$, wo ω ein sehr kleines Theilchen ist und man findet alsdann

$$\omega = \frac{2\varepsilon^2c^4\sin\mathfrak{a}^2}{\varepsilon^2a^4\cos\mathfrak{a}^2 + \varepsilon^2c^4\sin\mathfrak{a}^2 - 8c^2fg}.$$

Es muss daher der Bogen $AO=\mathfrak{a}$ so klein als möglich, ferner aber ε^2a^4 bei weitem $8c^2fg$ übertreffen, damit

$$\varepsilon > \frac{2c\sqrt{2fg}}{a^2}$$

sei. Geschieht diess, so wird die Bewegung hinreichend regelmässig sein und es ist angemessen, dieselbe genauer zu bestimmen.

Aufgabe 103.

§. 879. Einem aufgestellten Kreisel ist um eine möglichst wenig abweichende Axe eine hinreichend geschwinde drehende Bewegung beigebracht worden, damit er sich nur wenig aus seiner aufrechten Stellung entferne; man soll seine Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Wir nehmen demnach an, dass der Bogen $AO = \alpha$ im Anfange sehr klein, die anfangs beigebrachte Winkelgeschwindigkeit ε aber so gross gewesen sei, dass $\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 > 8c^2 fg$ wird. Setzen wir daher

$$\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 = 8nc^2 fg,$$

wo $n > 1$ ist, so haben wir

$$dt = \frac{-cdp\sqrt{c^2+f^2-f^2p^2}}{\sqrt{(1-p)[4c^2fg(1-p^2)-8nc^2fg(1-p)+\varepsilon^2c^4(1+p)\sin\alpha^2]}}.$$

Weil wir nun wissen, dass p sich wenig unter der Einheit vermindert, so setzen wir $p = 1 - u$ und es wird alsdann, indem wir die sehr kleinen Glieder vernachlässigen, die Gleichung

$$dt = \frac{cdu}{\sqrt{u[8fgu - 8nfgu + 2\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 - \varepsilon^2c^2u\sin\alpha^2]}},$$

deren Integral ist

$$t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 + 8fg(n-1)}}\,\text{arc.sin.vers.}\left\{\frac{u[\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2+8fg(n-1)]}{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2}\right\}.$$

Da nun der grösste Werth von

$$u = \frac{2\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2}{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 + 8fg(n-1)}$$

ist, so wird die Zeit, bis der Kreisel die grösste Neigung hat

$$= \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 + 8(n-1)fg}} = \frac{\pi c^2}{\sqrt{\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 - 8c^2fg}}.$$

Der Kreisel wird von der aufrechten Stellung um einen sehr kleinen Winkel, dessen sin.vers.

$$= \frac{2\varepsilon^2c^4\sin\alpha^2}{\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 - 8c^2fg}$$

ist, abweichen und es wird dieser Winkel selbst

$$= \frac{2\varepsilon c^2\sin\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 - 8c^2fg}}.$$

Da ferner

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon a^2 dt\cos\alpha}{c^2(1+p)}$$

ist und hier p als constant und $=1$ angesehen werden kann, so wird zu der Zeit, um welche der Kreisel zur grössten Neigung gelangt, seine Axe sich in einer vertikalen Ebene befinden, welche vom Kreise ZX (Figur 117.) um den Winkel

$$XZA = 90^0 - \frac{\pi\varepsilon a^2\cos\alpha}{2\sqrt{\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 - 8c^2fg}}$$

abweicht, indem beim ersten Anfange, wo A sich um O dreht (Figur 118.), der Winkel $\lambda = 90^0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ ist.

Zusatz 1.

§. 880. Da der anfängliche Bogen $AO = \alpha$ gleichsam unendlich klein und der Winkel $XZA = \lambda$ anfangs $= 90^0$ gewesen ist, so wird derselbe nach Verlauf der Zeit t

$$= 90^0 - \frac{\varepsilon a^2 t}{2c^2}.$$

Die aus dem Scheitelpunkte heraustretende Axe des Kreisels bewegt sich demnach rückläufig und vollendet einen ganzen Umlauf in der Zeit $= \frac{4\pi c^2}{\varepsilon a^2}$ Secunden.

Zusatz 2.

§. 881. Da im Anfange $u = 0$ war, so wird nach Verlauf der Zeit t

$$1 - \frac{u(\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg)}{\varepsilon^2 c^4 \sin \alpha^2} = \cos \frac{t\sqrt{\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg}}{c^2}.$$

Setzt man aber den sehr kleinen Bogen $ZA = l$, so wird, weil $p = \cos l = 1 - \frac{1}{2}l^2$ ist, $u = \frac{1}{2}l^2$ mithin

$$l = \frac{2\varepsilon c^2 \sin \alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg}} \sin \frac{t\sqrt{\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg}}{2c^2},$$

so dass wir zu jeder beliebigen Zeit t die Werthe von λ und l anzugeben im Stande sind.

Zusatz 3.

§. 882. Bis dahin, wo die aus Z heraustretende Axe des Kreisels die grösste Abweichung erlangt, verfliesst die Zeit $= \frac{\pi c^2}{\sqrt{\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg}}$ (§. 879.) und sie wird während dieser Zeit um Z rückläufig durch einen Winkel $= \frac{\pi \varepsilon a^2}{2\sqrt{\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg}}$ geführt (§. 880.), welcher letztere demnach grösser als 90^0 ist. Ferner wird sie zum Scheitel Z zurückkehren, nachdem sie den Winkel $= \frac{\pi \varepsilon a^2}{\sqrt{\varepsilon^2 a^4 - 8c^2 fg}}$, welcher $> 180^0$ ist, beschrieben hat.

Anmerkung.

§. 883. Ich verweile nicht länger bei der Entwickelung derartiger Bewegungen, da alle Erscheinungen leicht aus den gefundenen Formeln abgeleitet werden können. Man muss sich

aber wohl erinnern, dass hier keine Rücksicht auf die Reibung genommen worden ist, denn obgleich wir diese als sehr gering voraussetzen, so stört sie doch die hier bestimmten Erscheinungen bedeutend. Aus der Reibung nämlich, welche die auf der horizontalen Ebene fortschreitende Spitze F erleidet, entspringt eine horizontale Kraft, welche dem Kreisel eine fortschreitende Bewegung einflösst und weil die Richtung dieser Kraft beständig eine andere wird; so ersieht man leicht die Ursache, wesshalb man die Kreisel mit krummliniger Bewegung fortschreiten sieht. Die in Folge der Reibung gestörten Bewegungen erfordern aber eine besondere Behandlung, indem wir daher derartige Hindernisse bei Seite legen, schreiten wir zu andern Arten von Bewegungen fort, in denen eine Drehung vorkommt. Da wir hier solche Körper betrachtet haben, welche mit ihrer Spitze auf einer horizontalen Ebene fortschreiten, so dass diese Spitze als ihre Grundfläche zu betrachten ist; so werden wir von hier zu andern Arten von Körpern geführt, welche mit einer beliebigen Grundfläche auf der Ebene fortschreiten.

In Betreff einer ebenen oder winkligen Grundfläche lässt sich kaum etwas Bemerkenswerthes vortragen, da entweder keine drehende Bewegung stattfindet und daher die Bestimmung der Bewegung keine Schwierigkeit hat, oder wenigstens sprungweise eine drehende Bewegung sich einmischt, während die Berührung auf eine andere Ecke übertragen wird, wobei zugleich ein Zusammenstoss ausgeübt wird, dessen Darstellung zu einem andern Theile der Mechanik gezählt werden muss. Hier ist es daher angemessen, nur solche Grundflächen, auf denen die Körper über einer unbeweglichen Ebene fortschreiten, zu betrachten, welche eine continuirliche Krümmung haben, damit durchaus kein Stoss bei der Bewegung vorkomme. Indem wir aber zu grosse Umwege, welche auf unentwickelbare Rechnungen führen würden, vermeiden wollen, werden wir nur zwei Arten von Körpern, nämlich cylindrische und sphärische Körper vorzugsweise betrachten, d. h. Körper, deren äussere auf der Ebene angebrachte Figur entweder cylindrisch oder sphärisch ist, auf welche Weise sonst auch im Innern die Materie vertheilt sein mag, und deren Verhältniss durch den Mittelpunkt der Trägheit und die Hauptaxen bestimmt wird. Zur cylindrischen Art werden demnach diejenigen Pendel gezählt, welche nicht, wie wir oben angenommen haben, an einer linearen

Axe aufgehängt sind, sondern mit kleinen cylindrischen Axen beiderseits auf der horizontalen Ebene liegen. Ferner gehört hierher die schwankende Bewegung, welche der wechselseitigen Bewegung der Wiegen ähnlich ist, indem solche Körper, in so fern sie auf einer Ebene liegen, als cylindrische betrachtet werden können. Es wird hierauf auch der Mühe werth sein zu erforschen, auf welche Weise solche Körper auf einer geneigten Ebene herabsteigen. Zu den sphärischen Körpern zähle ich nicht nur diejenigen, deren ganze Gestalt kugelförmig ist, sondern auch solche, welche unten, wo sie die Ebene berühren, halbkugelförmig ausgebildet sind, wie etwa Kreisel, deren Axen unten nicht in eine Spitze, sondern gleichsam eine Halbkugel ausgehen. Hier liegt zwar der Mittelpunkt der Trägheit höher, als der Mittelpunkt der Halbkugel, liegt er aber tiefer, so kann eine andere Art von Bewegung entstehen, wobei der Körper gleichsam schwankend oscillirt und wobei eine wunderbare Störung der drehenden Bewegung stattfinden kann.

Kapitel XVIII.

Von der Bewegung der Körper mit sphärischer Grundfläche auf einer horizontalen Ebene.

Aufgabe 104.

§. 884. **Liegt ein Körper mit sphärischer Grundfläche auf einer beliebigen horizontalen Ebene, so soll man die Kräfte bestimmen, durch welche er angetrieben wird und deren Wirkung in Bezug auf die Störung der fortschreitenden Bewegung des Körpers.**

Auflösung.

(Figur 119.) Es sei EH die horizontale Ebene und T der Punkt, in welchem der Körper auf ihr steht, man bemerke aber zuerst im Körper den Mittelpunkt der sphärischen Grundfläche MTN, welcher in G liege; zweitens den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers in I, ferner stelle das Papier die Ebene dar, in welcher diese drei Punkte liegen. Man ziehe den Radius GT, welcher, weil er auf den Horizont EH normal ist, eine vertikale Lage haben und wesshalb auch die Ebene TGI vertikal sein wird. Da wir uns nun für die fortschreitende Bewegung die ganze Masse des Körpers $= M$ als im Mittelpunkte der Trägheit I vereinigt denken können, so ziehe man IP $\# GT$, und es wird alsdann der Körper, in Folge der Schwere, in der Richtung IP durch eine Kraft $= M$ angetrieben. Ferner wird er aber von da, wo die horizontale Ebene ihn in T berührt, durch eine gewisse Kraft aufwärts in der Richtung TG angetrieben, diese Kraft ist dem Drucke gleich und sei $= \Pi$. Nur wenn diese zwei Kräfte sich aufheben, kann der

Körper in Ruhe verharren; hieraus ersieht man, wie der Zustand der Ruhe es erfordert, dass, wenn man die gerade Linie GI bis F verlängert, der Körper mit dem letztern Punkte die horizontale Ebene berühre, also die gerade Linie $DIGF$ vertikal sei. Die Figur stellt demnach eine geneigte Stellung des Körpers dar, und zwar wird die Neigung durch den Winkel FGT angegeben; derselbe sei $= \varrho$ und wenn er verschwindet, befindet sich der Körper im Zustande des Gleichgewichts. Wir setzen ferner den Radius der sphärischen Grundfläche $GF = GT = e$ und den Zwischenraum der Punkte G und I oder $GI = f$, in so fern als der Mittelpunkt der Trägheit I weiter vom Punkte F entfernt ist, als der Mittelpunkt der Figur G. Läge er näher, so müsste die Grösse f negativ angenommen werden. Es wird hiernach die Linie $IP = e + f \cos\varrho$, dieselbe ist die Höhe des Mittelpunktes der Trägheit I über der horizontalen Ebene EH und auf sie allein wirken die antreibenden Kräfte ein. Ueberträgt man aber die Kraft $TG = \Pi$ nach dem Mittelpunkt der Trägheit I, so wird dieser abwärts angetrieben durch eine Kraft $= M - \Pi$, und weil seine abwärts gerichtete Geschwindigkeit $= \frac{f \sin\varrho\, d\varrho}{dt}$ ist; so setze man diese $= u$ und wir erhalten alsdann (§. 767.)

$$du = \frac{2g\,(M - \Pi)\,dt}{M},$$

wo dt das Element der Zeit bezeichnet. Nimmt man dasselbe constant an, so erhält man

$$f[\sin\varrho\, dd\varrho + \cos\varrho\, d\varrho^2] = 2g\left(1 - \frac{\Pi}{M}\right)dt^2;$$

auf andere Weise wird die fortschreitende Bewegung nicht afficirt.

Zusatz 1.

§. 885. Ist demnach umgekehrt das Verhältniss der fortschreitenden Bewegung gegeben, oder wird es wenigstens als gegeben betrachtet, so kann man hierdurch den Druck Π bestimmen, indem wir haben

$$\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{f[\sin\varrho\, dd\varrho + \cos\varrho\, d\varrho^2]}{2g\,dt^2} = 1 + \frac{f dd.\cos\varrho}{2g\,dt^2}.$$

Zusatz 2.

§. 886. Ist $f = 0$, oder fällt der Mittelpunkt der Trägheit I in den Mittelpunkt der Kugel G, so ergibt sich $\Pi = M$ und es besitzt der Körper in jeder Lage die Eigenschaft des Gleichgewichts.

Zusatz 3.

§. 887. Ist $f > 0$ oder $FI > FG$, so wird, wenn der Körper sich auch nur um ein weniges neigt, durch die antreibende Kraft die Neigung vergrössert werden; ist aber $f < 0$ oder $FI < FG$, so wird die Neigung verkleinert und der Körper wieder in die Lage des Gleichgewichts, wobei der Punkt F die Ebene berührt, zurückgebracht werden, während er im ersteren Falle niederfällt und eine andere Lage des Gleichgewichts sucht.

Anmerkung 1.

§. 888. Was für eine Figur der Körper auch immer haben mag, so gibt es doch in demselben stets zum wenigsten zwei Lagen des Gleichgewichts, von welchen die eine so beschaffen ist, dass, wenn der Körper ein wenig aus ihr herausgebracht wird, dieselbe sich von selbst wiederherstellt, die andere aber, dass er ganz umfällt. Die erstere Lage pflegt der Zustand des stabilen, die andere der Zustand des labilen Gleichgewichts genannt zu werden. Liegt nämlich ein beliebiger Körper auf einer horizontalen Ebene, so befindet er sich im Gleichgewicht, wenn die vom Mittelpunkte der Trägheit nach dem Berührungspunkte gezogene gerade Linie vertikal ist; diess kann wenigstens auf zweifache Weise geschehen. Denkt man sich nämlich vom Mittelpunkte der Trägheit nach allen Punkten der Oberfläche gerade Linien gezogen, so muss es, weil keine von ihnen verschwindet oder unendlich gross wird, unter ihnen nothwendig eine grösste und eine kleinste geben; beide werden aber auf die berührende Ebene normal sein. Liegt daher der Körper mit einem der beiden Punkte, von welchen der Mittelpunkt der Trägheit entweder am meisten oder am wenigsten entfernt ist, auf der horizontalen Ebene, so wird die vom Mittelpunkte der Trägheit nach dem Berührungspunkte gezogene gerade Linie vertikal sein; sie wird daher die Lage des Gleichgewichts ergeben und zwar die stabile, wenn jene Linie am kleinsten, hingegen aber die labile, wenn sie am grössten ist. Hieraus ersieht man, dass der Mittelpunkt der Trägheit immer den tiefsten Ort suchen und in demselben ruhen wird. Oft aber gibt es mehrere Lagen des Gleichgewichts, die eine stabil und die andere labil, welche wechselseitig auf einander folgen müssen, weil ein Körper, welcher aus der labilen Lage herausgetreten ist, nothwendig zur stabilen gelangen muss.

Anmerkung 2.

§. 889. Im gegenwärtigen Falle, wo wir eine sphärische Oberfläche des Körpers vorausgesetzt haben, wird die durch den Mittelpunkt der Trägheit I und den Mittelpunkt der Figur G gezogene grade Linie jene zwei Punkte F und D ergeben und wenn der Körper mit diesen auf der horizontalen Ebene liegt, wird er sich in der Lage des Gleichgewichts befinden. Während er mit dem Punkte F die horizontale Ebene berührt, wird die Lage des Gleichgewichts stabil sein, wenn $FI < FG$ oder $f < 0$, hingegen labil, wenn $FI > FG$ oder $f > 0$ ist. Ausser diesen zwei Lagen des Gleichgewichts wird es keine weiter geben, ausgenommen wenn $f = 0$ ist, in welchem Falle durchaus alle Lagen die Eigenschaft des Gleichgewichts annehmen. Wenn ich auch hier die ganze Oberfläche des Körpers als sphärisch betrachte, so genügt es doch für unsern Zweck, wenn wenigstens der Theil, mit welchem er während der Dauer der Bewegung die horizontale Ebene berührt, sphärisch ist. Hiernach wird diese Behandlung sich auch auf diejenigen Kreisel erstrecken, deren Axen unten nicht in eine Spitze, wie wir vorher angenommen haben, sondern in eine Halbkugel oder auch einen kleinern Kugelabschnitt ausgebildet sind, so dass die oben betrachtete Form sich hieraus ergibt, wenn der Radius der Kugel $GF = e$ verschwindet; auf diese Weise wird unsere jetzige Behandlung die obige in sich begreifen. Die durch den Mittelpunkt der Trägheit I und den Mittelpunkt der sphärischen Grundfläche G gezogene grade Linie $DIGF$ stellt daher die eigenthümliche Axe eines Kreisels dar, welche freilich, so wie man die Kreisel zu construiren pflegt, zugleich eine der Hauptaxen des Körpers ist, die zwei übrigen haben aber gleiche Momente der Trägheit, eine Form, wie wir sie schon oben festgesetzt haben. Damit aber diese Behandlung sich weiter erstrecke und zugleich den schwankenden Bewegungen beliebiger Körper, welche eine sphärische Grundfläche haben, angepasst werden könne, werde ich die Hauptaxen des Körpers, welche beliebig von der eigenthümlichen DF verschieden sind, betrachten und in Bezug auf sie die Momente der Kräfte erforschen.

Aufgabe 105.

§. 890. Es ist der Druck Π gegeben, mit welchem ein Körper von sphärischer Grundfläche auf einer horizontalen Ebene aufliegt; man soll die daraus hervorgehenden Momente in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers bestimmen, auf welche

Weise diese auch immer in Bezug auf die eigenthümliche Axe liegen mögen.

Auflösung.

(Figur 121.) Um den Mittelpunkt der Trägheit I sei eine Kugel beschrieben, deren Scheitelpunkt Z ist, die eigenthümliche Axe halte die Lage DIG ein, so dass ihre Abweichung von der vertikalen Lage oder $DZ=\varrho$ ist. Da nun die Richtung des Druckes Π eine vertikale ist und durch den Punkt G geht, wo $IG=f$ ist, so stelle die vertikale gerade Linie $G\Pi$ diesen Druck $=\Pi$ dar; es ist demnach $ZDG\Pi$ eine vertikale Ebene. In derselben zerlege man die Kraft $G\Pi=\Pi$ längs der Richtungen GI und GV, von welchen diese auf jene normal ist; alsdann ergibt sich, weil der Winkel $DG\Pi=\varrho$ ist,

die Kraft längs $GI=\Pi\cos\varrho$

und die Kraft längs $GV=\Pi\sin\varrho$,

und da die erstere durch den Mittelpunkt der Trägheit I geht, so ergibt sie gar keine Momente. Nun seien IA, IB und IC die drei Hauptaxen des Körpers, welche eine gegebene Lage in Beziehung auf die eigenthümliche Axe ID einhalten, und man ziehe durch die Punkte A, B, C und D die Halbkreise DAG, DBG und DCG. Wäre nun die Axe IA normal auf die Ebene IGV, so würde in Bezug auf sie das Moment der Kraft GV gleich $\Pi f\sin\varrho$ sein; dasselbe muss nun aber vermindert werden im Verhältniss $1:\sin GA$ und zugleich im Verhältniss $1:\sin VGA$, so dass aus der Kraft des Druckes folgende Momente hervorgehen:

in Bezug auf die Axe $IA=\Pi f\sin\varrho\sin GA\sin VGA$ im Sinne CB,
" " " " " $IB=\Pi f\sin\varrho\sin GB\sin VGB$ " " AC,
" " " " " $IC=\Pi f\sin\varrho\sin GC\sin VGC$ " " BA

Diese drei Momente haben wir aber oben (§. 816.) durch die Buchstaben P, Q und R bezeichnet, in so fern wir voraussetzen, dass sie im entgegengesetzten Sinne wirken und wenn wir daher alle auf den Punkt D übertragen, so erhalten wir

$$P=-\Pi f\sin DZ\sin DA\sin ZDA=-\Pi f\sin ZD\sin ZA\sin DZA$$
$$Q=-\Pi f\sin DZ\sin DB\sin ZDB=-\Pi f\sin ZD\sin ZB\sin DZB$$
$$R=-\Pi f\sin DZ\sin DC\sin ZDC=-\Pi f\sin ZD\sin ZC\sin DZC.$$

Zusatz 1.

§. 891. Wir haben hier angenommen, dass der Mittelpunkt der Grundfläche G dem untern Endpunkte F näher liege, als der Mittelpunkt der Trägheit I. Findet ein anderer Fall statt,

ist etwa $FI < FG$ oder $FI < e$, so muss der Zwischenraum $GI = f$ negativ angenommen werden (§. 884.). Ist aber $GI = 0$, so verschwinden die Momente, oder es wird der Körper sich in jeder Lage im Gleichgewichte befinden.

Zusatz 2.

§. 892. Setzen wir nun, zur Bestimmung der Lage der eigenthümlichen Axe ID in Beziehung auf die Hauptaxen, die Bogen $AD = \zeta$, $BD = \eta$ und $CD = \theta$, ferner den Winkel $ZDA = \varphi$, wobei $ZD = \varrho$ ist; so hat man

$$\cos ADB = -\frac{\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta} \text{ und } \sin ADB = -\frac{\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta},$$

weil

$$\sin ADB : \sin DAB = \sin ADB : -\cos DAC = 1 : \sin BD = 1 : \sin\eta$$

und

$$\cos DAC = \frac{\cos CD}{\sin AD} = \frac{\cos\theta}{\sin\zeta}.$$

Es wird daher

$$\sin ZDB = \frac{-\cos\zeta\cos\eta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi}{\sin\zeta\sin\eta}$$

und so

$$P = -\Pi f\sin\varrho\sin\zeta\sin\varphi,$$

$$Q = \frac{\Pi f\sin\varrho[\cos\zeta\cos\eta\sin\varphi - \cos\theta\cos\varphi]}{\sin\zeta}$$

und

$$R = \frac{\Pi f\sin\varrho[\cos\zeta\cos\theta\sin\varphi + \cos\eta\cos\varphi]}{\sin\zeta}.$$

Zusatz 3.

§. 893. Wenn die eigenthümliche Axe ID mit der Hauptaxe IA übereinstimmte, so würde $\zeta = 0$ und $\eta = \theta = 90^\circ$, also $\cos\eta = \cos\theta = \sin\zeta$ sein und der Winkel φ unbestimmt bleiben. Aus den erstern Formeln werden sich aber alsdann die Momente der Kräfte

$$P = 0,\ Q = -\Pi f\sin\varrho\sin ZAB \text{ und } R = -\Pi f\sin\varrho\sin ZAC,$$

oder

$$P = 0,\ Q = \Pi f\cos ZC \text{ und } R = -\Pi f\cos ZB$$

ergeben.

Zusatz 4.

§. 894. Setzen wir aber wie oben (§. 857.) $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$, so finden wir im allgemeinen die Momente der Kräfte

$$P = \Pi f[\cos\theta\cos m - \cos\eta\cos n],$$

$$Q = \Pi f[\cos\zeta\cos n - \cos\theta\cos l]$$

und

$$R = \Pi f[\cos\eta\cos l - \cos\zeta\cos m],$$

woraus jene von selbst folgen, wenn man $\zeta = 0$ und $\eta = \theta = 90^\circ$ setzt.

Erläuterung.

§. 895. Die letztern Formeln werden folgendermaassen hergeleitet. Es ist zunächst

$$\sin DZ \sin ZDA = \sin ZA \sin ZAD,$$

also

$$P = -\Pi f \sin DA \sin ZA \sin ZAD.$$

Es ist aber $ZAD = BAD - BAZ$, ferner

$$\sin BAD = -\cos CAD = -\frac{\cos\theta}{\sin DA}, \quad \cos BAD = \frac{\cos\eta}{\sin DA},$$

$$\sin BAZ = -\cos CAZ = -\frac{\cos n}{\sin ZA} \text{ und } \cos BAZ = \frac{\cos m}{\sin ZA};$$

mithin

$$\sin ZAD = \frac{-\cos m \cos\theta + \cos n \cos\eta}{\sin ZA \sin DA}$$

und

$$P = \Pi f [\cos\theta \cos m - \cos\eta \cos n].$$

Die zwei übrigen Momente Q und R ergeben sich nach der Analogie und ohne weitere Rechnung. Ferner ist aber

$$\cos DZ = \cos\varrho = \cos\zeta \cos l + \cos\eta \cos m + \cos\theta \cos n,$$

welcher Ausdruck, wie er niemals die Einheit übertreffen kann, nur dann $=1$, mithin $DZ=0$ werden kann, wenn $l=\zeta$, $m=\eta$ und $n=\theta$ ist. Diese Bedingung ergibt nämlich zugleich die drei Gleichungen, indem

$$\cos\zeta \cos l + \cos\eta \cos m + \cos\theta \cos n = 1,$$

und ausserdem

$$\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1$$

und

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

ist. Subtrahirt man nun von der Summe der zwei letzten Gleichungen die doppelte erste, so ergibt sich

$$(\cos\zeta - \cos l)^2 + (\cos\eta - \cos m)^2 + (\cos\theta - \cos n)^2 = 0.$$

Die Summe dreier Quadrate kann aber nur dann $=0$ sein, wenn diese es einzeln sind.

Anmerkung.

§. 896. Da weder in diesen Ausdrücken, welche für die Momente der Kräfte P, Q und R gefunden worden sind, noch in dem Ausdruck

$$\Pi = M\left[1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}\right]$$

der Radius e der Kugel, welche die Grundfläche bildet, sich befindet; so wird alles, was oben über die Bewegung eines unten in eine Spitze ausgehenden Kreisels gelehrt worden ist, auch noch von solchen Kreiseln gelten, welche in eine Halb-

kugel oder einen andern Theil einer Kugel ausgehen, wenn nur der Punkt F, welcher vorher die Spitze bezeichnete, hier im Mittelpunkte G der sphärischen Figur gedacht wird. Es ist demnach gleichgültig, ob der Kreisel sich auf einer Spitze oder einer Halbkugel dreht, wenn nur f der Abstand des Mittelpunktes der Trägheit I vom Mittelpunkte der sphärischen Grundfläche ist. Wie gross nämlich der Radius e der letztern auch sein mag, so tritt er doch nicht in die Rechnung ein; verschwindet er aber, so geht die Grundfläche des Kreisels in eine Spitze über. Man sieht daher ein, dass das ganze vorige Kapitel hier eingereiht wird und dass demnach die Theorie der Kreisel, ohne irgend eine Mühe, als nicht wenig erweitert angesehen werden muss. Indem wir aber die Grundfläche sphärisch machen, stösst uns hier der vorher ausgeschlossene Fall auf, in welchem nämlich der Mittelpunkt der Trägheit I dem Boden näher liegt als der Mittelpunkt der Kugelform und es wird hier die Grösse f negativ. (Figur 123.) Es mag nun ein solcher Körper eine ganze Kugel sein, oder als Grundfläche den Theil MFN einer um den Mittelpunkt G beschriebenen Kugel haben, womit er auf der horizontalen Ebene aufliegt; so wollen wir seine Bewegung, in so fern die Berührung in diese Grundfläche fällt, erforschen. Hier werden wir aber gezwungen, dem Körper eine solche Beschaffenheit beizulegen, dass die eigenthümliche Axe $AGIF$, bei deren vertikalen Stande der Zustand der Ruhe dargestellt wird, zugleich die Hauptaxe des Körpers ist, die zwei übrigen Hauptaxen aber einander gleiche Momente haben. Ist nämlich das Moment der Trägheit in Bezug auf die Axe $IA = Ma^2$, in Bezug auf die zwei übrigen Mb^2 und Mc^2, so setzen wir $b^2 = c^2$. Ein solcher Körper mag demnach eine beliebige beigebrachte Bewegung empfangen haben, wir wollen nun bestimmen, wie er dieselbe fortsetzen wird.

Aufgabe 106.

§. 897. (Figur 123.) Ein mit der sphärischen Grundfläche MFN versehener Körper, in welchem die Axe des Gleichgewichts $AGIF$ die eigenthümliche Axe ist, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit $= Ma^2$, während die Momente der Trägheit in Bezug auf die zwei übrigen Hauptaxen einander gleich und $= Mc^2$ sind, hat eine beliebige Bewegung empfangen; man soll den weitern Verlauf der Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Es sei der Radius der sphärischen Grundfläche oder $FG = e$, und es liege der Mittelpunkt der Trägheit I unterhalb des Mittelpunktes der Grundfläche G, im Abstande $GI = f$. Was die fortschreitende Bewegung betrifft, so wird der Mittelpunkt der Trägheit I, wenn er eine Bewegung in horizontaler Richtung hat, diese constant und geradlinig beibehalten. In so fern er aber durch eine vertikale Bewegung angetrieben wird, so wird diese, wenn der Druck $= \Pi$ bekannt ist, durch die Gleichung

$$\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$$

bestimmt, wo ϱ die Abweichung der Axe AF von der vertikalen Lage ist und M die Masse oder das Gewicht des Körpers bezeichnet. Aber eben dieser Druck Π, welchen der Körper gegen die horizontale Ebene ausübt, kann nur aus der drehenden Bewegung erkannt werden. (Fig. 117.) Es habe demnach unser Körper in Bezug auf eine feste Kugel, auf welcher Z der Scheitelpunkt ist, jetzt nach Verlauf der Zeit t eine solche Lage, dass seine Hauptaxen in A, B und C fallen, und man setze die Bogen $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$, ferner aber die Winkel $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ und $XZC = \nu$, so dass $l = \varrho$ ist. Nun drehe sich aber der Körper um den Pol O, im Sinne ABC mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$, und wenn man die Bogen $OA = \alpha$, $OB = \beta$ und $OC = \gamma$ setzt, sei der Kürze wegen $\Omega\cos\alpha = x$, $\Omega\cos\beta = y$ und $\Omega\cos\gamma = z$. Die aus dem Druck Π entspringenden Momente der Kräfte sind aber

$$P = 0\,,\quad Q = -\Pi f\cos n \text{ und } R = \Pi f\cos m \quad (\S.\ 857.),$$

hieraus schliesst man auf folgende Gleichungen

$$dx = 0;\quad dy + \frac{a^2 - c^2}{c^2}xzdt = -\frac{2\Pi fgdt\cos n}{Mc^2};$$

$$dz + \frac{c^2 - a^2}{c^2}xydt = \frac{2\Pi fgdt\cos m}{Mc^2};$$

$$dl.\sin l = dt(y\cos n - z\cos m);$$
$$dm.\sin m = dt(z\cos l - x\cos n);$$
$$dn.\sin n = dt(x\cos m - y\cos l);$$
$$d\lambda.\sin l^2 = -dt(y\cos m + z\cos n);$$

die übrigen Winkel μ und ν werden hierdurch von selbst gegeben.

Setzen wir ferner $\cos l = p$, $\cos m = q$ und $\cos n = r$, so erhalten wir, weil diese Gleichungen mit den oben in Aufg. 99.

(§. 862.) integrirten übereinstimmen, ausgenommen dass f negativ gesetzt wird, folgende endliche Gleichungen:

$$x = A$$

und

$$\text{I)}\quad qy + rz = B - \frac{Aa^2p}{c^2}$$

$$\text{II)}\quad (qz - ry)^2 = \frac{(Cc^2 + 4fgp)(1-p^2) - c^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}{c^2 + f^2(1-p^2)}$$

$$\text{III)}\quad y^2 + z^2 = \frac{Cc^2 + 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}{c^2 + f^2(1-p^2)}$$

IV)

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2gc^2 - Afa^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)}{2g[c^2 + f^2(1-p^2)]} + \frac{fc^2p\left[Cc^2 + 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2\right]}{2g[c^2 + f^2(1-p^2)]^2}$$

$$\text{V)}\quad dt = \frac{dp\sqrt{c^2 + f^2(1-p^2)}}{\sqrt{(Cc^2 + 4fgp)(1-p^2) - c^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}},$$

$$\text{VI)}\quad d\lambda = -\frac{dt}{1-p^2}\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)$$

$$\text{VII)}\quad \Omega^2 = A^2 + \frac{Cc^2 + 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2}{c^2 + f^2(1-p^2)}$$

VIII)

$$\frac{ydz - zdy}{y^2 + z^2} = \frac{A(a^2 - c^2)dt}{c^2} + \frac{2\Pi fgdt\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)(c^2 + f^2(1-p^2))}{Mc^2\left[Cc^2 + 4fgp + f^2\left(B - \frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2\right]}.$$

Hier müssen die Constanten A, B, C und die übrigen, welche durch die Integration noch eintreten werden, durch den Anfangszustand des Körpers bestimmt werden.

Zusatz 1.

§. 898. Hat der Körper sich anfangs in Ruhe und die Hauptaxe A in a befunden, war dabei ihre Abweichung $Za = \mathfrak{l}$ und $\cos\mathfrak{l} = \mathfrak{p}$; so hat man für den Anfang $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$, weil $\Omega = 0$ ist, ferner $p = \mathfrak{p}$.

Es wird demnach

$$A = 0,\quad B = 0 \text{ und } Cc^2 = -4fg\mathfrak{p},$$

und wir erhalten hieraus nach Verlauf der Zeit t

$$x = 0$$

$$qy + rz = 0$$
$$qz - ry = \frac{2\sqrt{fg(p-\mathfrak{p})(1-p^2)}}{\sqrt{c^2+f^2(1-p^2)}}$$
$$y^2 + z^2 = \frac{4fg(p-\mathfrak{p})}{c^2+f^2(1-p^2)} = \Omega^2$$

und
$$\frac{\Pi}{M} = \frac{c^2}{c^2+f^2(1-p^2)} + \frac{2f^2c^2p(p-\mathfrak{p})}{[c^2+f^2(1-p^2)]^2}.$$

Zusatz 2.

§. 899. Ausserdem ist aber in diesem Falle $d\lambda = 0$, und es wird sich daher die Axe, welche anfangs in a lag, durch den Bogen aZ bewegen. Ferner wird

$$dt = \frac{dp\sqrt{c^2+f^2(1-p^2)}}{2\sqrt{fg(p-\mathfrak{p})(1-p^2)}},$$

worauf, weil $p > \mathfrak{p}$ oder $l < \mathfrak{l}$ ist, die Axe von a direct nach Z fortschreiten wird. Endlich wird, weil $ydz - zdy = 0$ ist,

$$z = \delta y \text{ und } y = \frac{2\sqrt{fg(p-\mathfrak{p})}}{\sqrt{(1+\delta^2)[c^2+f^2(1-p^2)]}},$$

ferner

$$q(y^2+z^2) = \frac{2z\sqrt{fg(p-\mathfrak{p})(1-p^2)}}{\sqrt{c^2+f^2(1-p^2)}}$$

oder

$$q = \frac{\delta\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1+\delta^2}} \text{ und } r = -\frac{\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\cos ZAB = \frac{q}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}},$$

also bleibt dieser Winkel constant.

Zusatz 3.

§. 900. Wenn demnach der Körper sich anfangs in Ruhe befunden und seine Hauptaxe IA die geneigte Lage Ia eingehalten hat, so wird sie sich von hier gerade aufrichten, indem sie von a nach Z aufsteigt, auch wird sie sich um den Punkt O drehen, so dass, weil $x = \Omega\cos\alpha = 0$, der Bogen AO ein Quadrant ist. Weil ferner

$$\cos ZO = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = \frac{qy+rz}{\Omega} = 0$$

ist, wird auch ZO ein Quadrant und O der Pol des Kreises XZY sein. Ist die Axe nach Z gelangt, so wird

$$\Omega = \frac{2\sqrt{fg(1-\mathfrak{p})}}{c}.$$

Anmerkung 1.

§. 901. Hat der Körper sich anfangs nicht in Ruhe befunden, aber eine beliebige Bewegung angenommen, so wird die Fortsetzung der Bewegung durch dieselben Formeln bestimmt, wenn man nur den Constanten A, B und C dem Anfangszustande entsprechende Werthe beilegt. Hierbei gelangt man aber zu solchen Formeln, deren Integration nur ausgeführt werden kann, wenn man die Quadraturen höherer Ordnung zugibt. Selbst auch der hier sehr einfache Fall, in welchem der Körper sich anfangs in der geneigten Lage in Ruhe befunden hat, ist von der Integration der Formel

$$dt = \frac{dp\sqrt{c^2+f^2(1-p^2)}}{2\sqrt{fg(p-\mathfrak{p})(1-p^2)}}$$

abhängig, und diese kann weder durch Logarithmen noch durch Kreisbogen ausgeführt werden. Ist aber die anfängliche Abweichung Za gleichsam unendlich klein, so wird die Arbeit auf Kreisbogen zurückgeführt. Es sei nämlich im Anfange $Za = \mathfrak{l}$ und nach Verlauf der Zeit t die Abweichung $ZA = l$, alsdann wird, weil $\mathfrak{l}$ und l sehr kleine Bogen sind,

$$p = 1 - \tfrac{1}{2}l^2, \text{ also } dp = -ldl \text{ und } \mathfrak{p} = 1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2,$$

mithin

$$dt = -\frac{cdl}{\sqrt{2fg(\mathfrak{l}^2-l^2)}} \text{ und } t = \frac{c}{\sqrt{2fg}}\,\text{arc}\cdot\cos\frac{l}{\mathfrak{l}}$$

oder

$$l = \mathfrak{l}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c}.$$

Die Axe IA wird daher vertikal nach Verlauf der Zeit $= \dfrac{\pi c}{2\sqrt{2fg}}$ und der Körper isochrone Schwankungen ausführen, wie ein einfaches Pendel, dessen Länge $= \dfrac{c^2}{f}$ ist (§. 215.).

Anmerkung 2.

§. 902. Hätten wir nicht dem Körper eine solche Beschaffenheit beigelegt, dass seine natürliche Axe FD, welche im Zustande des Gleichgewichts vertikal wird, zugleich seine Hauptaxe wäre und die zwei übrigen gleiche Momente der Trägheit hätten; so würden wir zwar die seine Bewegung enthaltenden Differentialformeln haben angeben, auf keine Weise aber, in Folge der

Mangelhaftigkeit der Analysis, die Bewegung selbst bestimmen können. Indessen kommt es aber, wie in dem behandelten Falle, wo wir dem Körper eine unendlich kleine Abweichung beigelegt haben, vor, dass die Bewegung ziemlich einfach und der eines Pendels ähnlich wird und diess findet selbst im allgemeinen statt, auf welche Weise auch immer die Hauptaxen rücksichtlich der natürlichen Axe liegen mögen. In der Lage des Gleichgewichts nämlich, wo die natürliche Axe DF die vertikale Lage einhält, nehme ich an, dass der Mittelpunkt der Trägheit I unterhalb des Mittelpunktes G der sphärischen Grundfläche im Abstande $GI=f$ liege. Hierauf setze ich voraus, dass dieser Körper unendlich wenig von seiner Lage der Ruhe abweiche, so dass der Bogen $ZD=\varrho$ (Figur 121.) unendlich klein wird. Offenbar wird alsdann der Körper, indem er sich wieder aufrichtet, Schwingungen oder Schwankungen ausführen, bis er endlich, nachdem die Bewegung durch den Widerstand aufgehoben ist, im Zustande des Gleichgewichts zur Ruhe kommt. Weil hier die Abweichung immer sehr klein ist, braucht auch die ganze Figur des Körpers nicht sphärisch zu sein, sondern es ist hinreichend, wenn sein unterster und zwar der sehr kleine Theil, womit er die horizontale Ebene berührt, einer sphärischen Oberfläche angehört, deren Mittelpunkt in G liegt. Indem wir daher diese schwankende Bewegung erforschen, wollen wir zuerst untersuchen, auf welche Weise die oben im Allgemeinen entwickelten Formeln für diesen Fall, wo die natürliche Axe DF des Körpers so wenig als möglich von der vertikalen Lage abweicht, zusammengezogen und hierdurch die Momente der Kräfte P, Q und R so bequem bestimmt werden können, dass wir hierauf mittelst derselben die Bewegung anzugeben vermögen.

Aufgabe 107.

§. 903. (Fig. 121.) Ein mit einer sphärischen Grundfläche versehener Körper weicht unendlich wenig von der Lage des Gleichgewichts ab; man soll die Momente der Kräfte in Bezug auf die drei Hauptaxen bestimmen.

Auflösung.

Um I, den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers ist eine Kugel beschrieben, auf welcher Z der Scheitelpunkt ist, und es habe die natürliche Axe ID des Körpers eine um sehr wenig von der Vertikalen abweichende Lage, so dass der Bogen

$ZD = \varrho$ äusserst klein ist. Die Hauptaxen des Körpers entsprechen aber den Punkten A, B und C, deren Lage in Bezug auf den Punkt D sich so verhält, dass die Bogen $DA = \zeta$, $DB = \eta$ und $DC = \theta$, und zwar constant sind. Nun seien ferner in Bezug auf den Scheitelpunkt Z die Bogen $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$, diese werden, weil der Bogen $ZD = \varrho$ äusserst klein ist, kaum von jenen ζ, η und θ verschieden sein; setzen wir daher

$$\cos l = \cos\zeta + p, \quad \cos m = \cos\eta + q \text{ und } \cos n = \cos\theta + r,$$

so werden p, q und r sehr kleine Grössen sein. Da aber so wohl

$$\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1,$$

als auch

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

ist, so wird

$$2p\cos\zeta + 2q\cos\eta + 2r\cos\theta + p^2 + q^2 + r^2 = 0.$$

Da ferner

$$\cos\varrho = \cos\zeta\cos l + \cos\eta\cos m + \cos\theta\cos n$$

ist, so wird

$$\cos\varrho = 1 + p\cos\zeta + q\cos\eta + r\cos\theta$$

also

$$p\cos\zeta + q\cos\eta + r\cos\theta = -\tfrac{1}{2}\varrho^2 \text{ und } p^2 + q^2 + r^2 = \varrho^2.$$

Wir erhalten daher nun, wenn wir den Druck des Körpers gegen die horizontale Ebene $= \Pi$ setzen, nach §. 894., indem wir f einen negativen Werth beilegen, die Momente der Kräfte in Bezug auf die Hauptaxen:

$$P = \Pi f(r\cos\eta - q\cos\theta), \quad Q = \Pi f(p\cos\theta - r\cos\zeta)$$

und

$$R = \Pi f(q\cos\zeta - p\cos\eta).$$

Wir haben aber ferner gesehen, dass $\Pi = M\left(1 - \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}\right)$ ist, und da $\cos\varrho$ sehr nahe $= 1$ ist und nur sehr kleine Veränderungen erleidet, so wird mit hinreichender Genauigkeit $\Pi = M$, so dass wir anzunehmen haben, der Körper drücke mit seinem ganzen Gewichte gegen die horizontale Ebene. Wir haben auf diese Weise

$$P = Mf(r\cos\eta - q\cos\theta)$$

$$Q = Mf(p\cos\theta - r\cos\zeta)$$

und

$$R = Mf(q\cos\zeta - p\cos\eta).$$

Aufgabe 108.

§. 904. (Figur 121.) Ein Körper mit sphärischer Grundfläche weicht ein wenig von der Lage der Ruhe, in welcher die Axe DI vertikal ist, ab und wird hierauf losgelassen, so

dass er aus der Ruhe gegen den Stand des Gleichgewichts zurückkehrt; man soll seine Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Nach Verlauf der Zeit t habe der Körper die in der Figur dargestellte Lage, und es bleiben alle in der vorhergehenden Aufgabe aufgestellten Bezeichnungen dieselben; ferner seien aber die Momente der Trägheit des Körpers, in Bezug auf die Axen IA, IB und IC, Ma^2, Mb^2 und Mc^2. Es drehe sich nun aber der Körper um die Axe IO, im Sinne ABC mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ und es seien die Bogen $AO=\alpha$, $BO=\beta$ und $CO=\gamma$; ferner setze man $\Omega\cos\alpha=x$, $\Omega\cos\beta=y$ und $\Omega\cos\gamma=z$. Weil wir annehmen, dass im Anfange, wo $t=0$ ist, der Körper seine Bewegung von der Ruhe ab beginne, so war damals $x=0$, $y=0$ und $z=0$. Weil ferner seine Bewegung immer eine sehr langsame bleibt, werden auch die Grössen x, y und z stets sehr kleine Werthe haben, so dass man die Produkte je zweier xy, xz und yz als gegen sie einzeln verschwindend ansehen kann. Da nun die Momente der antreibenden Kräfte P, Q und R so eben bestimmt worden sind, erhalten wir nach §. 809. die folgenden Gleichungen;

$$dx=\frac{2fgdt}{a^2}(r\cos\eta-q\cos\theta),$$

$$dy=\frac{2fgdt}{b^2}(p\cos\theta-r\cos\zeta)$$

und

$$dz=\frac{2fgdt}{c^2}(q\cos\zeta-p\cos\eta).$$

Weil ferner $\cos l=\cos\zeta+p$, $\cos m=\cos\eta+q$ und $\cos n=\cos\theta+r$ ist, so wird, da ζ, η und θ constant sind,

$$dl.\sin l=-dp,\quad dm.\sin m=-dq \text{ und } dn.\sin n=-dr;$$

wesshalb ausserdem folgende Gleichungen hinzutreten:

$$-dp=dt(y\cos\theta-z\cos\eta),$$
$$-dq=dt(z\cos\zeta-x\cos\theta)$$
$$-dr=dt(x\cos\eta-y\cos\zeta).$$

Hierbei haben wir die Producte yr, zq, zp, xr, xq und yp als sehr klein, im Vergleich mit den hier dargestellten Gliedern, fortgelassen. Setzt man endlich voraus, dass der Bogen ZA jetzt von einem gewissen festen Vertikalkreise um den Winkel λ abweiche, so erhalten wir, weil $\sin l^2=\sin\zeta^2-2p\cos\zeta$ ist, die folgende Gleichung

$$d\lambda=-\frac{dt(y\cos\eta+z\cos\theta)}{\sin\zeta^2-2p\cos\zeta}.$$

Weil aber in den obigen Gleichungen die Grössen x, y,

z und p, q, r überall in Einer Dimension vorkommen, und weil die drei erstern für $t=0$ verschwinden sollen, so wird man offenbar sowohl dieser Bedingung, als auch jenen sechs Gleichungen Genüge leisten können, indem man setzt:

$$x=A\sin\delta t,\quad y=B\sin\delta t,\quad z=C\sin\delta t,$$
$$p=D\cos\delta t,\quad q=E\cos\delta t,\quad r=F\cos\delta t.$$

Man erhält alsdann, wenn man die ersten drei Gleichungen durch $\cos\delta t$ und die drei letztern durch $\sin\delta t$ dividirt, die folgenden:

$$A\delta=\frac{2fg}{a^2}(F\cos\eta-E\cos\theta),\qquad D\delta=B\cos\theta-C\cos\eta,$$

$$B\delta=\frac{2fg}{b^2}(D\cos\theta-F\cos\zeta),\qquad E\delta=C\cos\zeta-A\cos\theta,$$

$$C\delta=\frac{2fg}{c^2}(E\cos\zeta-D\cos\eta),\qquad F\delta=A\cos\eta-B\cos\zeta.$$

Substituirt man die Werthe der Coëfficienten D, E und F aus den hintern Gleichungen in die vordern, so erhalten wir

$$\frac{Aa^2\delta^2}{2fg}=A\cos\eta^2-B\cos\zeta\cos\eta-C\cos\zeta\cos\theta+A\cos\theta^2,$$
$$\frac{Bb^2\delta^2}{2fg}=B\cos\theta^2-C\cos\eta\cos\theta-A\cos\zeta\cos\eta+B\cos\zeta^2$$

und $$\frac{Cc^2\delta^2}{2fg}=C\cos\zeta^2-A\cos\zeta\cos\theta-B\cos\eta\cos\theta+C\cos\eta^2.$$

Nun setzen wir der Kürze wegen $A\cos\zeta+B\cos\eta+C\cos\theta=G$ und erhalten so, weil $\cos\zeta^2+\cos\eta^2+\cos\theta^2=1$ ist,

$$A\left(1-\frac{\delta^2a^2}{2fg}\right)=G\cos\zeta,$$
$$B\left(1-\frac{\delta^2b^2}{2fg}\right)=G\cos\eta$$

und $$C\left(1-\frac{\delta^2c^2}{2fg}\right)=G\cos\theta.$$

Ferner wollen wir zur Abkürzung $\frac{\delta^2}{2fg}=u$ setzen, wonach diese Gleichungen ergeben

$$A=\frac{G\cos\zeta}{1-a^2u},\quad B=\frac{G\cos\eta}{1-b^2u}\ \text{und}\ C=\frac{G\cos\theta^2}{1-c^2u}.$$

Da aber $A\cos\zeta+B\cos\eta+C\cos\theta=G$ ist, so erhalten wir

$$\frac{\cos\zeta^2}{1-a^2u}+\frac{\cos\eta^2}{1-b^2u}+\frac{\cos\theta}{1-c^2u}=1,$$

oder wenn man diese Gleichung entwickelt und durch u dividirt

$$a^2b^2c^2u^2-[b^2c^2\sin\zeta^2+a^2c^2\sin\eta^2+a^2b^2\sin\theta^2]u$$
$$+a^2\cos\zeta^2+b^2\cos\eta^2+c^2\cos\theta^2=0.$$

Indem wir nun die bekannten Grössen

$$b^2c^2\sin\zeta^2 + a^2c^2\sin\eta^2 + a^2b^2\sin\theta^2 = Ka^2b^2c^2$$

und

$$a^2\cos\zeta^2 + b^2\cos\eta^2 + c^2\cos\theta^2 = La^2b^2c^2$$

setzen, erhalten wir die Gleichung

$$u^2 - Ku + L = 0$$

und hieraus

$$u = \frac{\delta^2}{2fg} = \tfrac{1}{2}K + \sqrt{\tfrac{1}{4}K^2 - L}\,.$$

Die Grösse G bleibt hier unbestimmt, und man hat dieselbe dem Anfangszustande entsprechend zu bestimmen, wogegen K und L durch die Natur des Körpers gegeben sind.

Da also nun der Werth von u gefunden ist, erhalten wir

$$\delta = \sqrt{2fgu},\quad A = \frac{G\cos\zeta}{1-a^2u},\quad B = \frac{G\cos\eta}{1-b^2u},\quad C = \frac{G\cos\theta}{1-c^2u},$$

$$D = \frac{Gu(b^2-c^2)\cos\eta\cos\theta}{\delta(1-b^2u)(1-c^2u)},\quad E = \frac{Gu(c^2-a^2)\cos\zeta\cos\theta}{\delta(1-c^2u)(1-a^2u)}$$

und

$$F = \frac{Gu(a^2-b^2)\cos\zeta\cos\eta}{\delta(1-a^2u)(1-b^2u)}\,.$$

Wenn nun der Bogen ZD, welcher jetzt $=\varrho$ ist, im Anfange $=\mathfrak{r}$ war, so erhalten wir, weil in diesem Falle zugleich $p=D$, $q=E$ und $r=F$ ist,

$$D^2 + E^2 + F^2 = \mathfrak{r}^2 \quad (\S.\ 903.),$$

und man findet hieraus die Constante G durch $\mathfrak{r}$ ausgedrückt. Um endlich den Winkel λ zu finden, haben wir

$$d\lambda = -\frac{dt(B\cos\eta + C\cos\theta)\sin\delta t}{\sin\zeta^2},$$

also

$$\lambda = \frac{(B\cos\eta + C\cos\theta)(\cos\delta t - 1)}{\delta\sin\zeta^2};$$

wenn nämlich der Bogen ZA sich anfangs auf dem festen Vertikalkreise befunden hat und wir annehmen, dass er sich von da im Sinne XOY bewege. In so fern nun dieser Ausdruck für λ negativ ist, müssen wir die Axe IA als im entgegengesetzten Sinne um Z sich drehend betrachten.

Da endlich $p^2 + q^2 + r^2 = \varrho^2$ ist, so wird

$$\varrho = \mathfrak{r}\cos\delta t,$$

weil $\mathfrak{r} = \sqrt{D^2 + E^2 + F^2}$. Es erhellt hieraus, dass die Axe ID in die vertikale Lage aufgerichtet werden wird nach Verlauf der Zeit $= \frac{\pi}{2\delta}$, und dass ihre Schwankungen isochron sein werden mit einem Pendel, dessen Länge (§. 215.)

$$=\frac{2g}{\delta^2}=\frac{1}{fu}=\frac{K-\sqrt{K^2-4L}}{2Lf}.$$

Zusatz 1.

§. 905. Da $D^2+E^2+F^2=\mathfrak{r}^2$ ist, so wird

$$\delta^2\mathfrak{r}^2=A^2[\cos\eta^2+\cos\theta^2]+B^2[\cos\zeta^2+\cos\theta^2]+C^2[\cos\zeta^2+\cos\eta^2]$$
$$-2BC\cos\eta\cos\theta-2AC\cos\zeta\cos\theta-2AB\cos\zeta\cos\eta.$$

Da ferner $G=A\cos\zeta+B\cos\eta+C\cos\theta$ ist, so erhält man, wenn man das Quadrat dieser Gleichung zu jener addirt,

$$\delta^2\mathfrak{r}^2+G^2=A^2+B^2+C^2.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\frac{1}{1-a^2u}=\mathfrak{P},\quad \frac{1}{1-b^2u}=\mathfrak{Q} \text{ und } \frac{1}{1-c^2u}=\mathfrak{R},$$

so wird, weil

$$\mathfrak{P}\cos\zeta^2+\mathfrak{Q}\cos\eta^2+\mathfrak{R}\cos\theta^2=1,$$

und $A=G\mathfrak{P}\cos\zeta$, $B=G\mathfrak{Q}\cos\eta$ und $C=G\mathfrak{R}\cos\theta$,

$$\delta^2\mathfrak{r}^2=G^2[\mathfrak{P}^2\cos\zeta^2+\mathfrak{Q}^2\cos\eta^2+\mathfrak{R}^2\cos\theta^2-1].$$

Da aber

$$\mathfrak{P}^2-\mathfrak{P}=\frac{a^2u}{(1-a^2u)^2},\quad \mathfrak{Q}^2-\mathfrak{Q}=\frac{b^2u}{(1-b^2u)^2}$$

und

$$\mathfrak{R}^2-\mathfrak{R}=\frac{c^2u}{(1-c^2u)^2},$$

so erhält man

$$\delta^2\mathfrak{r}^2=G^2u\left[\frac{a^2\cos\zeta^2}{(1-a^2u)^2}+\frac{b^2\cos\eta^2}{(1-b^2u)^2}+\frac{c^2\cos\theta^2}{(1-c^2u)^2}\right].$$

Zusatz 2.

§. 906. Weil ferner $\delta^2=2fgu$ ist, so findet man, wenn man die Gleichung $u^2-Ku+L=0$ zu Hülfe ruft,

$$G^2=\frac{-2fg\mathfrak{r}^2(1-a^2u)(1-b^2u)(1-c^2u)}{a^2\cos\zeta^2+b^2\cos\eta^2+c^2\cos\theta^2-a^2b^2c^2u^2}.$$

Erläuterung.

§. 907. Dieser hinreichend einfache Ausdruck von G^2 wird auf folgende Weise hergeleitet. Setzen wir der Kürze wegen $\frac{1}{a^2}=\mathfrak{a}$, $\frac{1}{b^2}=\mathfrak{b}$ und $\frac{1}{c^2}=\mathfrak{c}$, so haben wir:

I) $K=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\cos\zeta^2-\mathfrak{b}\cos\eta^2-\mathfrak{c}\cos\theta^2$

II) $L=\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\zeta^2+\mathfrak{a}\mathfrak{c}\cos\eta^2+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos\theta^2$

III) $1=\cos\zeta^2+\cos\eta^2+\cos\theta^2$.

Da nun $u^2-Ku+L=0$ ist, so leitet man hieraus ab

$$\cos\zeta^2 = \frac{\mathfrak{a}K - L - \mathfrak{a}^2}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})} \text{ und } u\cos\zeta^2 = \frac{(\mathfrak{a}-u)(L-\mathfrak{a}u)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})},$$

also

$$\frac{\delta^2\mathfrak{r}^2}{G^2} = \frac{\mathfrak{a}(L-\mathfrak{a}u)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})(\mathfrak{a}-u)} + \frac{\mathfrak{b}(L-\mathfrak{b}u)}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{b}-u)} + \frac{\mathfrak{c}(L-\mathfrak{c}u)}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})(\mathfrak{c}-u)},$$

woraus man durch Reduction jene Gleichung erhält.

Anmerkung.

§. 908. Diess erstreckt sich auf die Schwankungen aller Körper, deren Grundfläche ein Theil einer Kugel ist, wie auch immer ihre Hauptaxen im Verhältniss zur natürlichen Axe *DGIF* liegen und die Momente der Trägheit in Bezug auf dieselben ungleich sein mögen. Damit wir bei einer so grossen Ausdehnung nicht in Verwirrung gerathen, wird es angemessen sein, zuerst unsere Formeln den einfachen Arten von Körpern anzupassen, von welchen wir dann leicht zu complicirtern Arten fortschreiten können. Zuerst ist nun derjenige Fall der aller einfachste, in welchem alle Momente der Trägheit unter sich gleich sind, oder $a^2 = b^2 = c^2$ ist, weil wir alsdann auch *DF* für eine Hauptaxe halten können und sich dieselben Schwankungen ergeben müssen, welche wir schon vorher bestimmt haben. Hierauf wollen wir aber wenigstens zwei Momente der Trägheit einander gleich, nämlich $b^2 = c^2$ setzen.

Fall I.

Hier ist $a^2 = b^2 = c^2$.

§. 909. In diesem Falle haben wir

$$A = \frac{G\cos\zeta}{1-a^2u}, \quad B = \frac{G\cos\eta}{1-a^2u} \text{ und } C = \frac{G\cos\theta}{1-a^2u},$$

mithin

$$G = \frac{G\cos\zeta^2 + G\cos\eta^2 + G\cos\theta^2}{1-a^2u} = \frac{G}{1-a^2u},$$

so dass $u = 0$ wird. Denselben Formeln geschieht aber auch Genüge, indem man

$$u = \frac{1}{a^2} \text{ und } G = 0$$

setzt, so dass

$$A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\theta = 0$$

und nichts weiter bestimmt wird. Wir haben auf diese Weise

$$\delta = \frac{\sqrt{2fg}}{a},$$

ferner aber

$$D = \frac{B\cos\theta - C\cos\eta}{\delta}, \quad E = \frac{C\cos\zeta - A\cos\theta}{\delta},$$

$$F = \frac{A\cos\eta - B\cos\zeta}{\delta}$$

und $$\delta^2 \mathfrak{r}^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

so dass $\varrho = \mathfrak{r}\cos\delta t$ ist.

Nun wollen wir sehen, um welchen Pol O der Körper sich drehen wird. Wir haben zuerst

$$\cos OD = \cos\alpha\cos\zeta + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta$$

oder

$$\Omega\cos OD = x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\theta = 0; \text{ also } OD = 90^0.$$

Zweitens ist

$$\cos OZ = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n$$

oder $$\Omega\cos OZ = x\cos l + y\cos m + z\cos n$$
$$= 0 + px + qy + rz = 0,$$

weil $AD + BE + CF = 0$; also haben wir auch

$$OZ = 90^\circ.$$

Hieraus ersieht man, dass der Körper sich um den Pol O, welcher der Pol des Vertikalkreises ZDX ist, drehen und so die Axe aus D direct in die vertikale Lage Z aufsteigen wird, so dass nach Verlauf der Zeit t

$$\varrho = \mathfrak{r}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{a}$$

ist. Diese Schwankungen werden daher isochron sein mit den Schwingungen eines Pendels, dessen Länge $= \dfrac{a^2}{f}$ ist.

Fall II.

Hier sind nur zwei Hauptmomente einander gleich, oder es ist $b^2 = c^2$.

§. 910. In diesem Falle ist

$$K = \frac{c^2\sin\zeta^2 + a^2\sin\eta^2 + a^2\sin\theta^2}{a^2c^2} = \frac{c^2\sin\zeta^2 + a^2 + a^2\cos\zeta^2}{a^2c^2}$$

und $$L = \frac{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}{a^2c^4};$$

oder da die Gleichung, aus welcher u bestimmt werden muss, in

$$\frac{\cos\zeta^2}{1 - a^2u} + \frac{\sin\zeta^2}{1 - c^2u} = 1$$

übergeht, haben wir

$$a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2 = a^2c^2u \text{ und } u = \frac{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}{a^2c^2}.$$

Dieser Werth lässt sich auch aus der allgemeinen Gleichung ableiten, nur wird auf diese Weise die nutzlose Wurzel $u = \frac{1}{c^2}$ ausgeschlossen. Wir erhalten daher

$$\delta = \frac{\sqrt{2fg(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)}}{ac}$$

ferner

$$A = -\frac{Gc^2}{(a^2 - c^2)\cos\zeta}, \quad B = \frac{Ga^2\cos\eta}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2} \text{ und } C = \frac{Ga^2\cos\theta}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2}.$$

Um hierauf G durch $\mathfrak{r}$ ausgedrückt zu erhalten, wird

$$\delta^2\mathfrak{r}^2 + G^2 = \frac{G^2(a^4\cos\zeta^2 + c^4\sin\zeta^2)}{(a^2 - c^2)^2\sin\zeta^2\cos\zeta^2}$$

oder

$$\delta^2\mathfrak{r}^2 = \frac{G^2(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)^2}{(a^2 - c^2)^2\sin\zeta^2\cos\zeta^2}$$

und

$$G = \frac{(a^2 - c^2)\delta\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta}{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2} = \frac{(a^2 - c^2)\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta\sqrt{2fg}}{ac\sqrt{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}}.$$

Wir erhalten ferner

$$D = 0, \quad E = \frac{\mathfrak{r}\cos\theta}{\sin\zeta}, \quad F = -\frac{\mathfrak{r}\cos\eta}{\sin\zeta},$$

und auch

$$A = -\frac{c\mathfrak{r}\sin\zeta\sqrt{2fg}}{a\sqrt{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}}, \quad B = \frac{a\mathfrak{r}\cos\zeta\cos\eta\sqrt{2fg}}{c\sin\zeta\sqrt{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}}$$

und

$$C = \frac{a\mathfrak{r}\cos\zeta\cos\theta\sqrt{2fg}}{c\sin\zeta\sqrt{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}}.$$

Hieraus leiten wir ab

$$x = \Omega\cos\alpha = A\sin\delta t, \quad y = \Omega\cos\beta = B\sin\delta t, \quad z = \Omega\cos\gamma = C\sin\delta t,$$

$$p = \cos l - \cos\zeta = D\cos\delta t, \quad q = \cos m - \cos\eta = E\cos\delta t$$

und

$$r = \cos n - \cos\theta = F\cos\delta t,$$

wie auch

$$\lambda = -\frac{a\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta(1 - \cos\delta t)\sqrt{2fg}}{\delta c\sqrt{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}} = -\frac{a^2\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta(1 - \cos\delta t)}{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}.$$

Hierbei ist λ der Winkel VZA, wenn ZV der feste Vertikalkreis ist, von welchem wir die Abweichung des Pols A rechnen. Ferner ist aber

$$\varrho = \mathfrak{r}\cos\delta t,$$

und um den Winkel DZV zu erhalten, suchen wir den Winkel DZA aus der Formel

$$\cos DZA = \frac{\cos\zeta - \cos l\cos\varrho}{\varrho\sin l} = \frac{\cos\zeta - \cos\zeta\cos\varrho - p\cos\varrho}{\varrho\sin\zeta} = \tfrac{1}{2}\varrho\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta},$$

weil $D = 0$ und daher auch $p = 0$ ist, demnach

$$\cos DZA = \frac{\mathfrak{r}\cos\zeta\cos\delta t}{2\sin\zeta}.$$

Da nun dieser Ausdruck unendlich klein ist, so sieht man ein, dass der Winkel DZA sehr nahe $= 90^0$ und $= ZDA$ sein wird. Da ferner im Anfange der Winkel ZDA kein Rechter gewesen ist, so erstreckt sich diese Auflösung, welche nämlich offenbar nur eine besondere ist, nicht bis dahin. Uebrigens sind aber auch diese Schwankungen isochron mit den Schwingungen eines Pendels, dessen Länge

$$= \frac{a^2c^2}{f(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)}$$

ist. Endlich wird, weil $\Omega = \sin\delta t\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ist,

$$\Omega = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg(a^4\cos\zeta^2 + c^4\sin\zeta^2)}}{ac\sqrt{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}}\sin\delta t.$$

Um aber den Drehungspol O zu finden, haben wir, weil $Ap + Bq + Cr = 0$ ist,

$$\Omega\cos OD = (A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\theta)\sin\delta t = G\sin\delta t$$

und $\Omega\cos OZ = (A\cos l + B\cos m + C\cos n)\sin\delta t = G\sin\delta t,$

also $$OD = OZ.$$

Anmerkung.

§. 911. Es ist kein Wunder, dass diese Auflösung keine allgemeine ist, da nämlich durch die Natur des Körpers, welche in den Grössen a^2, b^2, c^2 und den Winkeln ζ, η, θ enthalten ist, und durch die anfängliche Lage der Axe DF und ihre Abweichung $\mathfrak{r}$ von der vertikalen Lage alle Coëfficienten A, B, C, D, E und F nebst der Zahl δ bestimmt werden. Durch sie wird aber der Winkel ADZ, um welchen der Bogen DA im Anfange vom Bogen DZ abwich, von selbst bestimmt und bleibt daher nicht mehr, wie die Natur der Sache es verlangt, unserm Belieben überlassen. Da wir aber im allgemeinen für die Grösse u einen zweifachen Werth erhalten haben, von welchem man mit Recht keinen gegen den andern verwerfen darf, so werden wir, wenn wir beide zugleich anwenden, eine weitere Auflösung erhalten, wodurch man auch bewirken kann, dass der Winkel ADZ anfangs einem gegebenen gleich werde. Da nämlich in den Differentialgleichungen die Grössen x, y, z, p, q und r überall eine einzige Dimension haben, so wird man, wenn man ihnen auf doppelte Weise Genüge leisten kann, für eine jede Grösse die Summe je zweier Werthe setzen können und hierdurch eine allgemeine Auflösung erlangen; diess wollen wir hier auseinandersetzen.

Aufgabe 109.

§. 912. Ein mit einer sphärischen Grundfläche versehener Körper ist auf beliebige Weise unendlich wenig aus der Lage des Gleichgewichts gebracht, und wird plötzlich losgelassen; man soll die schwankende Bewegung bestimmen, durch welche er angetrieben werden wird.

Auflösung.

Behalten wir die Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe bei, so seien, weil wir für

$$\frac{\sin\zeta^2}{a^2}+\frac{\sin\eta^2}{b^2}+\frac{\sin\theta^2}{c^2}=K$$

und

$$\frac{\cos\zeta^2}{b^2c^2}+\frac{\cos\eta^2}{a^2c^2}+\frac{\cos\theta^2}{a^2b^2}=L$$

doppelte Werthe für u finden, diese

$$u=\tfrac{1}{2}K+\sqrt{\tfrac{1}{4}K^2-L} \text{ und } u'=\tfrac{1}{2}K-\sqrt{\tfrac{1}{4}K^2-L}.$$

Hieraus erhalten wir auch zwei Werthe für δ, welche

$$\delta=\sqrt{2fgu} \text{ und } \delta'=\sqrt{2fgu'}$$

sein mögen. Hierdurch erhalten wir ferner für die 6 Grössen x, y, z, p, q und r die folgenden Werthe:

$$x=\Omega\cos\alpha=\frac{G\cos\zeta\sin\delta t}{1-a^2u}+\frac{H\cos\zeta\sin\delta' t}{1-a^2u'}$$

$$y=\Omega\cos\beta=\frac{G\cos\eta\sin\delta t}{1-b^2u}+\frac{H\cos\eta\sin\delta' t}{1-b^2u'}$$

$$z=\Omega\cos\gamma=\frac{G\cos\theta\sin\delta t}{1-c^2u}+\frac{H\cos\theta\sin\delta' t}{1-c^2u'}$$

$$p=\cos l-\cos\zeta=\frac{Gu(b^2-c^2)\cos\eta\cos\theta\cos\delta t}{\delta(1-b^2u)(1-c^2u)}$$
$$+\frac{Hu'(b^2-c^2)\cos\eta\cos\theta\cos\delta' t}{\delta'(1-b^2u')(1-c^2u')}$$

$$q=\cos m-\cos\eta=\frac{Gu(c^2-a^2)\cos\zeta\cos\theta\cos\delta t}{\delta(1-c^2u)(1-a^2u)}$$
$$+\frac{Hu'(c^2-a^2)\cos\zeta\cos\theta\cos\delta' t}{\delta'(1-c^2u')(1-a^2u')}$$

$$r=\cos n-\cos\theta=\frac{Gu(a^2-b^2)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta t}{\delta(1-a^2u)(1-b^2u)}$$
$$+\frac{Hu'(a^2-b^2)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta' t}{\delta'(1-a^2u')(1-b^2u')}.$$

Hier haben wir zwei beliebige constante Grössen G und H, und es leisten diese Werthe auf solche Weise Genüge, dass, wenn man sie in die Differentialgleichungen substituirt,

sowohl die mit G, als auch die mit H behafteten Glieder sich getrennt einander aufheben. Ist aber im Anfange für $t=0$ der Bogen $ZD=\mathfrak{r}$ gewesen, so muss

$$p^2+q^2+r^2=\mathfrak{r}^2$$

werden. War ferner im Anfange der Winkel $ZDA=\mathfrak{f}$, so ist

$$\cos\mathfrak{f}=\frac{\cos l-\cos\zeta\cos\mathfrak{r}}{\sin\zeta\sin\mathfrak{r}}=\frac{\cos\zeta(1-\cos\mathfrak{r})+p}{\sin\zeta\sin\mathfrak{r}}$$
$$=\frac{\mathfrak{r}\cos\zeta}{2\sin\zeta}+\frac{p}{\mathfrak{r}\sin\zeta},$$

also weil $\mathfrak{r}$ unendlich klein ist,

$$p=\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{f}.$$

Wird hier nun für p sein obiger $t=0$ angehöriger Werth substituirt, so erhält man eine andere Gleichung, durch welche, in Verbindung mit jener, die beiden Constanten G und H bestimmt werden. Setzt man aber den Winkel $VZA=\lambda$, so wird

$$d\lambda=-\frac{dt(y\cos\eta+z\cos\theta)}{\sin\zeta^2},$$

deren Integral leicht dargestellt wird. Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn man die Winkel $VZB=\mu$ und $VZC=\nu$ setzt,

$$d\mu=-\frac{dt(z\cos\theta+x\cos\zeta)}{\sin\eta^2}$$

und

$$d\nu=-\frac{dt(x\cos\zeta+y\cos\eta)}{\sin\theta^2}.$$

Es ist aber hier angemessen zu bemerken, dass, wenn $b^2=c^2$ ist, die zwei Werthe

$$u=\frac{1}{c^2}\text{ und }u'=\frac{\sin\zeta^2}{a^2}+\frac{\cos\zeta^2}{c^2}$$

sein werden und dass daher für den erstern der obigen Brüche Zähler und Nenner zugleich verschwinden. Um die Werthe derselben aufzusuchen, setze man

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}+\omega,$$

wo ω eine verschwindende Grösse ist; alsdann findet man

$$u=\frac{1}{c^2}+\frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\text{ und }u'=\frac{\sin\zeta^2}{a^2}+\frac{\cos\zeta^2}{c^2}.$$

Setzt man nun $\frac{G}{\omega}=I$, so dass $G=I\omega=0$ ist, so wird

$$x=\Omega\cos\alpha=\frac{H\cos\zeta\sin\delta' t}{1-a^2u'}=-\frac{Hc^2\sin\delta' t}{(a^2-c^2)\cos\zeta}$$

$$y = \Omega\cos\beta = \frac{I\sin\zeta^2\sin\delta t}{c^2\cos\eta} + \frac{H\cos\eta\sin\delta' t}{1 - c^2u'}$$
$$= \frac{I\sin\zeta^2\sin\delta t}{c^2\cos\eta} + \frac{Ha^2\cos\eta\sin\delta' t}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2}$$
$$z = \Omega\cos\gamma = -\frac{I\sin\zeta^2\sin\delta t}{c^2\cos\theta} + \frac{H\cos\theta\sin\delta' t}{1 - c^2u'}$$
$$= -\frac{I\sin\zeta^2\sin\delta t}{c^2\cos\theta} + \frac{Ha^2\cos\theta\sin\delta' t}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2}$$
$$p = \cos l - \cos\zeta = \frac{I\sin\zeta^4\cos\delta t}{\delta c^2\cos\eta\cos\theta}$$
$$q = \cos m - \cos\eta = -\frac{I\sin\zeta^2\cos\zeta\cos\delta t}{\delta c^2\cos\theta} - \frac{Hu'(a^2 - c^2)\cos\zeta\cos\theta\cos\delta' t}{\delta'(1 - a^2u')(1 - c^2u')}$$
$$r = \cos n - \cos\theta = -\frac{I\sin\zeta^2\cos\zeta\cos\delta t}{\delta c^2\cos\eta} + \frac{Hu'(a^2 - c^2)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta' t}{\delta'(1 - a^2u')(1 - c^2u')};$$

hierbei ist

$$\frac{a^2 - c^2}{(1 - a^2u')(1 - c^2u')} = -\frac{a^2c^2}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2\cos\zeta^2}.$$

Setzen wir aber

$$I = \frac{\mathfrak{S}\delta c^2\cos\eta\cos\theta}{\sin\zeta^2} \text{ und } H = \frac{\mathfrak{H}\delta'(a^2 - c^2)\sin\zeta^2\cos\zeta}{a^2c^2},$$

so haben wir, weil

$$u = \frac{1}{c^2} \text{ und } u' = \frac{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}{a^2c^2} \text{ ist,}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{2fg}}{c} \text{ und } \delta' = \frac{\sqrt{2fg(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)}}{ac}$$

und es werden nun obige Gleichungen:

$$x = \Omega\cos\alpha = -\frac{\mathfrak{H}\delta'\sin\zeta^2\sin\delta' t}{a^2}$$
$$y = \Omega\cos\beta = \frac{\mathfrak{H}\delta'\cos\zeta\cos\eta\sin\delta' t}{c^2} + \mathfrak{S}\delta\cos\theta\sin\delta t$$
$$z = \Omega\cos\gamma = \frac{\mathfrak{H}\delta'\cos\zeta\cos\theta\sin\delta' t}{c^2} - \mathfrak{S}\delta\cos\eta\sin\delta t$$
$$p = \cos l - \cos\zeta = \mathfrak{S}\sin\zeta^2\cos\delta t$$
$$q = \cos m - \cos\eta = -\mathfrak{S}\cos\zeta\cos\eta\cos\delta t + \mathfrak{H}u'\cos\theta\cos\delta' t$$
$$r = \cos n - \cos\theta = -\mathfrak{S}\cos\zeta\cos\theta\cos\delta t - \mathfrak{H}u'\cos\eta\cos\delta' t.$$

Diese Formeln können ohne irgend eine Schwierigkeit allen Fällen angepasst werden.

Zusatz 1.

§. 913. Diese Integrale können noch weiter ausgedehnt werden, indem x, y, z und p, q, r constante Theile aufnehmen; ändert man nun die Form der Buchstaben G und H, so erhalten wir:

$$x = \cos\zeta\,[\mathfrak{E} + \mathfrak{G}(1-b^2u)(1-c^2u)\sin\delta t + \mathfrak{H}(1-b^2u')(1-c^2u')\sin\delta' t]$$
$$y = \cos\eta\,[\mathfrak{E} + \mathfrak{G}(1-a^2u)(1-c^2u)\sin\delta t + \mathfrak{H}(1-a^2u')(1-c^2u')\sin\delta' t]$$
$$z = \cos\theta\,[\mathfrak{E} + \mathfrak{G}(1-a^2u)(1-b^2u)\sin\delta t + \mathfrak{H}(1-a^2u')(1-b^2u')\sin\delta' t]$$
$$p = \mathfrak{F}\cos\zeta + (b^2-c^2)\cos\eta\cos\theta\left[\frac{\mathfrak{G}u(1-a^2u)\cos\delta t}{\delta} + \frac{\mathfrak{H}u'(1-a^2u')\cos\delta' t}{\delta'}\right]$$
$$q = \mathfrak{F}\cos\eta + (c^2-a^2)\cos\zeta\cos\theta\left[\frac{\mathfrak{G}u(1-b^2u)\cos\delta t}{\delta} + \frac{\mathfrak{H}u'(1-b^2u')\cos\delta' t}{\delta'}\right]$$
$$r = \mathfrak{F}\cos\theta + (a^2-b^2)\cos\zeta\cos\eta\left[\frac{\mathfrak{G}u(1-c^2u)\cos\delta t}{\delta} + \frac{\mathfrak{H}u'(1-c^2u')\cos\delta' t}{\delta'}\right].$$

Zusatz 2.

§. 914. Man kann auch die beiden Winkel δt und $\delta' t$ um eine constante Grösse vermehren, und wenn man statt ihrer $\delta t + \mathfrak{g}$ und $\delta' t + \mathfrak{h}$ schreibt; so enthalten die Integrale die sechs beliebigen Constanten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, sie sind daher die vollständigen Integrale dieser sechs Differentialgleichungen:

$$a^2dx = 2fgdt(r\cos\eta - q\cos\theta)$$
$$b^2dy = 2fgdt(p\cos\theta - r\cos\zeta)$$
$$c^2dz = 2fgdt(q\cos\zeta - p\cos\eta)$$
$$dp = dt(z\cos\eta - y\cos\theta)$$
$$dq = dt(x\cos\theta - z\cos\zeta)$$
$$dr = dt(y\cos\zeta - x\cos\eta).$$

Zusatz 3.

§. 915. Wenn der Körper sich anfangs in Ruhe befunden hat, wie wir in der Aufgabe angenommen haben, so dass alsdann $x=0$, $y=0$ und $z=0$ gewesen ist; so muss man $\mathfrak{E}=0$, $\mathfrak{g}=0$ und $\mathfrak{h}=0$ setzen, die übrigen Constanten aber durch die anfängliche Lage des Körpers bestimmen.

Zusatz 4.

§. 916. Setzen wir nämlich für den Anfang, wo $t=0$ ist,

die Winkel $ZDA = \mathfrak{l}$, $ZDB = \mathfrak{m}$ und $ZDC = \mathfrak{n}$, so dass wir nach §. 892. haben:

$$\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m}) = -\frac{\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta}, \quad \sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n}) = -\frac{\cos\zeta}{\sin\eta\sin\theta},$$

$$\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l}) = -\frac{\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}, \quad \cos(\mathfrak{l}-\mathfrak{m}) = -\frac{\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta},$$

$$\cos(\mathfrak{m}-\mathfrak{n}) = -\frac{\cos\eta\cos\theta}{\sin\eta\sin\theta} \text{ und } \cos(\mathfrak{n}-\mathfrak{l}) = -\frac{\cos\zeta\cos\theta}{\sin\zeta\sin\theta};$$

so müssen die Constanten so bestimmt werden, dass, wenn für $t=0$ $ZD=\mathfrak{r}$ war, man erhält

$$p = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}, \quad q = \mathfrak{r}\sin\eta\cos\mathfrak{m} \text{ und } r = \mathfrak{r}\sin\theta\cos\mathfrak{n}.$$

Erläuterung.

§. 917. Um die Constanten $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ im allgemeinen nach dem anfänglichen Zustande der beschriebenen Weise entsprechend zu bestimmen, setzen wir der Kürze wegen

$$a^2\cos\zeta^2 + b^2\cos\eta^2 + c^2\cos\theta^2 = \mathfrak{A}$$
$$b^2c^2\cos\zeta^2 + a^2c^2\cos\eta^2 + a^2b^2\cos\theta^2 = \mathfrak{B}$$

und es sei, um die Rechnung zu erleichtern

$$\frac{\mathfrak{G}u\cos\mathfrak{g}}{\delta} = X \text{ und } \frac{\mathfrak{H}u'\cos\mathfrak{h}}{\delta} = Y.$$

Nach ausgeführter Rechnung erhält man

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta\cos\mathfrak{l} + \mathfrak{r}\sin\eta\cos\eta\cos\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\sin\theta\cos\theta\cos\mathfrak{n},$$

$$X+Y=$$
$$\frac{\frac{\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}}{\cos\eta\cos\theta}(\mathfrak{B}-b^2c^2) + \frac{\mathfrak{r}\sin\eta\cos\mathfrak{m}}{\cos\zeta\cos\theta}(\mathfrak{B}-a^2c^2) + \frac{\mathfrak{r}\sin\theta\cos\mathfrak{n}}{\cos\zeta\cos\eta}(\mathfrak{B}-a^2b^2)}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)},$$

und

$$uX+u'Y=$$
$$\frac{-\frac{\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}}{\cos\eta\cos\theta}(\mathfrak{A}-a^2) - \frac{\mathfrak{r}\sin\eta\cos\mathfrak{m}}{\cos\zeta\cos\theta}(\mathfrak{A}-b^2) - \frac{\mathfrak{r}\sin\theta\cos n}{\cos\zeta\cos\eta}(\mathfrak{A}-c^2)}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}.$$

Aus den hier eingeführten Werthen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhält man die obigen

$$L = \frac{\mathfrak{A}}{a^2b^2c^2} \text{ und } K = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - \mathfrak{B}}{a^2b^2c^2},$$

hieraus

$$u = \tfrac{1}{2}K + \sqrt{\tfrac{1}{4}K^2 - L} \text{ und } u' = \tfrac{1}{2}K - \sqrt{\tfrac{1}{4}K^2 - L},$$

also

$$u + u' = K \text{ und } u - u' = \sqrt{K^2 - 4L}.$$

Diese Analyse gilt allgemein, wenn auch dem Körper im Anfange eine Bewegung beigebracht worden ist, weil wir statt der Winkel δt und $\delta' t$ hier die $\delta t + \mathfrak{g}$ und $\delta' t + \mathfrak{h}$ angewandt

haben. Auf ähnliche Weise, wie wir hier aus der anfänglichen Lage die Constanten $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ bestimmt haben, werden aus der im Anfange beigebrachten Bewegung für die Grössen x, y und z gegebene Werthe hervorgehen, und setzt man diesen die, im Zusatz 1. gegebenen und so, dass wir $\delta t + \mathfrak{g}$ und $\delta' t + \mathfrak{h}$ statt δt und $\delta' t$ setzen, ausgedehnten Formeln für $t = 0$ gleich; so werden die übrigen Constanten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ bestimmt. Diese verschwinden aber, wie wir schon vorher bemerkt haben, wenn die Bewegung vom Zustande der Ruhe an beginnt.

Anmerkung.

§. 918. Für den Fall solcher Körper, bei denen $b^2 = c^2$ ist, wird

$$u = \frac{1}{c^2}, \quad u' = \frac{a^2 \cos\zeta^2 + c^2 \sin\zeta^2}{a^2 c^2}, \quad \delta = \sqrt{2fgu}, \quad \delta' = \sqrt{2fgu'},$$

und es werden sich die Integrale im allgemeinen folgendermaassen darstellen:

$$x = \mathfrak{E} \cos\zeta \qquad\qquad - \frac{\mathfrak{H}\delta' \sin\zeta^2 \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{a^2}$$

$$y = \mathfrak{E} \cos\eta + \mathfrak{G}\delta \cos\theta \sin(\delta t + \mathfrak{g}) + \frac{\mathfrak{H}\delta' \cos\zeta \cos\eta \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{c^2}$$

$$z = \mathfrak{E} \cos\theta - \mathfrak{G}\delta \cos\eta \sin(\delta t + \mathfrak{g}) + \frac{\mathfrak{H}\delta' \cos\zeta \cos\theta \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{c^2}$$

$$p = \mathfrak{F} \cos\zeta + \mathfrak{G} \sin\zeta^2 \cos(\delta t + \mathfrak{g})$$

$$q = \mathfrak{F} \cos\eta - \mathfrak{G} \cos\zeta \cos\eta \cos(\delta t + \mathfrak{g}) + \mathfrak{H} u' \cos\theta \cos(\delta' t + \mathfrak{h})$$

$$r = \mathfrak{F} \cos\theta - \mathfrak{G} \cos\zeta \cos\theta \cos(\delta t + \mathfrak{g}) - \mathfrak{H} u' \cos\eta \cos(\delta' t + \mathfrak{h}).$$

Ist daher im Anfange, wo $t = 0$,

$$p = \mathfrak{r} \sin\zeta \cos\mathfrak{l}, \quad q = \mathfrak{r} \sin\eta \cos\mathfrak{m} \text{ und } r = \mathfrak{r} \sin\theta \cos\mathfrak{n};$$

so findet man

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{r} \sin\eta \cos\theta \cos\mathfrak{m} - \mathfrak{r} \sin\theta \cos\eta \cos\mathfrak{n}}{u' \sin\zeta^2 \cos\mathfrak{h}},$$

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{r} \sin\zeta^3 \cos\mathfrak{l} - \mathfrak{r} \sin\eta \cos\zeta \cos\eta \cos\mathfrak{m} - \mathfrak{r} \sin\theta \cos\zeta \cos\theta \cos\mathfrak{n}}{\sin\zeta^2 \cos\mathfrak{g}}$$

und

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{r} \sin\zeta \cos\zeta \cos\mathfrak{l} + \mathfrak{r} \sin\eta \cos\eta \cos\mathfrak{m} + \mathfrak{r} \sin\theta \cos\theta \cos\mathfrak{n}.$$

Sind aber die Winkel $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ gegeben, so ergeben sich auch zugleich die Winkel ζ, η und θ, indem

$$\cos\zeta^2 = \frac{\cos(\mathfrak{l} - \mathfrak{m}) \cos(\mathfrak{n} - \mathfrak{l})}{\sin(\mathfrak{l} - \mathfrak{m}) \sin(\mathfrak{n} - \mathfrak{l})}, \quad \cos\eta^2 = \frac{\cos(\mathfrak{m} - \mathfrak{n}) \cos(\mathfrak{l} - \mathfrak{m})}{\sin(\mathfrak{m} - \mathfrak{n}) \sin(\mathfrak{l} - \mathfrak{m})},$$

$$\cos\theta^2 = \frac{\cos(\mathfrak{n} - \mathfrak{l}) \cos(\mathfrak{m} - \mathfrak{n})}{\sin(\mathfrak{n} - \mathfrak{l}) \sin(\mathfrak{m} - \mathfrak{n})},$$

$$\sin\zeta^2 = \frac{-\cos(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}{\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})}, \quad \sin\eta^2 = \frac{-\cos(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})}{\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})}$$

und

$$\sin\theta^2 = \frac{-\cos(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})}{\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}.$$

Aus diesen Formeln schliesst man, dass

$$\sin\zeta\cos\zeta\cos\mathfrak{l} + \sin\eta\cos\eta\cos\mathfrak{m} + \sin\theta\cos\theta\cos\mathfrak{n} = 0,$$

also die oben bestimmte Constante $\mathfrak{F}$ immer $=0$ ist. Auf ähnliche Weise hat man

$$\frac{\sin\zeta\cos\mathfrak{l}}{\cos\eta\cos\theta} + \frac{\sin\eta\cos\mathfrak{m}}{\cos\zeta\cos\theta} + \frac{\sin\theta\cos\mathfrak{n}}{\cos\zeta\cos\eta} = 0,$$

wesshalb die oben bestimmten Werthe der Coëfficienten sich viel einfacher ausdrücken lassen, so dass die Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ganz ausfallen.

Diess gilt im allgemeinen, auch wenn nicht $b^2 = c^2$ ist.

Aufgabe 110.

§. 919. Ein mit einer sphärischen Grundfläche versehener Körper hat zwei gleiche Hauptaxen und es wird ihm, der unendlich wenig aus der Lage der Ruhe abgelenkt ist, eine beliebige sehr kleine Bewegung beigebracht; man soll die Fortsetzung der letztern bestimmen.

Auflösung.

(Figur 124.) Es sei ID des Körpers Axe des Gleichgewichts, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit I und den Mittelpunkt der Grundfläche G geht, es liege dieser höher als jener, wobei ihr Zwischenraum $GI = f$ ist. Es sei ferner IA die besondere Hauptaxe des Körpers und in Bezug auf sie das Moment der Trägheit $= Ma^2$, in Bezug auf alle, auf diese normalen Axen aber sei es $= Mc^2$, und da man sie alle auf gleiche Weise für Hauptaxen halten darf, nehme man die eine IB auf der Verlängerung des Bogens DA an, die andere wird alsdann IC sein, so dass der Quadrant AC auf AD normal, also auch DC ein auf AD normaler Quadrant ist. Setzt man demnach den Bogen $DA = \zeta$, so wird $DB = \eta = \zeta + 90^0$ und $DC = \theta = 90^0$. Im Anfange aber, wo $t = 0$ ist, sei der Bogen $DZ = \mathfrak{r}$ und der Winkel $ZDA = \mathfrak{l}$ gewesen, alsdann wird $ZDB = \mathfrak{m} = \mathfrak{l}$ und $ZDC = \mathfrak{n} = \mathfrak{l} + 90^0$. Wir erhalten daher aus den vorhergehenden Formeln:

$$u = \frac{1}{c^2}, \quad u' = \frac{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}{a^2c^2}, \quad \delta = \frac{\sqrt{2fg}}{c},$$

$$\delta' = \frac{\sqrt{2fg(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)}}{ac};$$

ferner ergibt sich aus dieser anfänglichen Lage $\mathfrak{F}=0$,

$$\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l} = \mathfrak{G}\sin\zeta^2\cos\mathfrak{g},\ \text{also}\ \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}}{\sin\zeta\cos\mathfrak{g}},$$

$$\mathfrak{r}\cos\zeta\cos\mathfrak{l} = \mathfrak{G}\cos\zeta\sin\zeta\cos\mathfrak{g}$$

und $$-\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l} = \mathfrak{H}u'\sin\zeta\cos\mathfrak{h}\ \text{oder}\ \mathfrak{H} = -\frac{\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}}{u'\sin\zeta\cos\mathfrak{h}}.$$

Ist ferner anfangs dem Körper eine Bewegung um die Axe IO, mit der Winkelgeschwindigkeit $=\varepsilon$ im Sinne ABC beigebracht worden, wobei $OA=\mathfrak{a}$, $OB=\mathfrak{b}$ und $OC=\mathfrak{c}$ ist; so muss

$$\varepsilon\cos\mathfrak{a} = \mathfrak{E}\cos\zeta - \frac{\mathfrak{H}\delta'\sin\zeta^2\sin\mathfrak{h}}{a^2},$$

$$\varepsilon\cos\mathfrak{b} = -\mathfrak{E}\sin\zeta - \frac{\mathfrak{H}\delta'\cos\zeta\sin\zeta\sin\mathfrak{h}}{c^2}$$

und $$\varepsilon\cos\mathfrak{c} = \mathfrak{G}\delta\sin\zeta\sin\mathfrak{g}$$

sein. Hieraus erhalten wir

$$\varepsilon[a^2\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - c^2\cos\mathfrak{b}\sin\zeta] = \mathfrak{E}[a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2]$$

und

$$\varepsilon[\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta] = -\mathfrak{H}\delta'\sin\zeta\sin\mathfrak{h}\left[\frac{\sin\zeta^2}{a^2} + \frac{\cos\zeta^2}{c^2}\right].$$

Es wird demnach

$$\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon[a^2\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - c^2\cos\mathfrak{b}\sin\zeta]}{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2},$$

$$\mathfrak{G} = \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{c}}{\delta\sin\zeta\sin\mathfrak{g}}$$

und $$\mathfrak{H} = -\frac{\varepsilon[\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta]}{\delta' u'\sin\zeta\sin\mathfrak{h}};$$

ferner

$$\operatorname{tg}\mathfrak{g} = \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{c}}{\delta\mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}}\ \text{und}\ \operatorname{tg}\mathfrak{h} = \frac{\varepsilon[\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta]}{\delta'\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}},$$

also sind die Winkel $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, und hierdurch die Zahlen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ bekannt.

Nachdem wir nun diess bestimmt haben, halte der Körper nach Verlauf der Zeit t die in der Figur dargestellte Lage ein und es sei $ZD=\varrho$, $ZA=l$, $ZB=m$ und $ZC=n$; ferner setze man $\cos l = \cos\zeta + p$, $\cos m = \cos\eta + q$ und $\cos n = \cos\theta + r$ oder $\cos m = -\sin\zeta + q$ und $\cos n = r$. Ferner drehe sich derselbe jetzt um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ im Sinne ABC, wobei $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$ ist, ausserdem setzen wir $\Omega\cos\alpha = x$, $\Omega\cos\beta = y$ und $\Omega\cos\gamma = z$; alsdann haben wir nach §. 918.:

$$\Omega \cos\alpha = \frac{\varepsilon \cos\zeta [a^2 \cos\mathfrak{a} \cos\zeta - c^2 \cos\mathfrak{b} \sin\zeta]}{a^2 \cos\zeta^2 + c^2 \sin\zeta^2} + \frac{\delta' \mathfrak{r} \sin\zeta \sin\mathfrak{l} \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{a^2 u' \cos\mathfrak{h}},$$

$$\Omega \cos\beta = -\frac{\varepsilon \sin\zeta [a^2 \cos\mathfrak{a} \cos\zeta - c^2 \cos\mathfrak{b} \sin\zeta]}{a^2 \cos\zeta^2 + c^2 \sin\zeta^2} + \frac{\delta' \mathfrak{r} \cos\zeta \sin\mathfrak{l} \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{c^2 u' \cos\mathfrak{h}}$$

und

$$\Omega \cos\gamma = \frac{\delta \mathfrak{r} \cos\mathfrak{l} \sin(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}},$$

ferner

$$p = \frac{\mathfrak{r} \sin\zeta \cos\mathfrak{l} \cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}},$$

$$q = \frac{\mathfrak{r} \cos\zeta \cos\mathfrak{l} \cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$$

und

$$r = -\frac{\mathfrak{r} \sin\mathfrak{l} \cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\cos\mathfrak{h}}.$$

Hieraus erhalten wir nach §. 903.

$$\varrho = \mathfrak{r} \sqrt{\frac{\cos\mathfrak{l}^2 \cos(\delta t + \mathfrak{g})^2}{\cos\mathfrak{g}^2} + \frac{\sin\mathfrak{l}^2 \cos(\delta' t + \mathfrak{h})^2}{\cos\mathfrak{h}^2}},$$

ferner aus dem Dreieck AZD

$$\cos ADZ = \frac{\cos l - \cos\zeta \cos\varrho}{\sin\zeta \sin\varrho} = \frac{p + \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cos\zeta}{\varrho \sin\zeta} = \frac{p}{\varrho \sin\zeta},$$

indem das Glied $\frac{\varrho \cos\zeta}{2 \sin\zeta}$ verschwindend klein wird. Hiernach wird

$$\cos ADZ = \frac{\cos\mathfrak{l} \cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}} : \sqrt{\frac{\cos\mathfrak{l}^2 \cos(\delta t + \mathfrak{g})^2}{\cos\mathfrak{g}^2} + \frac{\sin\mathfrak{l}^2 \cos(\delta' t + \mathfrak{h})^2}{\cos\mathfrak{h}^2}},$$

und daher

$$\operatorname{tg} ADZ = \frac{\cos\mathfrak{g} \operatorname{tg}\mathfrak{l} \cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\cos\mathfrak{h} \cos(\delta t + \mathfrak{g})}.$$

Ausser dem Bogen $DZ = \varrho$ und dem Winkel ADZ muss man aber auch den, vom festen Vertikalkreise ZX gezählten Winkel XZD kennen. Es ist aber $DZA = 180^0 - ADZ$ oder

$$\operatorname{tg} DZA = -\frac{\cos\mathfrak{g} \cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\cos\mathfrak{h} \cos(\delta' t + \mathfrak{g})} \operatorname{tg}\mathfrak{l},$$

da im Anfange $DZA = 180^0 - \mathfrak{l}$ und $\operatorname{tg} DZA = -\operatorname{tg}\mathfrak{l}$ war. Setzt man hieruuf aber den Winkel $XZA = \lambda$, so wird (§. 912.)

$$d\lambda = -\frac{dt(y \cos\eta + z \cos\theta)}{\sin\zeta^2} = \frac{y\,dt}{\sin\zeta},$$

also

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{\varepsilon t [a^2 \cos\mathfrak{a} \cos\zeta - c^2 \cos\mathfrak{b} \sin\zeta]}{a^2 \cos\zeta^2 + c^2 \sin\zeta^2} - \frac{\mathfrak{r} \cos\zeta \sin\mathfrak{l} \cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{c^2 u' \sin\zeta \cos\mathfrak{h}}.$$

Wenn wir nun annehmen, dass im Anfange der Winkel XZD verschwunden sei, so war damals

$$\lambda = 180^0 - \mathfrak{l};$$

es wird daher die hier eingetretene Constante

$$=180^0 - \mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{r}\cos\zeta\sin\mathfrak{l}}{c^2u'\sin\zeta}$$

und so

$$\lambda = 180^0 - \mathfrak{l} - \frac{\varepsilon t[a^2\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - c^2\cos\mathfrak{b}\sin\zeta]}{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2}$$
$$+ \frac{\mathfrak{r}\cos\zeta\sin\mathfrak{l}}{c^2u'\sin\zeta}\left(1 - \frac{\cos(\delta't + \mathfrak{h})}{\cos\mathfrak{h}}\right).$$

Hieraus folgt

$$XZD = \lambda - DZA,$$

und man kennt daher zur Zeit t die Lage des Körpers vollkommen, so wie in dieser Bestimmung auch zugleich die Bewegung des Körpers enthalten ist.

Zusatz 1.

§. 920. Verschwindet die dem Körper im Anfange beigebrachte Bewegung, so ist $\mathfrak{g}=0$ und $\mathfrak{h}=0$, und wir erhalten:

$$x = \Omega\cos\alpha = \frac{\delta'\mathfrak{r}\sin\zeta\sin\mathfrak{l}\sin\delta't}{a^2u'}$$
$$y = \Omega\cos\beta = \frac{\delta'\mathfrak{r}\cos\zeta\sin\mathfrak{l}\sin\delta't}{c^2u'}$$
$$z = \Omega\cos\gamma = \delta\mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}\sin\delta t$$
$$p = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}\cos\delta t$$
$$q = \mathfrak{r}\cos\zeta\cos\mathfrak{l}\cos\delta t$$
$$r = -\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}\cos\delta't$$
$$\text{tg}ADZ = \text{tg}(180^0 - DZA) = \frac{\cos\delta't}{\cos\delta t}\text{tg}\,\mathfrak{l}$$

und

$$\lambda = 180^0 - \mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{r}\cos\zeta\sin\mathfrak{l}}{c^2u'\sin\zeta}(1 - \cos\delta't).$$

Zusatz 2.

§. 921. Ist aber dem Körper im Anfange eine Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ε beigebracht worden, so muss diese nicht viel grösser als $\mathfrak{r}$ sein. Wäre nämlich $\frac{\varepsilon}{\mathfrak{r}}$ eine übergrosse Zahl, so würden die Winkel $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ fast $= 90^0$, ihre Cosinusse also nahe $=0$ und die Zahlen p, q und r zu gross werden, als dass sie, wie die Natur der Auflösung es erfordert, als sehr klein angesehen werden könnten. Der Bogen $ZD = \varrho$ soll nämlich immer sehr klein sein.

Zusatz 3.

§. 922. Da $\Omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, so kann der Körper

nur dann zur Ruhe gelangen, wenn jede der drei Grössen x, y und z für sich verschwindet. Hat ferner auch der Körper von der Ruhe ab sich zu bewegen angefangen, so ist es doch möglich, dass er hierauf niemals zur Ruhe zurückkehrt und diess wird selbst immer eintreten, wenn nicht entweder $\sin\mathfrak{l} = 0$ oder $\cos\mathfrak{l} = 0$ ist; alsdann wird auch die natürliche Axe des Körpers DF niemals in die vertikale Lage kommen.

Zusatz 4.

§. 923. Da $\mathfrak{r}$ eine sehr kleine Grösse ist, so wird, wenn der Körper im Anfange keine Bewegung empfangen hat, also $\varepsilon = 0$ ist, mit hinreichender Genauigkeit

$$\lambda = 180^\circ - \mathfrak{l}.$$

Der Winkel XZA wird also constant bleiben und die Bewegung der Axe IA so beschaffen sein, dass sie sich auf dem Bogen ZA bald dem Scheitelpunkte Z nähert, bald von ihm entfernt. Es wird aber

$$AZ = \zeta - \mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}\cos\delta t$$

und der Winkel

$$ZAD = \frac{\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}\cos\delta' t}{\sin\zeta}.$$

Zusatz 5.

§. 924. Im allgemeinen wird aber, wenn dem Körper im Anfange eine beliebige Bewegung beigebracht worden ist,

$$XZA = \lambda = 180^\circ - \mathfrak{l} - \frac{\varepsilon t[a^2\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - c^2\cos\mathfrak{b}\sin\zeta]}{a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2};$$

es wird also der Bogen ZA gleichförmig um den Scheitelpunkt Z herumgeführt. Da aber

$$\sin AD : \sin DZA = \sin ZD : \sin ZAD = ZD : ZAD,$$

so wird

$$ZAD = \frac{\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}\cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\sin\zeta\cos\mathfrak{h}}$$

und der Bogen

$$ZA = \zeta - \frac{\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}\cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}.$$

Setzt man nun statt $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ ihre Werthe, so erhält man

$$ZAD = \frac{\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}\cos\delta' t}{\sin\zeta} - \frac{\varepsilon[\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta]\sin\delta' t}{\delta'\sin\zeta}$$

und

$$ZA = \zeta - \mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}\cos\delta t + \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{c}\sin\delta t}{\delta}.$$

Anmerkung 1.

§. 925. Diese drei letzten Formeln, welche die Winkel XZA, ZAD und den Bogen ZA darstellen, enthalten die ganze Auflösung der Aufgabe. Können wir nämlich diese drei Grössen zu jeder Zeit angeben, so wird uns die Lage des Körpers vollständig bekannt. Substituiren wir demnach für δ und δ' die oben gefundenen Werthe, so ist die ganze Auflösung der Aufgabe in diesen Formeln enthalten:

$$XZA = 180^0 - \mathfrak{l} - \frac{\varepsilon t[a^2 \cos\mathfrak{a} \cos\zeta - c^2 \cos\mathfrak{b} \sin\zeta]}{a^2 \cos\zeta^2 + c^2 \sin\zeta^2}$$

$$ZA = \zeta - \mathfrak{r} \cos\mathfrak{l} \cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c} + \frac{\varepsilon c \cos\mathfrak{c}}{\sqrt{2fg}} \sin\frac{t\sqrt{2fg}}{c}$$

$$ZAD = \frac{\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}}{\sin\zeta} \cos\frac{t\sqrt{2fg(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)}}{ac}$$

$$- \frac{\varepsilon ac[\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta]}{\sin\zeta\sqrt{2fg(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)}} \cdot \sin\frac{t\sqrt{2fg(a^2\cos\zeta^2 + c^2\sin\zeta^2)}}{ac}.$$

Sind daher alle Momente der Trägheit einander gleich, d. h. ist $a^2 = c^2$, so wird

$$XZA = 180^0 - \mathfrak{l} - \varepsilon t[\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - \cos\mathfrak{b}\sin\zeta]$$

$$ZA = \zeta - \mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c} + \frac{\varepsilon c\cos\mathfrak{c}}{\sqrt{2fg}}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{c}$$

$$ZAD = \frac{\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}}{\sin\zeta}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c} - \frac{\varepsilon c[\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta]}{\sin\zeta\sqrt{2fg}}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{c},$$

in welchem Falle die Lage des Punktes A ganz beliebig ist.

Anmerkung 2.

§. 926. Der Gegenstand, welchen wir in diesem Kapitel besonders zu entwickeln unternommen haben, nämlich die schwankende Bewegung der Körper mit sphärischer Grundfläche haben wir vollständig durchgeführt, wenn nur die Schwankungen so klein als möglich sind, eine Voraussetzung, welche man auch in der Lehre von den Schwingungen aufzustellen pflegt. Die im §. 913. u. d. f. dargestellten Formeln enthalten nämlich die vollständige Auflösung dieser Aufgabe, wenn man nur dort die Winkel δt und $\delta' t$ um die Constanten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ vermehrt. Die Constanten aber aus dem anfänglichen Zustande zu bestimmen, haben wir im §. 917. gelehrt, welche Arbeit bedeutend durch die am Ende des §. 918. hinzugefügte Anmerkung erleichtert wird. Wir wollen daher nun zur Auseinandersetzung der Bewegung cylindrischer Körper fortschreiten.

Kapitel XIX.

Von der Bewegung cylindrischer Körper auf einer horizontalen Ebene.

Lehrsatz 11.

§. 927. Während ein cylindrischer Körper sich auf einer horizontalen Ebene bewegt, ist der Druck, womit er sich auf die letztere stützt, vertikal und geht durch den Mittelpunkt eines jeden auf die Länge normalen Schnitts des Cylinders.

Beweis.

Der cylindrische Körper liegt auf der horizontalen Ebene längs einer geraden Linie, welche der Axe des Cylinders parallel ist und in welcher die den letztern unterstützenden Kräfte sich befinden; dabei ist es möglich, dass diese Kräfte über jene ganze Ebene zerstreut sind. Da sie aber alle auf die horizentale Ebene normal, also vertikal und unter sich parallel sind, so wird es eine einzige, jenen allen gleichgeltende, Kraft geben, deren Richtung gleichfalls vertikal ist und auf einem bestimmten Punkte der Berührungslinie steht. Wird daher in diesem Punkte der Cylinder normal auf seine Länge geschnitten, so wird der Schnitt ein Kreis sein und die allen gleichgeltende Kraft, weil sie in diesem Schnitte und dem Berührungspunkte vertikal steht, durch den Mittelpunkt gehen. Wenn demnach dieser Schnitt nicht durch den Mittelpunkt der Trägheit des Körpers geht, wird sich auch die mittlere Richtung des Druckes nicht in einem, durch diesen Punkt normal auf die Länge gelegten, Schnitte befinden.

Erläuterung.

§. 928. Wir betrachten daher hier cylindrische Körper, in welchen man zuerst ihre Axe als eine geometrische bezeichne, ferner seien alle normal auf dieselbe genommenen Schnitte einander gleiche Kreise, so dass der Körper ein gerader Cylinder ist, dessen Bewegung, während er immer auf einer horizontalen Ebene liegt, wir erforschen werden. Liegt der Mittelpunkt der Trägheit in der geometrischen Axe, so wird sich der Cylinder in jeder Lage im Gleichgewicht befinden. Ist diess nicht der Fall, so betrachte man den Schnitt des Cylinders, welcher normal auf die Axe durch seinen Mittelpunkt der Trägheit I gelegt ist und dessen Mittelpunkt sich in G befindet (Figur 125.); alsdann ist für den Zustand des Gleichgewichts erforderlich, dass die gerade Linie GI vertikal sei; es gibt demnach eine doppelte Lage des Gleichgewichts. In der einen befindet sich der Mittelpunkt der Trägheit I unterhalb, in der andern oberhalb G; jene wird die stabile, diese die labile genannt. In jeder Lage des Cylinders ist aber die geometrische Axe horizontal und liegt vertikal über der Berührungslinie. Ferner muss man drei mechanische Axen des Cylinders kennen, welche, wenn wir eine jede beliebige Vertheilung der Materie zulassen, beliebig von der geometrischen oder längs der Länge gezogenen Axe verschieden sein können, und von deren Lage die Bestimmung der Bewegung am meisten abhängig ist. Durch den Mittelpunkt der Trägheit I denke man sich auch eine, der geometrischen Axe parallele, gerade Linie gezogen, welche meistentheils eine Hauptaxe zu sein pflegt und immer horizontal bleibt. Nachdem man dieses bemerkt hat, bemerke man ferner, wie auch der Cylinder auf der horizontalen Ebene liegen mag, in dem durch den Mittelpunkt der Trägheit I gelegten Schnitte $LMFN$ den Punkt T, in welchem dieser Kreis die horizontale Ebene berührt. Hierauf bemerke man auch gehörig den diesem parallelen Schnitt, in welchem sich die mittlere Richtung aller Druckkräfte befindet, welche nämlich der geraden Linie TG parallel sein wird. Je nachdem die Grösse des Drucks und der Abstand des Schnitts, in welchem er sich befindet, von dem durch den Mittelpunkt der Trägheit gelegten Schnitte unbekannt sein wird, wird man sie hierauf erst durch die Bewegung bestimmen müssen; indem diese Kraft zu bewirken hat, dass die Längenaxe des Cylinders immer horizontal bleibe und der letztere auf der horizontalen Ebene aufliege.

Anmerkung.

§. 929. Bei diesen zu erforschenden Bewegungen ist es nicht nöthig, dass der ganze Körper eine cylindrische Gestalt habe, sondern es reicht hin, wenn er an den Stellen, mit welchen er auf der horizontalen Ebene liegt, eine solche Form hat. Hierher gehören demnach die Bewegungen aller der Körper, welche in cylindrische Grenzen ausgehen, mit denen sie auf gleichhohen horizontalen Ebenen beiderseits aufliegen, während zwischen ihnen die Last des Körpers eine beliebige Ausdehnung haben mag, wie diess bei den Wiegen der Fall ist, welche durch eine schwankende Bewegung über Grenzen, die man als Kreise ansehen darf, angetrieben werden. Ferner ist hierher zu zählen die Bewegung solcher Pendel, welche nicht, wie wir oben angenommen haben, um eine lineare Axe, sondern um eine materielle und auf jeder Seite in einen Cylinder ausgehende Axe schwingen, während diese Cylinder auf horizontalen Ebene liegen, zwischen welchen die Masse des Pendels herabhängt. Wenn auch in diesen Fällen die mittlern Durchschnitte keine Kreise sind, so darf man doch jene zwei Durchschnitte, in deren einem der Mittelpunkt der Trägheit, in deren anderm aber die Kraft des Druckes sich befindet, als Kreise betrachten, weil die Figur nur insoweit in Betracht kommt, als der Körper auf der horizontalen Ebene aufliegt. Wenn ferner solche Körper auch keine ganze Umwälzungen ausführen, so ist es nicht einmal nöthig, dass ihre ganzen Grenzen cylindrisch sind; sondern es reicht hin, wenn der Theil derselben, an welchen die Berührung erfolgt, eine solche Gestalt hat, deren durch den ganzen Körper ausgedehnte Längenaxe wohl zu bemerken angemessen ist. Diese Behandlung erstreckt sich demnach auf sehr viele Fälle, und man hat in Betreff dieser Bewegung zuerst festzuhalten, dass der Mittelpunkt der Trägheit von den antreibenden Kräften nur in derselben vertikalen geraden Linie eine Bewegung annehmen kann. Es wird daher keine horizontale Bewegung erfolgen, wenn er diese nicht von aussen her empfangen hat, diese wird er aber dann gleichförmig verfolgen und da hierin keine Schwierigkeit liegt, werden wir dieselbe hier nicht beachten.

Aufgabe 111.

§. 930. Ein cylindrischer Körper bewegt sich auf einer horizontalen Ebene und es ist der Druck gegeben, mit welchem

er sich auf jene stützt; man soll die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit des Körpers bestimmen.

Auflösung.

(Figur 126.) Durch den Mittelpunkt der Trägheit I werde ein, auf die Axe des Cylinders normaler, Schnitt gelegt, welchen man, mag nun der Körper ein continuirlicher Cylinder oder nur mit cylindrischen Enden versehen sein, als einen den Grundflächen gleichen Kreis $LMFN$ ansehe, dessen Mittelpunkt in G und Mittelpunkt der Trägheit in I liegt, wobei der Zwischenraum $GI=f$ ist. Im Zustande der Ruhe halte daher die gerade Linie $LIGF$ eine vertikale Lage ein, in welcher der Mittelpunkt der Trägheit I über dem Mittelpunkte des Kreises G in der Figur dargestellt wird; liegt er tiefer, so hat man den Zwischenraum $GI=f$ negativ zu nehmen. Nun entspreche aber die Berührung dem Punkte T, so dass eine auf die Ebene des Kreises in T normale gerade Linie die in die horizontale Ebene Hh fallende Berührungslinie ist. Zieht man daher durch den Mittelpunkt des Kreises die gerade Linie ΠGT nach dem Berührungspunkte T, so wird dieselbe der Richtung des Druckes, wodurch der Körper von der horizontalen Ebene zurückgetrieben wird, parallel sein. Diese Kraft, in welchem andern beliebigen Schnitte sie sich auch befinden mag, setzen wir $=\Pi$ und betrachten sie als bekannt. Es sei ferner das Gewicht des Cylinders $=M$, der Radius des Kreises $GF=GT=e$ und der Abweichungswinkel $\Pi GL=\varrho$; alsdann wird die Erhöhung des Mittelpunktes der Trägheit I über dem Horizont, oder $IP=e+f\cos\varrho$, wir setzen dieselbe $=v$. Weil wir nun nach der fortschreitenden Bewegung forschen und die Schwere abwärts längs IP mit der Kraft $=M$ antreibt, denke man sich die Kraft des Druckes Π im Mittelpunkte der Trägheit I aufwärts längs IV angebracht; so dass die ganze abwärts treibende Kraft $=M-\Pi$ und die zu bewegende Masse $=M$ wird. Nach den Principien der Bewegung haben wir daher

$$ddv=-\frac{2g(M-\Pi)dt^2}{M}, \quad \text{also } \frac{\Pi}{M}=1+\frac{ddv}{2gdt^2}$$

und

$$\Pi=M\left[1+\frac{fdd\cos\varrho}{2gdt^2}\right] \quad (\S.\ 884.);$$

durch diese Gleichung wird der Winkel $\Pi GL=\varrho$, und hierdurch die Höhe des Mittelpunktes der Trägheit $IP=e+f\cos\varrho$ bekannt. Ist nun dem Körper keine horizontale Bewegung bei-

gebracht worden, so wird der Punkt I nur auf der geraden Linie PIV auf- oder niedersteigend angetrieben, so dass der Punkt P fest bleiben würde und es wird der Berührungspunkt T hierdurch bestimmt, weil $PT = f \sin \varrho$ ist. Hat aber der Körper eine horizontale Bewegung empfangen, so wird er diese beständig gleichförmig und geradlinig beibehalten, und die Bewegung des Punktes I aus dieser gleichförmigen, geradlinigen und horizontalen, und jener vertikalen Bewegung zusammengesetzt sein.

Anmerkung.

§. 931. Ausserdem kann aber in diesem Körper eine drehende Bewegung erzeugt werden, und zwar so, dass so wohl der Punkt G als auch eine auf den Kreis $LMFN$ in G normale Linie, welche die eigenthümliche Axe des Cylinders ist, beständig in derselben horizontalen Ebene bleiben. Um diese drehende Bewegung zu untersuchen, lassen wir die fortschreitende Bewegung zur Seite und betrachten den Mittelpunkt der Trägheit I als in Ruhe. Ist um diesen eine Kugel beschrieben, so wird in derselben der Kreis $LMFN$ immerwährend vertikal sein und zieht man auf ihn eine normale Linie durch I, so wird diese die Längenaxe des Cylinders sein. Beobachtet man diese Bedingung, so kann man alle drehenden Bewegungen, deren der Cylinder fähig ist, leicht in einer Figur darstellen. Hier muss man aber vor allem die Lage der Hauptaxen gehörig beachten und die, aus der Kraft des Drucks entspringenden, Momente in Bezug auf sie bestimmen.

Aufgabe 112.

§. 932. Ein auf einer horizontalen Ebene aufliegender cylindrischer Körper hat eine beliebige Lage, und es ist so wohl der Druck Π als auch der Queerschnitt des Cylinders, in welchem er sich befindet, gegeben; man soll seine Momente in Bezug auf die Hauptaxen bestimmen.

Auflösung.

(Figur 127.) Der durch den Mittelpunkt der Trägheit I normal auf die Länge gelegte Schnitt des Cylinders falle in die Ebene des Papiers, in welcher die gerade Linie IZ normal ist und die gerade Linie LIG durch den Mittelpunkt dieses Schnittes G geht, so dass der Abstand $GI = f$ und der Winkel $ZIL = \varrho$ ist. In G errichte man auf die Ebene des Papiers

die Normale GH bis zu dem Durchschnitt, in welchem die Kraft des Druckes Π sich befindet und es sei der Zwischenraum $GH = h$. Wir haben nun oben gesehen, dass

$$\Pi = M\left(1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}\right)$$

und dass die Richtung dieser Kraft $H\Pi$ vertikal, also parallel IZ ist. Nun denke man sich mit einem beliebigen Radius $=1$ um den Mittelpunkt der Trägheit I eine Kugel beschrieben, auf deren Oberfläche die Punkte A, B und C die Richtungen der Hauptaxen des Körpers angeben, und man setze zur Bestimmung dieser Punkte die Bogen $LA = \zeta$, $LB = \eta$ und $LC = \theta$, eben so $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$, wobei $ZL = \varrho$ ist, wie auch die Winkel $ZLA = \mathfrak{f}$, $ZLB = \mathfrak{g}$ und $ZLC = \mathfrak{h}$. Es ist demnach

$$\cos l = \cos\zeta\cos\varrho + \sin\zeta\sin\varrho\cos\mathfrak{f}$$
$$\cos m = \cos\eta\cos\varrho + \sin\eta\sin\varrho\cos\mathfrak{g}$$

und $$\cos n = \cos\theta\cos\varrho + \sin\theta\sin\varrho\cos\mathfrak{h}.$$

Nun zerlege man zuerst die Kraft $H\Pi = \Pi$ nach den, den Hauptaxen parallelen Richtungen, welche Zerlegung eben so angestellt wird, als wenn diese Kraft im Mittelpunkte I nach der Richtung IZ angebracht wäre. Es entspringen aber hieraus die Kräfte:
längs $IA = \Pi\cos l$, längs $IB = \Pi\cos m$ und längs $IC = \Pi\cos n$, welche aber jetzt im Punkte H angebracht zu denken sind. Zieht man nun die gerade Linie IH, welche $= \sqrt{f^2 + h^2}$ sein wird und die Kugel in F schneidet; so wird

$$\operatorname{tg} GIH = \frac{h}{f}$$

und der Bogen LF mit ZL den Winkel $ZLF = 90^0$ bilden. Man setze den Bogen $LF = \mathfrak{e}$, alsdann wird

$$h = -f\operatorname{tg}\mathfrak{e} \text{ und } IH = -\frac{f}{\cos\mathfrak{e}},$$

so dass man statt des Abstandes $GH = h$ bequem den Bogen $LF = \mathfrak{e}$ in der Rechnung beibehalten kann. Nun muss man aber untersuchen, auf welche Weise die gerade Linie IF gegen die Hauptaxen geneigt ist, welche Neigung durch die Bogen FA, FB und FC bestimmt wird; man findet aber

$$\cos AF = \cos\zeta\cos\mathfrak{e} + \sin\zeta\sin\mathfrak{e}\sin\mathfrak{f},$$
$$\cos BF = \cos\eta\cos\mathfrak{e} + \sin\eta\sin\mathfrak{e}\sin\mathfrak{g}$$

und $$\cos CF = \cos\theta\cos\mathfrak{e} + \sin\theta\sin\mathfrak{e}\sin\mathfrak{h}.$$

(Figur 128.) Es stellen nun die unter sich normalen Linien

IA, IB und IC die Hauptaxen des Körpers dar, zwischen welchen die gerade Linie $IH=-\frac{f}{\cos\mathfrak{e}}$ liegt; alsdann werden die diesen Axen parallelen Coordinaten für den Punkt H sein:

$$IN=IH\cos AF,\ NM=IH\cos BF \text{ und } MH=IH\cos CF.$$

Ferner werden die in H angebrachten und diesen Axen parallelen Kräfte

$$Ha=\Pi\cos l,\quad Hb=\Pi\cos m \text{ und } Hc=\Pi\cos n,$$

woraus in Bezug auf die Hauptaxen sich folgende Momente ergeben:

in Bezug auf IA im Sinne $BC=\Pi.IH[\cos n\cos BF-\cos m\cos CF]$
„ „ „ IB „ „ $CA=\Pi.IH[\cos l\cos CF-\cos n\cos AF]$
„ „ „ IC „ „ $AB=\Pi.IH[\cos m\cos AF-\cos l\cos BF]$.

Diese Momente haben wir oben (§. 813.) durch die Buchstaben P, Q und R bezeichnet, und substituiren wir die vorher dargestellten Werthe, so erhalten wir:

$$P=-\frac{\Pi f}{\cos\mathfrak{e}}[\sin\mathfrak{e}\cos\varrho(\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta-\sin\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta)$$
$$+\cos\mathfrak{e}\sin\varrho(\cos\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta-\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta)$$
$$+\sin\eta\sin\theta\sin\mathfrak{e}\sin\varrho(\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{h}-\cos\mathfrak{g}\sin\mathfrak{h})].$$

Es ist aber

$$\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{h}-\cos\mathfrak{g}\sin\mathfrak{h}=\sin(\mathfrak{g}-\mathfrak{h})=-\frac{\cos\zeta}{\sin\eta\sin\theta},$$
$$\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta-\sin\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta=\cos\mathfrak{f}\sin\zeta$$

und $$\cos\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta-\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta=\sin\mathfrak{f}\sin\zeta;$$

so dass wir sowohl für P, als auch nach der Analogie für Q und R folgende Werthe erhalten:

$$P=-\frac{\Pi f}{\cos\mathfrak{e}}[\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\mathfrak{e}\cos\varrho+\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\mathfrak{e}\sin\varrho-\cos\zeta\sin\mathfrak{e}\sin\varrho]$$

$$Q=-\frac{\Pi f}{\cos\mathfrak{e}}[\cos\mathfrak{g}\sin\eta\sin\mathfrak{e}\cos\varrho+\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\mathfrak{e}\sin\varrho-\cos\eta\sin\mathfrak{e}\sin\varrho]$$

$$R=-\frac{\Pi f}{\cos\mathfrak{e}}[\cos\mathfrak{h}\sin\theta\sin\mathfrak{e}\cos\varrho+\sin\mathfrak{h}\sin\theta\cos\mathfrak{e}\sin\varrho-\cos\theta\sin\mathfrak{e}\sin\varrho].$$

Zusatz 1.

§. 933. Da $-f\operatorname{tg}\mathfrak{e}=h$ ist und h den Zwischenraum GH bezeichnet, um welchen der Durchschnitt, worin der Druck fällt, von dem Durchschnitte, worin der Mittelpunkt der Trägheit sich befindet, nach innen zu entfernt ist; so wird

$$P=-\Pi f\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\varrho+\Pi h(\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\varrho-\cos\zeta\sin\varrho)$$
$$Q=-\Pi f\sin\mathfrak{g}\sin\eta\sin\varrho+\Pi h(\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\varrho-\cos\eta\sin\varrho)$$
$$R=-\Pi f\sin\mathfrak{h}\sin\theta\sin\varrho+\Pi h(\cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\varrho-\cos\theta\sin\varrho).$$

Zusatz 2.

§. 934. Während man demnach die Bewegung des Körpers bestimmt, hat man nicht nur die Grösse des Druckes Π, sondern auch den Zwischenraum $GH = h$ zu ermitteln, um so den Ort zu erhalten, an welchem die mittlere Richtung des Druckes angebracht ist.

Erläuterung.

§. 935. Die Relation zwischen den Bogen ζ, η und θ und den Winkeln $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ ergibt ausgezeichnete Eigenschaften, unter welchen die in der Auflösung angewandten Substitutionen enthalten sind. Zuerst finden wir, zur Bestimmung der Unterschiede jener Winkel:

$$\cos(\mathfrak{f}-\mathfrak{g}) = -\frac{\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta}, \qquad \cos(\mathfrak{g}-\mathfrak{h}) = -\frac{\cos\eta\cos\theta}{\sin\eta\sin\theta},$$

$$\cos(\mathfrak{h}-\mathfrak{f}) = -\frac{\cos\zeta\cos\theta}{\sin\zeta\sin\theta}, \qquad \sin(\mathfrak{f}-\mathfrak{g}) = -\frac{\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta},$$

$$\sin(\mathfrak{g}-\mathfrak{h}) = -\frac{\cos\zeta}{\sin\eta\sin\theta} \text{ und } \sin(\mathfrak{h}-\mathfrak{f}) = -\frac{\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}.$$

Hierdurch können die Winkel $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ auf den Winkel $\mathfrak{f}$ reducirt werden, weil $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} - (\mathfrak{f}-\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{f} + (\mathfrak{h}-\mathfrak{f})$ ist; man erhält demnach

$$\sin\mathfrak{g} = \frac{-\sin\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\eta + \cos\mathfrak{f}\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta},$$

$$\sin\mathfrak{h} = \frac{-\sin\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\theta - \cos\mathfrak{f}\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta},$$

$$\cos\mathfrak{g} = \frac{-\cos\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\eta - \sin\mathfrak{f}\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta},$$

$$\cos\mathfrak{h} = \frac{-\cos\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\theta + \sin\mathfrak{f}\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}.$$

Verbindet man je zwei dieser Gleichungen mit einander und eliminirt entweder $\cos\mathfrak{f}$ oder $\sin\mathfrak{f}$, so erhalten wir die folgenden Formeln:

I) $\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + \sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + \sin\mathfrak{h}\sin\theta\cos\theta = 0$

II) $\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + \cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + \cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\theta = 0$

III) $\sin\mathfrak{f}\sin\zeta = -\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta + \cos\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta$

IV) $\sin\mathfrak{g}\sin\eta = -\cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\zeta + \cos\mathfrak{f}\cos\theta\sin\zeta$

V) $\sin\mathfrak{h}\sin\theta = -\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta + \cos\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta$

VI) $\cos\mathfrak{f}\sin\zeta = \sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta - \sin\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta$

VII) $\cos\mathfrak{g}\sin\eta = \sin\mathfrak{h}\sin\theta\cos\zeta - \sin\mathfrak{f}\cos\theta\sin\zeta$

VIII) $\cos\mathfrak{h}\sin\theta = \sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta - \sin\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta$

IX) $\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2 + \sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2 + \sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\theta^2 = 0$

X) $\sin \mathfrak{f}^2 \sin \zeta^2 + \sin \mathfrak{g}^2 \sin \eta^2 + \sin \mathfrak{h}^2 \sin \theta^2 = 1$

XI) $\cos \mathfrak{f}^2 \sin \zeta^2 + \cos \mathfrak{g}^2 \sin \eta^2 + \cos \mathfrak{h}^2 \sin \theta^2 = 1.$

Vermittelst dieser Formeln kann man die Gleichungen, auf welche die Bestimmung der Bewegung geführt wird, vereinfachen.

Aufgabe 113.

§. 936. Wenn ein beliebiger cylindrischer Körper sich auf irgend eine Weise auf einer horizontalen Ebene bewegt, soll man die Gleichungen darstellen, durch welche zu jeder Zeit seine Lage und drehende Bewegung bestimmt wird.

Auflösung.

(Figur 129.) Es bleiben die Bezeichnungen dieselben wie in der vorhergehenden Aufgabe, und man betrachte den Mittelpunkt der Trägheit I als in Ruhe. Um ihn sei eine Kugel beschrieben, deren Scheitelpunkt Z und fester Scheitelkreis ZDX ist, auf welchem letztern die centrale Linie IL anfangs die Lage ID eingehalten habe. Nach Verlauf der Zeit t gelange sie aber nach L, und man setze den Bogen $ZL = \varrho$ und den Winkel $XZL = \varphi$, ferner bestimme man die Lage der Hauptaxen, deren Pole in A, B und C liegen, so dass die Bogen $LA = \zeta$, $LB = \eta$ und $LC = \theta$, und die Winkel $ZLA = \mathfrak{f}$, $ZLB = \mathfrak{g}$ und $ZLC = \mathfrak{h}$ werden, welche Grössen constant sind. Durch sie und den veränderlichen Bogen $ZL = \varrho$ werden die Bogen $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$ so bestimmt, dass man hat

$$\cos l = \cos \zeta \cos \varrho + \cos \mathfrak{f} \sin \zeta \sin \varrho$$

$$\cos m = \cos \eta \cos \varrho + \cos \mathfrak{g} \sin \eta \sin \varrho$$

und

$$\cos n = \cos \theta \cos \varrho + \cos \mathfrak{h} \sin \theta \sin \varrho.$$

Sind nun Ma^2, Mb^2 und Mc^2 die Momente der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Hauptaxen IA, IB und IC, wobei M die Masse des Körpers ist, ferner Π der Druck und steht der Schnitt, in welchem dieser sich befindet, von I nach innen zu um den Zwischenraum $= s$ ab; so ist der letztere veränderlich und es muss in den obigen Formeln s statt h geschrieben werden. Es drehe sich nun der Körper um den Pol O mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ im Sinne ABC, und indem man die Bogen $OA = \alpha$, $OB = \beta$ und $OC = \gamma$ setzt, sei $\Omega \cos \alpha = x$, $\Omega \cos \beta = y$ und $\Omega \cos \gamma = z$. Wir haben nun zuerst die Gleichung

$$\Pi = M \left[1 + \frac{f dd. \cos \varrho}{2 g dt^2} \right],$$

hierauf aber die drei Gleichungen (§. 806.):

$$a^2dx+(c^2-b^2)yzdt=-\frac{2\Pi fg}{M}dt\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\varrho$$
$$+\frac{2\Pi sg}{M}dt[\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\varrho-\cos\zeta\sin\varrho]$$
$$b^2dy+(a^2-c^2)xzdt=-\frac{2\Pi fg}{M}dt\sin\mathfrak{g}\sin\eta\sin\varrho$$
$$+\frac{2\Pi sg}{M}dt[\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\varrho-\cos\eta\sin\varrho]$$
$$c^2dz+(b^2-a^2)xydt=-\frac{2\Pi fg}{M}dt\sin\mathfrak{h}\sin\theta\sin\varrho$$
$$+\frac{2\Pi sg}{M}dt[\cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\varrho-\cos\theta\sin\varrho].$$

Ausserdem haben wir (§. 808.) die drei Gleichungen:

$$dl.\sin l=dt[y\cos n-z\cos m]=d\varrho[\cos\zeta\sin\varrho-\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\varrho]$$
$$dm.\sin m=dt[z\cos l-x\cos n]=d\varrho[\cos\eta\sin\varrho-\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\varrho]$$
$$dn.\sin n=dt[x\cos m-y\cos l]=d\varrho[\cos\theta\sin\varrho-\cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\varrho],$$

von denen es genügt, nur je zwei zu nehmen, so dass sechs Gleichungen übrig bleiben, durch welche man ebenso viele veränderliche Grössen x, y, z, Π, s und ϱ zu einer gegebenen Zeit t bestimmen muss. Setzen wir endlich die Winkel $XZA=\lambda$, $XZB=\mu$ und $XZC=\nu$, so wird

$$d\lambda.\sin l^2=-dt(y\cos m+z\cos n),$$

welche eine Gleichung aufzulösen genügt. Da aber $LZA=\lambda-\varphi$ ist, so wird

$$\cos(\lambda-\varphi)=\frac{\cos\zeta-\cos l\cos\varrho}{\sin l\sin\varrho}\text{ und }\sin(\lambda-\varphi)=\frac{\sin\mathfrak{f}\sin\zeta}{\sin l}.$$

Hieraus erhalten wir

$$(d\lambda-d\varphi)\cos(\lambda-\varphi)=\frac{(d\lambda-d\varphi)(\cos\zeta-\cos l\cos\varrho)}{\sin l\sin\varrho}$$
$$=-\frac{dl.\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos l}{\sin l^2},$$

also

$$d\varphi=-\frac{dt(y\cos m+z\cos n)}{\sin l^2}+\frac{dl.\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos l\sin\varrho}{\sin l(\cos\zeta-\cos l\cos\varrho)},$$

wodurch auch zu jeder gegebenen Zeit der Winkel φ bestimmt wird. Mittelst dieser Bestimmungsstücke lernt man die Bewegung des Körpers vollständig kennen.

Zusatz 1.

§. 937. Da $\cos\zeta-\cos l\cos\varrho=\sin\varrho(\cos\zeta\sin\varrho-\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\varrho)$ $=\frac{dl.\sin l\sin\varrho}{d\varrho}$ ist, so wird

$$d\varphi = -\frac{dt(y\cos m + z\cos n)}{\sin l^2} + \frac{d\varrho.\sin \mathfrak{f} \sin\zeta \cos l}{\sin l^2}$$

und hieraus

$$\sin l^2 d\varphi = - dt(y\cos m + z\cos n) + d\varrho.\cos\varrho \sin \mathfrak{f} \sin\zeta \cos\zeta + d\varrho.\sin\varrho \sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2.$$

Aehnliche Ausdrücke findet man aber für $\sin m^2 d\varphi$ und $\sin n^2 d\varphi$, und verbindet man dieselben in eine Summe, so wird, weil $\sin l^2 + \sin m^2 + \sin n^2 = 2$ ist, nach §. 935., nro. I. u. IX.

$$d\varphi = - dt(x\cos l + y\cos m + z\cos n).$$

Hier bezeichnet $x\cos l + y\cos m + z\cos n$ das Product $\Omega\cos ZO$ (§. 909.)

Zusatz 2.

§. 938. Aus den für $dl.\sin l$, $dm.\sin m$ und $dn.\sin n$ gefundenen Gleichungen leiten wir ab

$$dl.\sin l\cos\zeta + dm.\sin m\cos\eta + dn.\sin n\cos\theta = d\varrho.\sin\varrho,$$

und wenn wir die Werthe durch dt substituiren; so erlangen wir mittelst der oben gegebenen Reductionen:

$$d\varrho = - dt[x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\theta].$$

Zusatz 3.

§. 939. Aus den drei ersten Gleichungen aber leiten wir, weil

$$xdl.\sin l + ydm.\sin m + zdn.\sin n = 0$$

ist, die folgende ab:

$$a^2xdx + b^2ydy + c^2zdz = -\frac{2\Pi fg}{M} dt\sin\varrho[x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\theta]$$

$$= \frac{2\Pi fg}{M} d\varrho.\sin\varrho$$

$$= -2fgd.\cos\varrho\left(1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}\right),$$

deren Integral also ist:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = C - 4fg\cos\varrho - \frac{f^2d\varrho^2\sin\varrho^2}{dt^2}.$$

Anmerkung.

§. 940. Zieht man auf unserer Kugel den grössten horizontalen Kreis YMX, so muss sich auf demselben immerwährend die Längenaxe des Cylinders befinden. Es treffe nun der vordere Endpunkt derselben diesen Kreis in M, alsdann werden, weil ML und MZ Quadranten sind, die Winkel MZL und und MLZ rechte, also der Winkel $ZML = \varrho$ und der Bogen $XM = \angle XZM = 90^0 + \varphi$. Weil aber der Punkt M sich nur auf dem Kreise XY bewegen kann, muss der Drehungspol O nothwendig auf dem Quadranten ZM liegen. Setzen wir nun

den Bogen $OM = \omega$, so wird, in Folge der im Sinne ABC gerichteten Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$, der Punkt M im Zeittheilchen dt gegen X durch den kleinen Bogen $= \Omega dt.\sin\omega$ zurückschreiten. Es ist aber

$$\sin\omega = \cos OZ = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n,$$

also

$$\Omega\sin\omega = x\cos l + y\cos m + z\cos n,$$

so dass

$$-d\varphi = dt[x\cos l + y\cos m + z\cos n]$$

wird, wie wir in Zusatz 1. gefunden haben. (Figur 130.) Da ferner im Dreieck OZL, $ZO = 90^0 - \omega$, $ZL = \varrho$ und $OZL = 90^0$ ist, so wird

$$\cos OL = \sin\omega\cos\varrho, \quad \sin OLZ = \frac{\cos\omega}{\sin OL}$$

und

$$\cos OLZ = \frac{\sin\omega\sin\varrho}{\sin OL}, \quad \text{wegen } \operatorname{cotg} OLZ = \frac{\sin\varrho\sin\omega}{\cos\omega}.$$

Dreht sich aber im Zeittheilchen dt der Punkt L um O nach l, so wird

$$Ll = \Omega dt.\sin OL \text{ und } \angle OLl = 90^0,$$

und daher, wenn man $l\lambda$ auf ZL perpendikulär zieht,

$$L\lambda = Ll\cos ZLl = Ll\sin OLZ = \Omega dt.\cos\omega,$$

oder weil $L\lambda = -d\varrho$, $d\varrho = -\Omega dt.\cos\omega$.

Vergleichen wir diese Formel mit der in §. 938. gefundenen, so ergibt sich

$$\Omega\cos\omega = x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\theta.$$

Es wird daher

$$x^2 + y^2 + z^2 = \Omega^2 = [x\cos l + y\cos m + z\cos n]^2 + [x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\theta]^2,$$

welche Gleichung durch die

$$xdl.\sin l + ydm.\sin m + zdn.\sin n = 0$$

bestätigt wird.

Damit wir aber nicht durch die Menge der Buchstaben überladen werden, wollen wir den Fall entwickeln, in welchem die Längenaxe des Cylinders zugleich eine Hauptaxe ist.

Aufgabe 114.

§. 941. Die durch den Mittelpunkt der Trägheit eines cylindrischen Körpers gezogene Längenaxe ist zugleich eine Hauptaxe, und es bewegt sich derselbe auf beliebige Weise oberhalb einer horizontalen Ebene; man soll seine Bewegung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 131.) Da die Punkte A und M in einen einzigen zusammenfallen, so befinden sich die zwei übrigen Hauptpole B und C auf dem vertikalen Kreise ZL; es wird daher $LA = \zeta = 90^0$, $LB = \eta$ und $LC = \theta = 90^0 - \eta$, ferner $ZLA = \mathfrak{f} = 90^0$, $ZLB = \mathfrak{g} = 180^0$ und $ZLC = \mathfrak{h} = 0$; demnach $ZA = l = 90^0$, $ZB = m = \eta + \varrho$ und $ZC = n = \varrho - \theta = \eta + \varrho - 90^0$. Substituirt man diese Werthe, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$$

$$a^2dx + (c^2 - b^2)yzdt = -\frac{2\Pi fgdt}{M}\sin\varrho$$

$$b^2dy + (a^2 - c^2)xzdt = -\frac{2\Pi gsdt}{M}\sin(\eta + \varrho)$$

$$c^2dz + (b^2 - a^2)xydt = \frac{2\Pi gsdt}{M}\cos(\eta + \varrho)$$

$$y\sin(\eta + \varrho) - z\cos(\eta + \varrho) = 0$$

$$-xdt\sin(\eta + \varrho) = d\varrho.\sin(\eta + \varrho) \text{ oder } d\varrho = -xdt$$

und

$$d\varphi = -dt[y\cos(\eta + \varrho) + z\sin(\eta + \varrho)].$$

Man setze nun $y = u\cos(\eta + \varrho)$ und $z = u\sin(\eta + \varrho)$, schreibe $-\frac{d\varrho}{x}$ statt dt oder $x = -\frac{d\varrho}{dt}$, alsdann werden unsere Gleichungen sein:

I. $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$

II. $-a^2dd\varrho + \frac{1}{2}(c^2 - b^2)u^2dt^2\sin 2(\eta + \varrho) + \frac{2\Pi}{M}fgdt^2\sin\varrho = 0$

III. $b^2du\cos(\eta + \varrho) - (a^2 + b^2 - c^2)ud\varrho\sin(\eta + \varrho) = -\frac{2\Pi}{M}gsdt\sin(\eta + \varrho)$

IV. $c^2du\sin(\eta + \varrho) + (a^2 - b^2 + c^2)ud\varrho\cos(\eta + \varrho) = \frac{2\Pi}{M}gsdt\cos(\eta + \varrho)$

und

V. $d\varphi = -udt.$

Aus der dritten und vierten erhalten wir durch die Elimination von s

$b^2du\cos(\eta + \varrho)^2 + c^2du\sin(\eta + \varrho)^2 - 2(b^2 - c^2)ud\varrho\sin(\eta + \varrho)\cos(\eta + \varrho) = 0,$

deren Integral ist

$$u = \frac{C}{b^2 + c^2 + (b^2 - c^2)\cos 2(\eta + \varrho)}.$$

Substituirt man diesen Werth in die zweite Gleichung, so erhalten wir

$$-2a^2dd\varrho+\frac{C^2(c^2-b^2)dt^2\sin 2(\eta+\varrho)}{[b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2(\eta+\varrho)]^2}$$
$$+dt^2\sin\varrho\left[4fg+\frac{2f^2dd.\cos\varrho}{dt^2}\right]=0,$$

und wenn man diese Gleichung durch $d\varrho$ multiplicirt und dann integrirt:

$$-a^2d\varrho^2-\frac{\frac{1}{2}C^2dt^2}{b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2(\eta+\varrho)}$$
$$-4fgdt^2\cos\varrho-f^2d\varrho^2\sin\varrho^2+Ddt^2=0$$

oder

$$d\varrho^2(a^2+f^2\sin\varrho^2)$$
$$=dt^2\left[D-4fg\cos\varrho-\frac{\frac{1}{2}C^2}{b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2(\eta+\varrho)}\right],$$

woraus folgt

$$dt=\frac{d\varrho\sqrt{[a^2+f^2\sin\varrho^2][b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2(\eta+\varrho)]}}{\sqrt{[D-4fg\cos\varrho][b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2(\eta+\varrho)]-\frac{1}{2}C^2}}.$$

Da nun die Zeit t wie auch u durch ϱ gegeben ist, erhalten wir daraus den Druck Π und ferner den Zwischenraum s aus der Gleichung

$$\frac{2\Pi}{M}gsdt=(c^2-b^2)du\sin(\eta+\varrho)\cos(\eta+\varrho)+a^2ud\varrho$$
$$+(c^2-b^2)ud\varrho\cos 2(\eta+\varrho)\quad\text{(III. u. IV.)}.$$

Hierauf erhalten wir aber

$x=-\dfrac{d\varrho}{dt}$, $y=u\cos(\eta+\varrho)$, $z=u\sin(\eta+\varrho)$ und endlich $\varphi=-\int udt$.

Zusatz 1.

§. 942. Hat der Punkt L sich anfangs in D befunden, so dass $ZD=\mathfrak{r}$ ist und dort geruhet, so ist für $t=0$, $u=0$ und $\dfrac{d\varrho}{dt}=0$, weil $\Omega=0$. Man muss daher die Constanten so bestimmen, dass $C=0$ und $D=4fg\cos\mathfrak{r}$ werde, wesshalb

$$dt=d\varrho\sqrt{\frac{a^2+f^2\sin\varrho^2}{4fg(\cos\mathfrak{r}-\cos\varrho)}},\quad\text{also }\varrho>\mathfrak{r}$$

wird. Ferner wird, weil $u=0$, $\varphi=0$ und $s=0$, der Druck Π hierdurch leicht bekannt und da ϱ bis 90^0 zunehmen kann, wird der Körper gleichsam niederfallen. Diese Bewegung ist demnach weder von der Lage der Hauptaxen IB und IC, noch vom Radius des Cylinders e abhängig.

Zusatz 2.

§. 943. War im Anfange die gerade Linie IL vertikal oder $\varrho=0$, und hat der Körper angefangen sich um dieselbe mit der

Winkelgeschwindigkeit ε im Sinne AB zu drehen, so dass also O sich in L befunden hat und daher $\alpha=90^0$, $\beta=\eta$ und $\gamma=90^0-\eta$ war; so hat man für den Anfang

$$x=-\frac{d\varrho}{dt}=0,\quad y=\varepsilon\cos\eta \text{ und } z=\varepsilon\sin\eta.$$

Es werden hiernach die Constanten

$$C=\varepsilon[b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2\eta]$$

und $$D=4fg+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2[b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2\eta];$$

ferner wird

$$u=\frac{\varepsilon[b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2\eta]}{b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2(\eta+\varrho)}$$

und $$\frac{d\varrho^2(a^2+f^2\sin\varrho^2)}{dt^2}=4fg(1-\cos\varrho)$$

$$+\frac{\tfrac{1}{2}\varepsilon^2(b^2-c^2)[b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2\eta][\cos 2(\eta+\varrho)-\cos 2\eta]}{b^2+c^2+(b^2-c^2)\cos 2(\eta+\varrho)}.$$

Zusatz 3.

§. 944. Wäre $b^2=c^2$, so würde

$$dt=d\varrho\sqrt{\frac{a^2+f^2\sin\varrho^2}{4fg(1-\cos\varrho)}}$$

werden, die gerade Linie IL beständig vertikal bleiben und der Körper sich um dieselbe gleichförmig zu drehen fortfahren. Da nämlich der Nenner den Factor $\sqrt{1-\cos\varrho}=\sin\tfrac{1}{2}\varrho\,\sqrt{2}$ enthält, so wird nur erst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit der Bogen ϱ einen endlichen Werth annehmen. Eben diess geschieht, wenn entweder $\eta=0$ oder $\theta=0$, d. h. wenn die gerade Linie IL eine Hauptaxe ist.

Anmerkung

§. 945. Ist die Längenaxe nicht zugleich eine Hauptaxe des Körpers, so ersieht man wegen der Menge der Buchstaben kaum, auf welche Weise die oben hergeleiteten Formeln allgemein entwickelt werden können, was wir doch später unternehmen werden. Wenn wir aber nur gleichsam unendlich kleine Bewegungen derartiger cylindrischer Körper betrachten, zu welchem Ende auf der centralen geraden Linie LF (Fig. 126.) der Mittelpunkt der Trägheit I unter den Mittelpunkt des Kreises G fallen und der Körper unendlich wenig aus dem Zustande der Ruhe gebracht werden muss; so entstehen sehr kleine Schwingungen oder Schwankungen, deren Natur wir aus unsern allgemeinen Formeln werden bestimmen können. Es ist hier

nicht nöthig, dass der ganze Körper cylindrisch sei, sondern es reicht hin, wenn seine Grenzen um M und N cylindrisch sind und er sich mit diesen auf die festen horizontalen Ebenen P und Q stützt. Ja es ist selbst hinreichend, wenn nur in der Nähe der Berührung beider Enden die Figur cylindrisch ist, da wir nur unendlich kleine Bewegungen zulassen. Hierauf kann zwischen den Unterlagen P und Q ein beliebiges Pendel $FmHn$ angebracht sein, so dass ein Pendel entsteht, welches nicht um eine feste lineare Axe, sondern um die auf den horizontalen Ebenen liegenden cylindrischen Enden beweglich ist und dessen schwingende Bewegung bestimmt werden muss. In einem solchen Pendel bemerke man demnach zuerst seinen Mittelpunkt der Trägheit I, und ziehe durch denselben die gerade Linie mn parallel der geometrischen Axe des Cylinders, welche die beständig horizontal bleibende Längenaxe ist. Man ziehe ferner aus I perpendikulär auf MN die gerade Linie IGL, und ist diese vertikal, so wird sich der Körper in Ruhe befinden; setzen wir ferner den Zwischenraum $GI=f$, so müssen wir in den obigen Formeln den Buchstaben f negativ annehmen. Ferner sei für die cylindrische Figur der Grenzen der Radius der Grundfläche $=e$, derselbe tritt aber, wie wir gesehen haben, durchaus nicht in die Rechnung ein, so dass es gleichgültig ist, ob die Enden dicker oder dünner sind. Ist die gerade Linie $IG=f$ kleiner als $GF=e$, so befindet sich der ganze Körper oberhalb der Unterlagen P und Q, und es ergibt sich eine Bewegung derjenigen ähnlich, durch welche die Wiegen angetrieben zu werden pflegen. Wie aber auch immer der Mittelpunkt der Trägheit I beschaffen sein mag, so wird er beständig auf derselben vertikalen geraden Linie bleiben, wesshalb die ganze Untersuchung auf die Bestimmung einer drehenden Bewegung zurückgeführt wird, bei welcher wir den Mittelpunkt der Trägheit I als ruhend betrachten.

Aufgabe 115.

§. 946. Ein Körper, welcher mit cylindrischen Grundflächen auf horizontalen Ebenen liegt, wird unendlich wenig aus der Lage der Ruhe gebracht und es wird ihm zugleich eine unendlich kleine Bewegung eingeflösst; man soll die schwankende Bewegung bestimmen, durch welche er angetrieben wird.

Auflösung.

(Figur 129.) In unsern allgemeinen Formeln setze man zu-

erst den Abstand $GI=f$ negativ, zweitens muss man den Bogen $ZL=\varrho$, um welchen die centrale gerade Linie LGI von der vertikalen Lage abweicht, als unendlich klein betrachten, eben so wie die Winkelgeschwindigkeit Ω; wesshalb die Grössen $x=\Omega\cos\alpha$, $y=\Omega\cos\beta$ und $z=\Omega\cos\gamma$ als verschwindend kleine behandelt werden müssen. Auf welche Weise nun auch die Hauptaxen IA, IB und IC in Bezug auf die centrale Linie GI und die Längenaxe mn liegen mögen, deren Lage so wohl durch die Bogen $LA=\zeta$, $LB=\eta$ und $LC=\theta$, als auch durch die Winkel $ZLA=\mathfrak{f}$, $ZLB=\mathfrak{g}$ und $ZLC=\mathfrak{h}$ bestimmt wird; so haben wir erstens

$$\sin\varrho=\varrho \text{ und } \cos\varrho=1,$$

zweitens können die Produkte xy, xz und yz vernachlässigt werden. Hierdurch wird

$$\cos l=\cos\zeta,\quad \cos m=\cos\eta \text{ und } \cos n=\cos\theta,$$

ferner werden die Gleichungen, welche die Auflösung enthalten, nach Aufgabe 113., weil $\frac{\Pi}{M}=1-\frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}=1$ ist:

$$\text{I.}\quad a^2dx=2fg\varrho dt\sin\mathfrak{f}\sin\zeta+2gsdt\cos\mathfrak{f}\sin\zeta$$

$$\text{II.}\quad b^2dy=2fg\varrho dt\sin\mathfrak{g}\sin\eta+2gsdt\cos\mathfrak{g}\sin\eta$$

$$\text{III.}\quad c^2dz=2fg\varrho dt\sin\mathfrak{h}\sin\theta+2gsdt\cos\mathfrak{h}\sin\theta.$$

Hieraus wird nach §. 939. folgendes Integral abgeleitet:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=C-2fg\varrho^2-\frac{f^2\varrho^2d\varrho^2}{dt^2},$$

weil $\cos\varrho=1-\frac{1}{2}\varrho^2$ ist und man hier das unendliche kleine ϱ^2 nicht vernachlässigen darf. Ferner haben wir

$$\text{IV.}\quad y\cos\theta-z\cos\eta=-\frac{d\varrho}{dt}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta$$

$$\text{V.}\quad z\cos\zeta-x\cos\theta=-\frac{d\varrho}{dt}\cos\mathfrak{g}\sin\eta$$

$$\text{VI.}\quad x\cos\eta-y\cos\zeta=-\frac{d\varrho}{dt}\cos\mathfrak{h}\sin\theta,$$

und nach den §§. 937. und 938.

$$d\varrho=-dt[x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta+y\sin\mathfrak{g}\sin\eta+z\sin\mathfrak{h}\sin\theta]$$

und $$d\varphi=-dt[x\cos\zeta+\beta\cos\eta+z\cos\theta].$$

Da nun $\text{IV.}\times x+\text{V.}\times y+\text{VI.}\times z=0$ ist, so wird

$$x\cos\mathfrak{f}\sin\zeta+y\cos\mathfrak{g}\sin\eta+z\cos\mathfrak{h}\sin\theta=0.$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen I., II. und III., indem man die Formeln I. und II. des §. 935. zu Hülfe nimmt,

$$a^2x\cos\zeta+b^2y\cos\eta+c^2z\cos\theta=A,$$

und aus denselben Gleichungen zur Bestimmung des Zwischenraumes s, mit Benutzung der Formeln IX. und XI. des §. 935.,

$$a^2 dx \cos\mathfrak{f} \sin\zeta + b^2 dy \cos\mathfrak{g} \sin\eta + c^2 dz \cos\mathfrak{h} \sin\theta = 2gs\,dt.$$

Setzen wir nun $d\varrho = -u\,dt$ und $d\varphi = -v\,dt$, so erhalten wir, weil

$$x \cos\mathfrak{f} \sin\zeta + y \cos\mathfrak{g} \sin\eta + z \cos\mathfrak{h} \sin\theta = 0$$

ist,

$x = u\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + v\cos\zeta$, $y = u\sin\mathfrak{g}\sin\eta + v\cos\eta$ und $z = u\sin\mathfrak{h}\sin\theta + v\cos\theta$,

und hieraus

$$A = u[a^2 \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\zeta + b^2 \sin\mathfrak{g} \sin\eta \cos\eta + c^2 \sin\mathfrak{h} \sin\theta \cos\theta] \\ + v[a^2 \cos\zeta^2 + b^2 \cos\eta^2 + c^2 \cos\theta^2].$$

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} b^2 \cos\mathfrak{h} \cos\eta \sin\theta - c^2 \cos\mathfrak{g} \sin\eta \cos\theta = \mathfrak{A} \\ c^2 \cos\mathfrak{f} \cos\theta \sin\zeta - a^2 \cos\mathfrak{h} \sin\theta \cos\zeta = \mathfrak{B} \\ a^2 \cos\mathfrak{g} \cos\zeta \sin\eta - b^2 \cos\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\eta = \mathfrak{C} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{wonach} \\ \mathfrak{A} \cos\mathfrak{f} \sin\zeta + \mathfrak{B} \cos\mathfrak{g} \sin\eta \\ + \mathfrak{C} \cos\mathfrak{h} \sin\theta = 0 \end{array}$$

$$a^2 \cos\zeta^2 + b^2 \cos\eta^2 + c^2 \cos\theta^2 = \mathfrak{D}$$

$$a^2 \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\zeta + b^2 \sin\mathfrak{g} \sin\eta \cos\eta + c^2 \sin\mathfrak{h} \sin\theta \cos\theta = \mathfrak{F};$$

alsdann wird

$$v = \frac{A - \mathfrak{F}u}{\mathfrak{D}},$$

$$x = \frac{A\cos\zeta + \mathfrak{A}u}{\mathfrak{D}}, \quad y = \frac{A\cos\eta + \mathfrak{B}u}{\mathfrak{D}} \text{ und } z = \frac{A\cos\theta + \mathfrak{C}u}{\mathfrak{D}}.$$

Weil nun $\frac{d\varrho}{dt} = -u$ ist, so erhält man, wenn man diese Werthe in die obige Integralgleichung, welche die lebendige Kraft umfasst, substituirt:

$$\frac{A^2\mathfrak{D} + 2Au[\mathfrak{A}a^2\cos\zeta + \mathfrak{B}b^2\cos\eta + \mathfrak{C}c^2\cos\theta] + u^2[\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2]}{\mathfrak{D}^2} \\ = C - 2fg\varrho^2 - f^2\varrho^2u^2.$$

Dieselbe geht aber, weil

$$\mathfrak{A}a^2\cos\zeta + \mathfrak{B}b^2\cos\eta + \mathfrak{C}c^2\cos\theta = 0$$

ist, über in die folgende:

$$A^2\mathfrak{D} + [\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2]u^2 = C\mathfrak{D}^2 - 2\mathfrak{D}^2fg\varrho^2 - \mathfrak{D}^2f^2\varrho^2u^2.$$

Setzt man hier $C\mathfrak{D}^2 - A^2\mathfrak{D} = B\mathfrak{D}^2$, so ergibt sich

$$u = \frac{\mathfrak{D}\sqrt{B - 2fg\varrho^2}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2 + \mathfrak{D}^2f^2\varrho^2}}.$$

Setzen wir ferner $\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2 = \mathfrak{D}^2\mathfrak{H}^2$ und verwerfen wir das unendlich kleine Glied $\mathfrak{D}^2f^2\varrho^2$, so erhalten wir

$$u = \frac{\sqrt{B - 2fg\varrho^2}}{\mathfrak{H}} \text{ und } dt = -\frac{\mathfrak{H}\,d\varrho}{\sqrt{B - 2fg\varrho^2}}.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$t = \text{Const} + \frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{2fg}} \text{arc.cos.} \frac{\varrho\sqrt{2fg}}{\sqrt{B}}$$

oder

$$\varrho = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2fg}} \cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}} \text{ und } u = \frac{\sqrt{B}}{\mathfrak{G}} \sin\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}.$$

Hierauf erhalten wir aber

$$v = \frac{A}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\sqrt{B}}{\mathfrak{D}\mathfrak{G}} \sin\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}$$

und

$$\varphi = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\sqrt{B}}{\mathfrak{D}\sqrt{2fg}} \cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}$$

$$= D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}.$$

Ferner finden wir

$$s = -\frac{\sqrt{Bf}}{\mathfrak{D}\mathfrak{G}^2\sqrt{2g}}[a^2b^2 \sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\theta^2 + a^2c^2\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2$$
$$+ b^2c^2\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2]\cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}$$

und endlich

$$\Omega^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{A^2 - 2A\mathfrak{F}u + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2)u^2}{\mathfrak{D}^2},$$

so dass für die gegebene Zeit alles bestimmt ist.

Uebrigens ist es noch angemessen zu bemerken, dass nach §. 935.

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{F}^2, \text{ also } \Omega^2 = v^2 + u^2$$

ist.

Zusatz 1.

§. 947. Da $\varrho = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2fg}} \cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}$ ist, so verändert sich offenbar der Bogen $ZL = \varrho$ oder die Abweichung der geraden Linie LI von der vertikalen Lage ähnlich wie ein Pendel, und es werden die Schwankungen dieser Linie LI isochron sein mit den Schwingungen eines Pendels, dessen Länge

$$= \frac{\mathfrak{G}^2}{f} = \frac{\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2}{\mathfrak{D}^2 f}$$

ist (§. 215.).

Zusatz 2.

§. 948. Da ferner $\varphi = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}$ ist, so dreht sich der Punkt L um den Scheitel Z mit der Winkelgeschwindigkeit

$=\frac{A}{\mathfrak{D}}$; es muss aber der mittlere Ort um den kleinen Theil $\frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}$ verbessert werden. Ist aber die Constante $A=0$, so ändert sich der Winkel DZL nur wenig, wenn nicht $\mathfrak{F}=0$ ist.

Zusatz 3.

§. 949. Werden demnach die Umwälzungen des Körpers um die vertikale Axe IZ ausgeschlossen, so dass $A=0$ ist, war ferner im Anfange $\varphi=0$ und $\varrho=\mathfrak{r}$, wie auch die Winkelgeschwindigkeit $\Omega=\varepsilon$; so werden die Constanten so bestimmt werden, dass

$$D=\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{r}}{\mathfrak{D}},\ \mathfrak{r}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2fg}}\cos\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}\text{und }\varepsilon^2=\frac{(\mathfrak{D}^2+\mathfrak{F}^2)B}{\mathfrak{D}^2\mathfrak{G}^2}\left(\sin\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}\right)^2$$

ist. Es wird daher

$$\sqrt{B}=\frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{\cos\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}}=\frac{\varepsilon\mathfrak{D}\mathfrak{G}}{\sin\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}.\sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{F}^2}},$$

mithin

$$\operatorname{tg}\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{G}}=\frac{\varepsilon\mathfrak{D}\mathfrak{G}}{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}\sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{F}^2}},$$

also auch die Constante B bekannt. Ist aber $\varepsilon=0$, so wird

$$\sqrt{B}=\mathfrak{r}\sqrt{2fg} \text{ und } \delta=0.$$

Beispiel.

§. 950. (Figur 131.) Gesetzt es sei die gerade Linie IM, welche durch den Mittelpunkt der Trägheit I der geometrischen Axe des Cylinders (MN, Fig. 132.) parallel gezogen wird, zugleich eine Hauptaxe des Körpers, alsdann haben wir, wie in §. 941.

$$\mathfrak{f}=90^\circ,\ \mathfrak{g}=180^\circ,\ \mathfrak{h}=0,\ \zeta=90^\circ \text{ und } \theta=90^\circ-\eta.$$

Hieraus aber schliessen wir, dass

$\mathfrak{A}=b^2\cos\eta^2+c^2\sin\eta^2$, $\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{C}=0$, $\mathfrak{D}=\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}=0$ und $\mathfrak{G}^2=a^2$,

also die Länge des isochronen einfachen Pendels $=\frac{a^2}{f}$ ist. Ferner wird die horizontale Axe IA unbewegt bleiben. Hat nun im Anfange, wo $\varrho=\mathfrak{r}$ ist, der Körper seine Bewegung von der Ruhe ab begonnen, so wird $\delta=0$ und $\sqrt{B}=\mathfrak{r}\sqrt{2fg}$ und hieraus ergeben sich die übrigen veränderlichen Grössen folgendermassen:

$$\varrho = \mathfrak{r}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{a},\quad u = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{a}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{a},\quad v=0 \text{ wegen } A=0,$$

$$x = u = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{a}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{a},\quad y=0,\quad z=0 \text{ und } \Omega = x.$$

(Figur 132.) In der Wirklichkeit wird aber, wenn man eine fortschreitende Bewegung hinzufügt, der Mittelpunkt der Trägheit I auf einer vertikalen geraden Linie wechselweise auf- und niedersteigen, indem der obere Cylinder MN dieser Bewegung folgt, während er auf den Ebenen P und Q ganz frei einhergehen kann und man annimmt, dass er durch die Reibung nicht gehindert werde.

Anmerkung.

§. 951. Weil die Grösse des Cylinders MN nicht in die Rechnung eintritt, wird dieselbe Auflösung noch gelten, wenn seine Dicke verschwindet und der angefügte Körper an einer linearen Axe aufgehängt ist. Hiernach scheint diese Bewegung mit der oben erklärten schwingenden Bewegung übereinstimmen zu müssen, die doch ganz anders in Gebrauch kommt; indem für die wahre schwingende Bewegung die Länge des isochronen einfachen Pendels sich

$$= f + \frac{a^2}{f} = \frac{a^2 + f^2}{f}$$

ergeben hat (§. 537.), während sie hier nur

$$= \frac{a^2}{f}$$

ist. Die Ursache dieses Unterschiedes liegt darin, dass wir oben in der Lehre von den Schwingungen die Axe MN als fest angenommen haben, während sie hier als sehr frei beweglich vorausgesetzt wird. Hieraus ergibt sich, dass wegen der Freiheit der Axe, wenn sie auch auf einer horizontalen Ebene liegt, die Schwingungen weit geschwinder werden, als wenn die Axe an derselben Stelle festgehalten würde. Diess stimmt auch ganz mit der Theorie überein. (Figur 126.) Soll nämlich der Kreis ΠMTN die Ebene immer in demselben Punkte T berühren, so muss ausser dem Drucke Π eine gewisse horizontale Kraft in die Rechnung eingeführt werden und setzen wir diese $=\Theta$, welche längs TH antreibt, damit der Punkt T constant bleibe; so muss, weil $TP = f\sin\varrho$ ist,

$$\frac{f\,dd.\sin\varrho}{dt^2} = -\frac{2\Theta g}{M}$$

sein. Aus dieser Kraft geht aber auch ein Moment in Bezug auf die Hauptaxen hervor, wodurch auf die drehende Bewegung eingewirkt wird, so dass sich eine solche ergibt, wie wir sie oben bei der Untersuchung der schwingenden Bewegung bestimmt haben.

Uebrigens wird es angemessen sein, hier gehörig zu bemerken, dass, wenn die kleinen Axen des Pendels auf sehr polirten Ebenen liegen, die schwingende Bewegung im höchsten Grade von derjenigen verschieden sein kann, welche entstehen würde, wenn sie festgehalten würden und zwar wird sie eine weit geschwindere werden. Die geringste Reibung wird aber im Stande sein, diesen Unterschied aufzuheben und die Bewegung auf das Gesetz der Schwingungen zurückzuführen. Die Auflösung dieser Aufgabe wird uns aber zur Auflösung der allgemeinen Aufgabe 113. führen.

Aufgabe 116.

§. 952. Ein beliebiger cylindrischer Körper bewegt sich auf beliebige Weise auf einer horizontalen Ebene; man soll die oben gefundenen Gleichungen, durch welche seine Bewegung bestimmt wird, auflösen und zur Integration durchführen.

Auflösung.

(Figur 129.) Es bleibe alles so, wie wir es in der Aufgabe 113. aufgestellt haben, auch nehmen wir auf der centralen geraden Linie $LIGF$ den Mittelpunkt der Trägheit I weiter vom Punkte F entfernt an als den Mittelpunkt G des Cylinderdurchschnitts, indem wir den Zwischenraum $GI=f$ setzen. Aus den dort dargestellten Differentialgleichungen haben wir schon Eine Integralgleichung ermittelt, nämlich

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=C-4fg\cos\varrho-\frac{f^2d\varrho^2\sin\varrho^2}{dt^2}.$$

Ausserdem gehen aber die drei erstern Gleichungen, indem man die drei letztern in ihren letzten Gliedern in Anwendung bringt, in die folgenden über:

$$\text{I.}\quad a^2dx+(c^2-b^2)yzdt=-\frac{2\Pi fgdt}{M}\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\varrho-\frac{2\Pi gsdt}{M}\cdot\frac{dl.\sin l}{d\varrho}$$

$$\text{II.}\quad b^2dy+(a^2-c^2)xzdt=-\frac{2\Pi fgdt}{M}\sin\mathfrak{g}\sin\eta\sin\varrho-\frac{2\Pi gsdt}{M}\cdot\frac{dm.\sin m}{d\varrho}$$

$$\text{III.}\quad c^2dz+(b^2-a^2)xydt=-\frac{2\Pi fgdt}{M}\sin\mathfrak{h}\sin\theta\sin\varrho-\frac{2\Pi gsdt}{M}\cdot\frac{dn.\sin n}{d\varrho}.$$

Hieraus bilde man $I. \times \cos l + II. \times \cos m + III. \times \cos n$, alsdann werden, weil

$$dl . \sin l \cos l + dm . \sin m \cos m + dn . \sin n \cos n = 0$$

ist, die letzten den Zwischenraum s enthaltenen Glieder sich gegenseitig aufheben. Ferner findet man durch die in §. 935., Nr. I. und VIII. gegebenen Beziehungen

$$\sin \mathfrak{f} \sin \zeta \cos l + \sin \mathfrak{g} \sin \eta \cos m + \sin \mathfrak{h} \sin \theta \cos n = 0,$$

so dass auch die vorletzten Glieder aufgehoben werden. Wir gelangen demnach zu der folgenden Gleichung:

$$a^2 dx \cos l + b^2 dy \cos m + c^2 dz \cos n + a^2 xzdt \cos m + b^2 xydt \cos n$$
$$+ c^2 yzdt \cos l - a^2 xydt \cos n - b^2 yzdt \cos l - c^2 xzdt \cos m = 0.$$

Aus den drei letzten Gleichungen des §. 936. folgt aber

$$z \cos m - y \cos n = -\frac{dl . \sin l}{dt}, \quad x \cos n - z \cos l = -\frac{dm . \sin m}{dt}$$

und
$$y \cos l - x \cos m = -\frac{dn . \sin n}{dt},$$

und substituirt man diese Werthe, so erhalten wir die Gleichung

$$a^2 dx \cos l + b^2 dy \cos m + c^2 dz \cos n - a^2 xdl \sin l - b^2 ydm \sin m$$
$$- c^2 zdn \sin n = 0,$$

deren Integral ist

$$a^2 x \cos l + b^2 y \cos m + c^2 z \cos n = D.$$

Hierauf führen wir statt x, y und z neue Veränderliche ein, welche aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$x \cos \zeta + y \cos \eta + z \cos \theta = p$$
$$x \cos \mathfrak{f} \sin \zeta + y \cos \mathfrak{g} \sin \eta + z \cos \mathfrak{h} \sin \theta = q$$
$$x \sin \mathfrak{f} \sin \zeta + y \sin \mathfrak{g} \sin \eta + z \sin \mathfrak{h} \sin \theta = r.$$

Es wird alsdann zuerst nach §. 938.

$$d\varrho = -rdt,$$

ferner, weil $x \cos l + y \cos m + z \cos n = p \cos \varrho + q \sin \varrho$ ist, nach §. 937.

$$d\varphi = -dt(p \cos \varrho + q \sin \varrho).$$

Ausserdem wird, weil $xdl \sin l + ydm \sin m + zdn \sin n = 0$ ist,

$$p \sin \varrho - q \cos \varrho = 0.$$

Setzen wir desshalb $p = u \cos \varrho$ und $q = u \sin \varrho$, so wird

$$d\varphi = -udt \text{ und } d\varrho = -rdt;$$

aber aus jenen angenommenen Gleichungen leiten wir her

$$x = r \sin \mathfrak{f} \sin \zeta + u \cos l, \quad y = r \sin \mathfrak{g} \sin \eta + u \cos m$$

und
$$z = r \sin \mathfrak{h} \sin \theta + u \cos n,$$

und hieraus

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + u^2 = \Omega^2.$$

Nun ergibt die eben vorher gefundene Integralgleichung

$$D = r(a^2 \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos l + b^2 \sin\mathfrak{g} \sin\eta \cos m + c^2 \sin\mathfrak{h} \sin\theta \cos n]$$
$$+ u[a^2 \cos l^2 + b^2 \cos m^2 + c^2 \cos n^2]$$

wodurch u, mithin auch x, y und z, mittelst r und ϱ bestimmt werden. Endlich wird die zuerst gefundene Integralgleichung

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = C - 4fg \cos\varrho - f^2 r^2 \sin\varrho^2,$$

weil sie nur r und ϱ enthält, die eine durch die andere bestimmen, und daher die Gleichung

$$dt = -\frac{d\varrho}{r}$$

für die gegebene Zeit t alle Grössen, welche die Bewegung enthalten, angeben.

Setzen wir nun zur Abkürzung die Constanten

$$a^2 \cos\zeta^2 + b^2 \cos\eta^2 + c^2 \cos\theta^2 = \mathfrak{A}$$
$$a^2 \cos\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\zeta + b^2 \cos\mathfrak{g} \sin\eta \cos\eta + c^2 \cos\mathfrak{h} \sin\theta \cos\theta = \mathfrak{B}$$
$$a^2 \cos\mathfrak{f}^2 \sin\zeta^2 + b^2 \cos\mathfrak{g}^2 \sin\eta^2 + c^2 \cos\mathfrak{h}^2 \sin\theta^2 = \mathfrak{C}$$
$$a^2 \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\zeta + b^2 \sin\mathfrak{g} \sin\eta \cos\eta + c^2 \sin\mathfrak{h} \sin\theta \cos\theta = \mathfrak{D}$$
$$a^2 \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{f} \sin\zeta^2 + b^2 \sin\mathfrak{g} \cos\mathfrak{g} \sin\eta^2 + c^2 \sin\mathfrak{h} \cos\mathfrak{h} \sin\theta^2 = \mathfrak{E}$$
$$a^2 \sin\mathfrak{f}^2 \sin\zeta^2 + b^2 \sin\mathfrak{g}^2 \sin\eta^2 + c^2 \sin\mathfrak{h}^2 \sin\theta^2 = \mathfrak{F};$$

so werden unsere Integralgleichungen:

$$D = r[\mathfrak{D} \cos\varrho + \mathfrak{E} \sin\varrho] + u[\mathfrak{A} \cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B} \sin\varrho \cos\varrho + \mathfrak{C} \sin\varrho^2]$$
$$C - 4fg \cos\varrho - f^2 r^2 \sin\varrho^2 = \mathfrak{F} r^2 + 2ru[\mathfrak{D} \cos\varrho + \mathfrak{E} \sin\varrho]$$
$$+ u^2[\mathfrak{A} \cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B} \sin\varrho \cos\varrho + \mathfrak{C} \sin\varrho^2].$$

Hieraus folgt

$$r^2 = \frac{D^2 - [\mathfrak{A} \cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B} \sin\varrho \cos\varrho + \mathfrak{C} \sin\varrho^2][C - 4fg \cos\varrho]}{[\mathfrak{D} \cos\varrho + \mathfrak{E} \sin\varrho]^2 - [\mathfrak{A} \cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B} \sin\varrho \cos\varrho + \mathfrak{C} \sin\varrho^2][\mathfrak{F} + f^2 \sin\varrho^2]},$$

und zur Bestimmung der Zeit

$$t = \int -\frac{d\varrho}{r}.$$

Da ferner $u = \dfrac{D - r[\mathfrak{D} \cos\varrho + \mathfrak{E} \sin\varrho]}{\mathfrak{A} \cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B} \sin\varrho \cos\varrho + \mathfrak{C} \sin\varrho^2}$ ist, so wird der Winkel

$$\varphi = -\int u\,dt = \int \frac{u\,d\varrho}{r};$$

und da wir also für jede Zeit t sowohl den Bogen ϱ, als auch den Winkel φ bestimmt haben, so wird die Bewegung vollständig bekannt sein.

Zusatz 1.

§. 953. Die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ sind demnach nothwendig positiv, und es verhält sich ferner $\mathfrak{B}$ so zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, dass

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2 = a^2 b^2 \sin\mathfrak{h}^2 \sin\theta^2 + a^2 c^2 \sin\mathfrak{g}^2 \sin\eta^2 + b^2 c^2 \sin\mathfrak{f}^2 \sin\zeta^2$$

wird, woraus folgt, dass die Form $\mathfrak{A}\cos\varrho^2+\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho+\mathfrak{C}\sin\varrho^2$ sich nicht in zwei einfache Factoren zerlegen lässt.

Zusatz 2.

§. 954. Aus dieser allgemeinen Auflösung wird der in der vorhergehenden Aufgabe entwickelte Fall leicht abgeleitet, indem man f negativ und den Bogen ϱ unendlich klein annimmt, wodurch wir erhalten

$$r^2=\frac{D^2-\mathfrak{A}C-4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{D}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{F}}=\frac{\text{Const}+4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{A}\mathfrak{F}-\mathfrak{D}^2}.$$

Man findet aber aus den entwickelten Werthen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F}-\mathfrak{D}^2=a^2b^2\cos\mathfrak{h}^2\sin\theta^2+a^2c^2\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2+b^2c^2\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2,$$

wesshalb man einfacher als oben die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$=\frac{a^2b^2\cos\mathfrak{h}^2\sin\theta^2+a^2c^2\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2+b^2c^2\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2}{f(a^2\cos\zeta^2+b^2\cos\eta^2+c^2\cos\theta^2)}$$

erhält.

Anmerkung.

§. 955. Nachdem diess in Betreff der Bewegung cylindrischer Körper auf einer horizontalen Ebene abgemacht war, hatte ich mir vorgenommen, ein weniges über die Bewegung auf einer geneigten Ebene hinzuzufügen. Ist diese Bewegung aber eine einfache, so hat die Sache keine Schwierigkeit, ist sie hingegen zusammengesetzt, so wird man in unbequeme Rechnungen verfallen. Da man nun in der Praxis die Reibung von diesen Bewegungen nicht trennen kann, werden wir wenigstens die einfachen Bewegungen auf einer geneigten Ebene so behandeln, dass wir zugleich auf die Reibung Rücksicht nehmen; wesshalb es angemessen sein wird, eine besondere Abhandlung über die durch die Reibung gestörte Bewegung starrer Körper hinzuzufügen.

Zugabe.

Kapitel I.

Allgemeine Formeln für die Versetzung beliebiger starrer Körper.

---

§. 956. Soll man die Bewegung eines beliebigen starren Körpers bestimmen, so zerlegt man die ganze Untersuchung sehr bequem in zwei Theile, einen geometrischen und einen mechanischen. Im erstern Theile muss nämlich allein die Versetzung des Körpers von einer gegebenen Stelle zu einer andern, ohne irgend eine Rücksicht auf die Principien der Bewegung, durch analytische Formeln dargestellt werden, mittelst deren die Lage der einzelnen Theile, nach der Versetzung aus ihrer anfänglichen Lage, bestimmt werden kann. Diess ist demnach eine, allein zur Geometrie oder vielmehr zur Stereometrie zu zählende, Untersuchung. Man sieht aber leicht ein, dass, wenn man diese Untersuchung von der andern, welche eigenthümlich die Mechanik angeht, sondert, alsdann die Bestimmung der Bewegung nach den Principien der letztern weit leichter ausgeführt werden kann, als wenn man beide Untersuchungen in Verbindung vornimmt. Da ich nun in meinem Werke über die Bewegung starrer Körper diese beiden Untersuchungen zugleich unternommen habe, wodurch die ganze Behandlung nicht wenig lästig und verwickelt geworden ist; so will ich hier den geometrischen Theil allein genauer entwickeln, wodurch dann der mechanische mit leichterer Mühe behandelt werden kann.

§. 957. (Fig. 133.) Um nun die anfängliche Lage des starren Körpers genau zu bestimmen, ist es angemessen, die Lage seiner einzelnen Punkte nach gewohnter Weise durch je drei unter sich normale Coordinaten darzustellen. Zu diesem Ende

stelle ich drei feste Axen IA, IB und IC auf, welche sich wechselseitig in I normal schneiden, und von welchen die zwei IA und IB in der Ebene des Papiers liegen, die dritte IC aber auf dieser Ebene perpendikulär steht. Nun betrachte ich den beliebigen Punkt Z des Körpers, von welchem auf die Ebene AIB das Perpendikel ZS, hierauf aber aus dem Punkte S auf die Axen IA und IB die Normalen SP und SQ gezogen sind. Wir setzen die Coordinaten $IP=QS=p$, $PS=IQ=q$ und das Perpendikel $SZ=r$, und es werde diesem gleich auf der Axe IC der Theil $IR=r$ angenommen; hiernach wird sich der Punkt Z auf der Diagonale IZ des Parallelepipedums befinden, welches aus den drei Seiten IP, IQ und IR gebildet wird. Auf diese Weise wird die Lage der einzelnen Punkte des Körpers sehr bequem durch die drei Coordinaten p, q und r bestimmt werden.

§. 958. Damit nun aber diese Darstellung leichter der mechanischen Untersuchung angepasst werden könne, nehmen wir den Punkt I am angemessensten im Schwerpunkte, oder vielmehr im Mittelpunkte der Trägheit des vorausgesetzten starren Körpers an. Auf diese Weise erlangen wir nämlich den ausgezeichneten Vortheil, dass, wenn wir die kleine Masse des in Z befindlichen Körpers $=dM$ setzen, über die ganze Ausdehnung des Körpers

$$1)\ \int p\,dM=0,\quad 2)\ \int q\,dM=0\quad \text{und}\quad 3)\ \int r\,dM=0$$

wird, insofern wir nämlich diese Integrale über den ganzen Körper erstrecken. Ausserdem wird es aber vom grössten Nutzen sein, wenn die drei Axen IA, IB und IC in den Hauptaxen des Körpers angenommen werden; alsdann werden nämlich die Werthe der drei folgenden Integralformeln, ebenfalls über den ganzen Körper erstreckt, auch verschwinden, so dass wir erhalten:

$$4)\ \int qp\,dM=0,\quad 5)\ \int pr\,dM=0\quad \text{und}\quad 6)\ \int qr\,dM=0.$$

Es wird angenehm sein, diess nur im Vorübergehen zu bemerken, indem der geometrische Theil von diesen Gleichungen keineswegs abhängig ist.

§. 959. Hat nun eine Versetzung des Körpers stattgefunden, so betrachten wir zuerst den Ort i, nach welchem der Punkt I des Körpers versetzt worden ist und setzen die Coordinaten $If=f$, $fg=g$ und $gi=h$. Ferner sei aber der Punkt Z aus seiner anfänglichen Lage nach z versetzt, worauf wir zur Bestimmung des letztern Punktes die Coordinaten $Ix=x$, $xy=y$

und $yz = z$ setzen. Zuerst ist nun sogleich klar, dass der Abstand iz auch jetzt noch dem Abstande IZ gleich sein muss und da dieser $= \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ war, jener iz aber

$$= \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-r)^2}$$

ist; so erhalten wir die Gleichung:

$$p^2 + q^2 + r^2 = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-r)^2.$$

Ausserdem müssen aber nothwendig die Abstände zwischen je zwei beliebigen Punkten des Körpers in der versetzten Lage auch jetzt noch den Abständen derselben Punkte in der anfänglichen Lage gleich sein, dieser Bedingung werden wir auf folgende Weise Genüge leisten.

§. 960. Wir nehmen den Punkt z an der Stelle an, nach welcher der Punkt P aus der anfänglichen Stellung versetzt worden ist; es erscheint nämlich hier nicht rathsam, unsere Figur durch so viele neu zu ziehende Linien zu beladen. Man kann ferner auch im anfänglichen Zustande den Punkt Z ganz beliebig annehmen, und nehmen wir ihn daher in P an, so wird auch der Punkt z in der versetzten Lage den dem Punkte entsprechenden Ort darstellen.

§. 961. Da nun der Punkt Z in P fällt, wenn $q=0$ und $r=0$ ist, und weil wir ferner die drei Coordinaten x, y und z im Allgemeinen als bestimmte Functionen von p, q und r ansehen dürfen, auf welche Weise auch immer diese Functionen beschaffen sein mögen; so werden, wenn wir in ihnen $q=0$ und $r=0$ setzen, diese Coordinaten nothwendig folgende Formen annehmen:

$$x = f + Fp,\ y = g + Gp \text{ und } z = h + Hp.$$

Weil wir nämlich $q=0$ und $r=0$ setzen, p aber als veränderlich betrachtet wird, so müssen die Coordinaten x, y und z die Lage angeben, in welche die gerade Linie IP versetzt worden ist. Die letztere ist aber wie bemerkt eine gerade, sie muss diess daher auch in der versetzten Lage sein, und es müssen mithin die Coordinaten x, y und z die Lage dieser geraden Linie iz ausdrücken. Wenn man aber $p=0$ setzt, so muss der Punkt z in i fallen, wesshalb offenbar die Grössen x, y und z so durch p bestimmt werden müssen, dass für $p=0$,

$$x = f,\ y = g \text{ und } z = h$$

werde. Weil aber ferner die Gleichung zur Bestimmung einer geraden Linie dienen soll, können keine anderen Formen stattfinden, als die aufgestellten, nämlich

$$x = f + Fp,\ y = g + Gp \text{ und } z = h + Hp,$$

wo die Buchstaben F, G und H gewisse Constanten bezeichnen, welche von der Natur der Versetzung abhängig sind.

§. 962. Es ist aber sogleich klar, dass diese Constanten so beschaffen sein müssen, dass der Zwischenraum iz dem $IP = p$ gleich werde; hieraus folgt die Gleichung

$$iz^2 = F^2p^2 + G^2p^2 + H^2p^2 = p^2,$$

also

$$F^2 + G^2 + H^2 = 1.$$

Nimmt man daher $F = \sin\zeta$ an, so muss $G^2 + H^2 = \cos\zeta^2$ sein, und indem wir demnach $G = \cos\zeta \sin\eta$ und $H = \cos\zeta \cos\eta$ setzen, haben wir

$$F = \sin\zeta,\ G = \cos\zeta \sin\eta \text{ und } H = \cos\zeta \cos\eta.$$

Auf diese Weise sind jene drei Buchstaben F, G und H auf die zwei Winkel ζ und η allein zurückgeführt.

§. 963. Auf ähnliche Weise wollen wir jetzt den Punkt z an der Stelle annehmen, nach welcher der Punkt Q aus der anfänglichen Lage versetzt worden ist; es fällt aber der Punkt Z auf Q, indem wir $p = 0$ und $r = 0$ machen. In diesem Falle werden die drei Coordinaten x, y und z so von der einzigen Veränderlichen q abhängig sein, dass für $q = 0$ wieder

$$x = f,\ y = g \text{ und } z = h$$

wird. Da nun die Gleichung auch die einer geraden Linie sein muss, so werden die Coordinaten folgende Form haben.

$$x = f + F'q,\ y = g + G'q \text{ und } z = h + H'q;$$

und wo, weil $iz = q$ ist, ebenfalls

$$F'^2 + G'^2 + H'^2 = 1$$

sein muss. Dieser Bedingung wird man bequem durch zwei solche Winkel ζ' und η' Genüge leisten können, dass wir

$$F' = \sin\zeta',\ G' = \cos\zeta' \sin\eta' \text{ und } H' = \cos\zeta' \cos\eta'$$

haben.

§. 964. Nehmen wir endlich den Punkt Z in R an, was geschieht, indem wir $p = 0$ und $q = 0$ setzen, so wird der Punkt z den Ort darstellen, nach welchem der Punkt R versetzt worden ist. Für die Coordinaten nehmen wir, auf dieselbe Weise wie vorhin, folgende Formen an:

$$x = f + F''r,\ y = g + G''r \text{ und } z = h + H''r.$$

Weil auch hier

$$F''^2 + G''^2 + H''^2 = 1$$

sein muss, werden wir mittelst der zwei Winkel ζ'' und η''

$$F'' = \sin\zeta'',\ G'' = \cos\zeta'' \sin\eta'' \text{ und } H'' = \cos\zeta'' \cos\eta''$$

setzen können.

§. 965. Weil wir nun Werthe der Coordinaten x, y, z erlangt haben, welche man in den drei entwickelten Fällen einführen muss, wo nämlich von den drei Grössen p, q und r je zwei verschwinden; so ist hieraus klar, auf welche Weise die Coordinaten x, y und z von den einzelnen Grössen p, q und r abhängig sind. Treten daher diese Buchstaben zugleich in die Rechnung ein, so dass durch sie ein beliebiger Punkt Z des Körpers angegeben wird; so müssen die Coordinaten folgende Werthe haben:

$$x = f + Fp + F'q + F''r$$
$$y = g + Gp + G'q + G''r$$
$$z = h + Hp + H'q + H''r.$$

Hierbei werden aber diese neun Buchstaben F, F', F'', G, G', G'', H, H' und H'' auf die sechs Winkel ζ, η, ζ', η', ζ'' und η'' zurückgeführt werden.

§. 966. Nehmen wir nun den Punkt Z in S an, so dass $r = 0$ ist und diesem Punkte in der versetzten Lage der Punkt z entspricht, so werden, indem wir $r = 0$ setzen, die drei Coordinaten

$$x = f + Fp + F'q, \quad y = g + Gp + G'q \quad \text{und} \quad z = h + Hp + H'q.$$

Hier muss nothwendig der Abstand iz gleich IS sein, und da dieser $= \sqrt{p^2 + q^2}$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$p^2 + q^2 = (Fp + F'q)^2 + (Gp + G'q)^2 + (Hp + H'q)^2.$$

Entwickelt man dieselbe, so wird

$$p^2 + q^2 = [F^2 + G^2 + H^2]\,p^2 + [F'^2 + G'^2 + H'^2]\,q^2 + 2[FF' + GG' + HH']\,pq,$$

und da $F^2 + G^2 + H^2 = 1$ und $F'^2 + G'^2 + H'^2 = 1$ ist, so muss nothwendig

$$FF' + GG' + HH' = 0$$

sein.

§. 967. Auf dieselbe Weise wird sich ergeben, dass, wenn wir $q = 0$ setzen, die Gleichung

$$FF'' + GG'' + HH'' = 0,$$

und wenn wir $p = 0$ setzen, die Gleichung

$$F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0$$

stattfinden muss. Hat man diesen drei Bedingungen Genüge geleistet, so wird die ganze Versetzung bestimmt sein, und es werden unsere Formeln für alle Punkte des Körpers dieselben Abstände in der versetzten Lage darstellen, welche jene in der anfänglichen Lage eingehalten haben.

§. 968. Substituiren wir nun in diese Gleichungen die vorher gefundenen Werthe, so wird zuerst $FF' + GG' + HH' = 0$ ergeben

$$\sin\zeta\sin\zeta' + \cos\zeta\cos\zeta'\sin\eta\sin\eta' + \cos\zeta\cos\zeta'\cos\eta\cos\eta' = 0$$

oder $$\sin\zeta\sin\zeta' + \cos\zeta\cos\zeta'\cos(\eta-\eta') = 0,$$

also $$\operatorname{tg}\zeta\operatorname{tg}\zeta' = -\cos(\eta-\eta').$$

Auf dieselbe Weise ergeben die zwei übrigen Gleichungen

$$\operatorname{tg}\zeta'\operatorname{tg}\zeta'' = -\cos(\eta'-\eta'') \text{ und } \operatorname{tg}\zeta''\operatorname{tg}\zeta = -\cos(\eta''-\eta).$$

Mittelst dieser drei Gleichungen wird man die drei Winkel ζ, ζ' und ζ'' bestimmen können, so dass alles durch die drei Winkel η, η' und η'' ausgedrückt werden kann.

§. 969. Damit diess um so leichter geschehen könne, multipliciren wir diese drei Gleichungen in einander, so dass

$$\operatorname{tg}\zeta^2\operatorname{tg}\zeta'^2\operatorname{tg}\zeta''^2 = -\cos(\eta-\eta')\cos(\eta'-\eta'')\cos(\eta''-\eta)$$

wird. Hieraus ersieht man sogleich, dass der Fall ein unmöglicher ist, wenn nicht das Produkt dieser drei Cosinusse negativ ist; wesshalb nothwendig einer derselben, oder alle drei negativ sein müssen. Setzen wir daher der Kürze wegen

$$\cos(\eta-\eta')\cos(\eta'-\eta'')\cos(\eta''-\eta) = -\Delta^2,$$

so wird $$\operatorname{tg}\zeta\operatorname{tg}\zeta'\operatorname{tg}\zeta'' = \Delta;$$

und wenn wir diese Gleichung durch jede einzelne der drei obigen dividiren, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}\zeta'' = -\frac{\Delta}{\cos(\eta-\eta')},\ \operatorname{tg}\zeta = -\frac{\Delta}{\cos(\eta'-\eta'')} \text{ und } \operatorname{tg}\zeta' = -\frac{\Delta}{\cos(\eta''-\eta)}.$$

Auf diese Weise werden alle 9 anfangs angenommenen Coefficienten F, G, H, F', G', H', F'', G'' und H'' allein durch η, η' und η'' bestimmt; es wird nämlich

$$F = \sin\zeta \quad G = \cos\zeta\sin\eta \quad H = \cos\zeta\cos\eta$$
$$F' = \sin\zeta' \quad G' = \cos\zeta'\sin\eta' \quad H' = \cos\zeta'\cos\eta'$$
$$F'' = \sin\zeta'' \quad G'' = \cos\zeta''\sin\eta'' \quad H'' = \cos\zeta''\cos\eta''.$$

§. 970. Alle Versetzungen, durch welche die Lage eines starren Körpers geändert werden kann, können daher durch 6 Elemente bestimmt werden. Zuerst bestimmen nämlich die drei Coordinaten f, g und h die Versetzung des Punktes I nach i, sie sind also durchaus von unserer Willkühr abhängig. Zweitens mag sich inzwischen der Körper um diesen Punkt i auf beliebige Weise gedreht haben, so wird seine Lage doch durch die drei Winkel η, η' und η'' vollständig bestimmt. Nimmt man nämlich in der anfänglichen Lage ein beliebiges Element des Körpers Z an, dessen Lage durch die drei Coordinaten p, q und r bestimmt wird, so wird man dasselbe in der versetzten Lage im Punkte z finden, und zwar wird die Lage des letztern bestimmt durch die drei Coordinaten

$$x = f + Fp + F'q + F''r$$
$$y = g + Gp + G'q + G''r$$
$$z = h + Hp + H'q + H''r.$$

§. 971. Damit wir aber noch mehr davon überzeugt werden, dass durch diese Formeln alles, was die Versetzung betrifft, vollkommen bestimmt wird, können wir auch die ganze Arbeit auf folgende Weise ausführen. Denken wir uns im anfänglichen Zustande ausser dem Punkte Z einen andern beliebigen Z', der in der Figur nicht angegeben ist und dessen Ort durch die Coordinaten p', q' und r' bestimmt werde. Dieser Punkt sei nach z' versetzt, welchem die Coordinaten x', y' und z' entsprechen; alsdann haben wir

$$x' = f + Fp' + F'q' + F''r'$$
$$y' = g + Gp' + G'q' + G''r'$$
$$z' = h + Hp' + H'q' + H''r'.$$

Unter diesen Voraussetzungen erfordert die Natur starrer Körper, dass der Zwischenraum zz' in der veränderten Lage dem Zwischenraum ZZ' in der anfänglichen Lage gleich sei; indem nämlich in diesen Körpern alle Zwischenräume zweier beliebigen Punkte beständig dieselbe Grösse behalten.

§. 972. Nun ist aber das Quadrat des Abstandes der Punkte Z und Z' in der anfänglichen Lage

$$= (p'-p)^2 + (q'-q)^2 + (r'-r)^2,$$

in der versetzten Lage hingegen das Quadrat des gegenseitigen Abstandes der Punkte z und z'

$$= (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

Das letztere wird aus den drei folgenden Quadraten zusammengesetzt:

$$[F(p'-p) + F'(q'-q) + F''(r'-r)]^2,$$
$$[G(p'-p) + G'(q'-q) + G''(r'-r)]^2,$$

und
$$[H(p'-p) + H'(q'-q) + H''(r'-r)]^2$$

deren Summe also der obigen $(p'-p)^2 + (q'-q)^2 + (r'-r)^2$ gleich sein muss.

§. 973. Entwickelt man aber jene drei Quadrate, so ergibt sich für das Quadrat des Abstandes zz' folgender Ausdruck:

$$(p'-p)^2[F^2 + G^2 + H^2] + (q'-q)^2[F'^2 + G'^2 + H'^2]$$
$$+ (r'-r)^2[F''^2 + G''^2 + H''^2]$$
$$+ 2(p'-p)(q'-q)[FF' + GG' + HH']$$
$$+ 2(p'-p)(r'-r)[FF'' + GG'' + HH'']$$
$$+ 2(q'-q)(r'-r)[F'F'' + G'G'' + H'H''].$$

Damit nun derselbe dem frühern $(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2$ gleich gemacht werde, wie man auch immer die 6 Coordinaten p, q, r, p', q' und r' annehmen mag, muss den folgenden 6 Bedingungen Genüge geschehen:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && F^2+G^2+H^2=1\\ &\text{II.} && F'^2+G'^2+H'^2=1\\ &\text{III.} && F''^2+G''^2+H''^2=1\\ &\text{IV.} && FF'+GG'+HH'=0\\ &\text{V.} && FF''+GG''+HH''=0\\ &\text{VI.} && F'F''+G'G''+H'H''=0. \end{aligned}$$

§. 974. Alle diese 6 Bedingungen haben wir aber schon im Obigen erfüllt und gezeigt, wie alle 9 Coëfficienten durch je drei Winkel η, η' und η'' bestimmt werden können. Hieraus ersieht man um so deutlicher, dass unsere Auflösung der Aufgabe hinsichtlich jeder beliebigen Versetzung vollkommen bestimmt und angemessen ist, so dass in dem geometrischen Theile, welchen die Bestimmung der Bewegung solcher Körper erfordert, nichts mehr verlangt werden kann.

§. 975. Auf welche Weise aber die Versetzung des Körpers auch geschehen sein mag, in Folge welcher der Punkt I des Körpers nach i gerückt ist; so ist bekannt, dass, wenn die Versetzung unendlich klein gewesen ist, es immer in der versetzten Lage eine gewisse gerade Linie iz gibt, deren Lage derjenigen parallel ist, welche dieselbe Linie im anfänglichen Zustande gehabt hat. Hätte daher der Punkt I sich in Ruhe befunden, so würde jene gerade Linie ganz unbewegt geblieben sein. Es ist aber einleuchtend, dass diese Linie die Axe des Körpers darstellt, um welche der letztere sich gedreht hat, während er in die versetzte Lage gelangt ist. Es wird daher von der grössten Wichtigkeit sein, zu erforschen, ob es, wenn eine endliche Versetzung stattfindet, auch eine solche Axe gibt.

§. 976. Offenbar sind, damit die gerade Linie iz auch jetzt der Linie IZ parallel sei, folgende drei Bedingungen erforderlich:

$$1)\ x-f=p;\quad 2)\ y-g=q \text{ und } 3)\ z-h=r.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} p&=Fp+F'q+F''r\\ q&=Gp+G'q+G''r\\ r&=Hp+H'q+H''r, \end{aligned}$$

aus welchen die Buchstaben p, q und r eliminirt werden müssen. Die aus denselben abgeleiteten Werthe von p sind aber

$$\frac{F'q+F''r}{1-F}, \quad \frac{(1-G')q-G''r}{G} \text{ und } \frac{(1-H'')r-H'q}{H}.$$

Setzt man die beiden ersten einander gleich, so erhält man zwischen q und r die Relation

$$\frac{q}{r}=\frac{G''(F-1)-F''G}{GF'-(1-F)(1-G')};$$

die Gleichstellung des ersten und dritten Werthes führt auf

$$\frac{q}{r}=\frac{(1-F)(1-H'')-F''H}{F'H+H'(1-F)}.$$

Diese zwei Werthe müssen daher in der Wirklichkeit einander gleich sein, im Fall es eine solche Drehungsaxe gibt.

§. 977. Setzen wir aber diese zwei Werthe einander gleich, so gelangen wir zu der Gleichung

$$(1-F)F''GH'+(1-F)F'G''H+(1-F)(1-G')F''H$$
$$+(1-F)(1-H'')F'G+(1-F)^2G''H'-(1-F)^2(1-G')(1-H'')=0,$$

in welcher alle Glieder den gemeinschaftlichen Factor $1-F$ haben. Hebt man denselben durch Division auf, so bleibt die Gleichung übrig

$$F''GH'+F'G''H+(1-G')F''H+(1-H'')F'G$$
$$+(1-F)G''H'-(1-F)(1-G')(1-H'')=0,$$

welche durch Entwickelung ihrer einzelnen Glieder ergibt:

$$\begin{aligned}0=-1&+F-FG'+FG'H''\\ &+G'-FH''-FG''H'\\ &+H''+F'G-F'GH''\\ &\quad+F''H+F'G''H\\ &\quad-G'H''-F''G'H\\ &\quad+G''H'+F''GH'.\end{aligned}$$

Es ist aber hier nicht klar, auf welche Weise dieser Ausdruck auf 0 gebracht wird, und es würde zu mühsam sein, statt der Buchstaben F, G, H u. s. w. ihre ganz entwickelten Werthe zu substituiren.

§. 978. Indem wir daher diese Untersuchung verlassen, haben wir für jede Versetzung Formeln gegeben, mittelst welcher man aus der gegebenen Lage eines jeden Punktes im anfänglichen Zustande seine Lage in der versetzten Stellung herleiten kann und so dem Ziele, welches wir uns gesteckt hatten, vollständig Genüge geleistet. Man kann daher in diesem Theile nichts mehr verlangen, da die ganze Untersuchung in der Be-

stimmung der 9 Coëfficienten F, G, H, F', G', H', F'', G'' und H'' enthalten ist.

Zugabe.

§. 979. Da die Formeln, welche wir oben für jede versetzte Lage gegeben haben, höchst allgemein sind und alle Versetzungen in sich begreifen, so muss es wunderbar erscheinen, dass aus ihnen nicht hervorgeht, ob es in jeder versetzten Lage eine solche Linie iz gibt, welche dieselbe Richtung wie in der anfänglichen Lage hat. Die im §. 977. gefundene Gleichung ist nämlich so verwickelt, dass es zu lästig sein würde, statt der einzelnen Buchstaben die für sie angegebenen Werthe zu substituiren. Inzwischen ist es auf andere Weise entschieden, dass, auf welche Weise auch immer ein starrer Körper aus einer Lage in eine andere versetzt werden mag, immer eine solche gerade Linie existirt, deren Richtung keine Aenderung erleidet. Um diess nämlich zu beweisen, denken wir uns um den starren Körper, wie auch immer seine Gestalt sein mag, eine mit ihm verbundene und zugleich bewegliche Kugel umschrieben, welche ihren Mittelpunkt in I hat; hierdurch werden wir diese Untersuchung um so leichter auf die sphärische Trigonometrie übertragen können.

Lehrsatz.

§. 980. Auf welche Weise auch immer eine Kugel sich um ihren Mittelpunkt drehen mag, so kann man immer einen Durchmesser angeben, dessen Richtung in der versetzten Lage mit der anfänglichen übereinstimmt,

Beweis.

(Figur 134.) Es stelle ABC einen beliebigen grössten Kreis der Kugel im anfänglichen Zustande dar, und es gelange derselbe nach geschehener Versetzung in die Lage abc, so dass die Punkte A, B und C nach den Punkten a, b und c versetzt sind; A sei zugleich der Durchschnittspunkt dieser zwei Kreise. Diess vorausgesetzt hat man zu beweisen, dass es einen Punkt O gibt, der gleiche Beziehung zu dem Kreise ABC wie zu dem abc hat. Hierzu ist es nothwendig, dass erstens die Abstände OA und Oa einander gleich sind; zweitens aber müssen auch die Bogen OA und Oa gegen jene zwei Kreise gleich geneigt, d. h. es muss der Winkel $Oab = OAB$ sein; es werden demnach auch ihre Ergänzungen zu zwei Rechten oder die

Winkel OaA und $OA\alpha$ einander gleich sein. Weil aber $Oa = OA$, so ist auch $\angle OaA = OAa$, mithin

$$OAa = OA\alpha;$$

halbirt man daher den Winkel $aA\alpha$ mittelst des Bogens OA, so wird der gesuchte Punkt O irgendwo auf diesem Bogen OA liegen. Derselbe wird daher gefunden werden, wenn man den Bogen aO so zieht, dass

$$\angle AaO = OAa$$

werde. Der Durchschnitt dieser zwei Bogen wird den Punkt O ergeben, und zieht man durch denselben einen Durchmesser der Kugel, so wird dessen Lage in der versetzten Stellung der Kugel dieselbe wie in der anfänglichen sein.

§. 981. Um diesen Punkt O leichter zu bestimmen, kann man auch den Bogen Aa in M halbiren und hier den Bogen MO normal auf Aa ziehen; wenn man hierauf den Bogen AO so zieht, dass er den Winkel $aA\alpha$ halbirt, so wird der Durchschnitt dieser zwei Bogen den gesuchten Punkt angeben. Es ist hier zu bemerken, dass, wenn man $A\alpha = aA$ annimmt, alsdann α der Punkt der Kugel sein wird, welcher nach geschehener Versetzung zum Punkte A gelangt; wesshalb eben der Winkel $aA\alpha$, nicht aber sein Nebenwinkel aAB halbirt werden muss.

§. 982. (Figur 133.) Gewöhnlich pflegt man zwar den Punkt I, auf welchen die anfängliche Lage des Körpers sich bezieht, in seinem Schwerpunkte anzunehmen. Aus dem gegebenen Beweise geht aber hervor, dass die Wahrheit des Lehrsatzes auch bestehen wird, wenn man irgend einen andern beliebigen Punkt als Mittelpunkt der Kugel annimmt. Nimmt man daher in einem starren Körper statt I einen beliebigen Punkt an, so wird man durch ihn immer eine gerade Linie ziehen können, deren Lage in dem versetzten Zustande nicht geändert wird; es verhindert uns selbst nichts, diesen Punkt I ausserhalb des Körpers anzunehmen. Man muss sich daher wohl hüten, diese ausgezeichnete Eigenschaft als eine dem Schwerpunkte eigenthümliche anzusehen; man pflegt nämlich I nur desshalb im Schwerpunkte des Körpers anzunehmen, damit die analytischen Formeln, durch welche die Bewegung solcher Körper bestimmt wird, einfacher ausfallen.

§. 983. Da nun durch die sichersten Gründe erwiesen ist, dass es in jeder versetzten Lage immer eine solche gerade

Linie iz gibt, deren Richtung nicht von derjenigen abweicht, welche dieselbe Linie IZ in der anfänglichen Lage eingehalten hat; so können wir auch versichert sein, dass die im §. 977. gegebene Gleichung stets stattfinden wird, nachdem wir nämlich statt aller Buchstaben die angegebenen Werthe substituirt haben. Ist diess nämlich geschehen, so müssen nothwendig durchaus alle Glieder sich wechselseitig von selbst aufheben, wenn diess auch aus jenen 6 Hauptbedingungen, denen Genüge geschehen musste, nicht hervorgeht. Diese ausgezeichnete Eigenschaft, deren Wahrheit geometrisch so leicht gezeigt worden ist, muss daher für eine durch die Art der analytischen Formeln sehr verborgene gehalten werden; ferner können wir, eben aus diesem Grunde, aus derselben den schönsten Zuwachs für die ganze Mechanik mit Recht erwarten.

§. 984. Indessen wollen wir doch die Formeln, welche wir für jene grossen Buchstaben oben gefunden haben, sorgfältiger entwickeln, wodurch man vielleicht leichter ersehen kann, auf welche Weise jene Gleichung des §. 977. erfüllt werde. Nachdem wir aber die 6 Winkel ζ, ζ', ζ'', η, η' und η'' eingeführt haben, durch welche jene Buchstaben im §. 969. ausgedrückt worden sind, haben wir die drei erstern durch die drei letztern so bestimmt, dass, wenn

$$-\cos(\eta-\eta')\cos(\eta'-\eta'')\cos(\eta''-\eta)=\Delta^2$$

gesetzt wurde,

$$\operatorname{tg}\zeta''=-\frac{\Delta}{\cos(\eta-\eta')}, \quad \operatorname{tg}\zeta=-\frac{\Delta}{\cos(\eta'-\eta'')}$$

und

$$\operatorname{tg}\zeta'=-\frac{\Delta}{\cos(\eta''-\eta)}$$

war. Hieraus kann man demnach so wohl die Sinusse, als auch die Cosinusse jener Winkel ableiten.

§. 985. Damit sich diess leichter machen lasse, führen wir statt der Winkel η, η' und η'' andere θ, θ' und θ'' ein, so dass

$$\eta-\eta'=\theta'', \quad \eta'-\eta''=\theta \text{ und } \eta''-\eta=\theta'$$

wird. Hieraus ergibt sich sogleich die Gleichung

$$\theta+\theta'+\theta''=0,$$

so dass diese drei neuen Winkel nur zweien gleichgelten und daher von den Winkeln η, η' und η'' Einer unbestimmt bleibt. Ist diess der Winkel η, so haben wir

$$\eta'=\eta-\theta'' \text{ und } \eta''=\eta+\theta'.$$

Führt man demnach diese Winkel ein, so wird

$$\Delta^2 = -\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''$$

und wir erhalten, indem wir diesen Werth anwenden

$$\operatorname{tg}\zeta'' = -\sqrt{-\frac{\cos\theta\cos\theta'}{\cos\theta''}},$$

$$\operatorname{tg}\zeta = -\sqrt{-\frac{\cos\theta'\cos\theta''}{\cos\theta}}$$

und

$$\operatorname{tg}\zeta' = -\sqrt{-\frac{\cos\theta\cos\theta''}{\cos\theta'}}.$$

§. 986. Aus diesen für die Tangenten gefundenen Formeln leiten wir die Formeln für die Sinusse und Cosinusse her, und zwar wird für den ersten Winkel

$$\sin\zeta'' = -\frac{\sqrt{-\cos\theta\cos\theta'}}{\sqrt{\cos\theta''-\cos\theta\cos\theta'}} \text{ und } \cos\zeta'' = \frac{\sqrt{\cos\theta''}}{\sqrt{\cos\theta''-\cos\theta\cos\theta'}}.$$

Da aber $\theta'' = -\theta - \theta'$ ist, so wird

$$\cos\theta'' = \cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta',$$

und wenn wir diesen Werth substituiren

$$\sin\zeta'' = -\frac{\sqrt{-\cos\theta\cos\theta'}}{\sqrt{-\sin\theta\sin\theta'}} = -\sqrt{\frac{\cos\theta\cos\theta'}{\sin\theta\sin\theta'}} = -\sqrt{\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\theta'},$$

so wie auf ähnliche Weise

$$\cos\zeta'' = \frac{\sqrt{\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'}}{\sqrt{-\sin\theta\sin\theta'}} = \sqrt{1-\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\theta'}.$$

Offenbar ergeben sich ähnliche Werthe für die beiden andern Winkel, so dass wir haben:

$$\sin\zeta = -\sqrt{\operatorname{cotg}\theta'\operatorname{cotg}\theta''} \text{ und } \cos\zeta = +\sqrt{1-\operatorname{cotg}\theta'\operatorname{cotg}\theta''}$$

$$\sin\zeta' = -\sqrt{\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\theta''} \quad ,, \quad \cos\zeta' = +\sqrt{1-\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\theta''}$$

$$\sin\zeta'' = -\sqrt{\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\theta'} \quad ,, \quad \cos\zeta'' = +\sqrt{1-\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\theta'}.$$

§. 987. Substituirt man nun diese entwickelten Werthe, so werden die oben für die 9 Buchstaben F, G, H, F', G', H', F'', G'' und H'' gefundenen Formeln, nachdem man nämlich der Kürze wegen $\operatorname{cotg}\theta = t$, $\operatorname{cotg}\theta' = t'$ und $\operatorname{cotg}\theta'' = t''$ gesetzt hat, folgendermaassen ausgedrückt:

$$F = -\sqrt{t't''}, \quad G = \sin\eta\sqrt{1-t't''}, \quad H = \cos\eta\sqrt{1-t't''},$$

$$F' = -\sqrt{tt''}, \quad G' = \sin\eta'\sqrt{1-tt''}, \quad H' = \cos\eta'\sqrt{1-tt''},$$

$$F'' = -\sqrt{tt'}, \quad G'' = \sin\eta''\sqrt{1-tt'}, \quad H'' = \cos\eta''\sqrt{1-tt'}.$$

§. 988. Wenn wir aber auch diese Werthe in die Gleichung des §. 977. substituiren, so sieht man doch keinesweges

ein, auf welche Weise ihre einzelnen Glieder sich wechselseitig aufheben können. Es wird daher nothwendig sein, ausserdem auf die Bedingung, dass

$$\theta + \theta' + \theta'' = 0$$

ist, Rücksicht zu nehmen. Hieraus ergibt sich folgende Relation zwischen den Buchstaben t, t' und t'', nämlich

$$tt' + tt'' + t't'' = 1,$$

d. h es ist die Summe der Produkte aus je zweien $= 1$. Ausserdem muss man die Bedingung beachten, wonach

$$\eta' = \eta - \theta'' \text{ und } \eta'' = \eta + \theta'$$

war; wenn man diese Bedingungen gehörig beobachtet und durch die Rechnung entwickelt, so kann kein Zweifel übrig bleiben, dass diese Gleichung erfüllt werde. Niemand wird aber so leicht diese staunenswerthe Arbeit übernehmen wollen, wesshalb man jene ausgezeichnete Eigenschaft aller starren Körper für noch weit schwieriger halten muss und es kann daher dieselbe den Geometern die schönste Gelegenheit darbieten, ihre Kräfte an der gänzlichen Enthüllung dieser Eigenschaft zu üben.

Kapitel II.

Neue Methode, die Bewegung starrer Körper zu bestimmen.

---

§. 989. Obgleich ich in meiner Abhandlung über die Bewegung starrer Körper diese Theorie mit hinreichend glücklichem Erfolge behandelt habe, muss ich doch gestehen, dass die von mir gegebenen Auflösungen nicht nur zu verwickelt sind, sondern dass auch ihre Anwendung auf beliebige besondere Fälle im höchsten Grade lästig und mit sehr viel Schwierigkeiten verknüpft ist. Nachdem ich nämlich die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit bestimmt hatte, was zwar keiner Schwierigkeit unterworfen ist, musste ich zu jeder Zeit so wohl die Lage der Drechungsaxe, als auch die Geschwindigkeit bestimmen. Hierauf war es aber besonders nothwendig, die Lage der drei Hauptaxen anzugeben, wozu eine grosse Menge veränderlicher Grössen in die Rechnung eingeführt werden musste.

Diese Mängel scheint auch der sehr scharfsinnige Geometer la Grange wahrgenommen zu haben, indem er diesen Gegenstand in den Abhandlungen der preussischen Akademie für das Jahr 1773 nach einer andern Methode zu behandeln übernommen hat, deren sehr tiefe Gedanken ich zwar mit der grössten Begierde zu durchschauen versucht habe, wobei ich es aber doch nicht von mir habe erlangen können, alle seine Rechnungen zu durchdringen. Es schreckte mich nämlich sogleich der erste Lehnsatz so ab, dass ich wegen meiner mangelhaften Augen auf keine Weise hoffen kann, alle analytischen Kunstgriffe, deren er sich bedient hat, zu durchforschen.

§. 990. Neuerdings unternahm ich es aber, den geometrischen Theil, worauf diese Untersuchung sich stützt, genauer zu entwickeln und habe die ausgezeichnete Eigenschaft bewiesen, dass, auf welche Weise auch immer ein starrer Körper aus seinem anfänglichen Zustande in einen andern beliebigen versetzt werden mag, in ihm immer eine solche Axe angegeben werden kann, deren Richtung in beiden Zuständen unverändert bleibt. Es schien mir nun sogleich, dass diese sehr schöne Eigenschaft ein ausgezeichnetes Hülfsmittel darbieten werde, um alles die Bewegung solcher Körper Betreffende viel leichter und ohne ein so grosses Gemenge veränderlicher Grössen bestimmen zu können. Sobald man nämlich die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit bestimmt haben wird, suche man diejenige Axe des Körpers, welche im versetzten Zustande dieselbe Richtung wie im anfänglichen beibehält; hierauf aber suche man den Winkel, um welchen der Körper sich inzwischen um diese Axe gedreht hat. Auf diese Weise wird man zu jeder Zeit die Lage des Körpers vollständig kennen lernen, so dass die ganze Untersuchung auf die Bestimmung dieser Axe für jede Zeit nebst dem Umdrehungswinkel reducirt wird; ich will daher hier diese Idee genauer verfolgen.

§. 991. Wir betrachten demnach den Körper in seinem anfänglichen Zustande und nehmen in ihm einen beliebigen Punkt an, durch welchen wir drei feste und auf einander normale Axen ziehen. In Bezug auf diese kann man die Lage der einzelnen Elemente des Körpers, nach gewöhnlicher Weise durch je drei Coordinaten, bestimmen. Jenen Punkt habe ich zwar in meiner Abhandlung im Mittelpunkte der Trägheit angenommen, jetzt aber bemerke ich, dass es nichts verschlägt, wenn man ihn an einer andern beliebigen Stelle annimmt. Ferner ist es auch nicht nothwendig, dass jene drei Axen zugleich Hauptaxen des Körpers sind, sondern sie bleiben ebenso, wie jener Punkt, ganz unserer Willkühr überlassen. Indessen wird es angenehm sein hier zu bemerken, dass die folgenden Rechnungen weit leichter und eleganter werden, wenn man jenen Punkt im Mittelpunkte der Trägheit annimmt und zugleich die drei Axen Hauptaxen, nämlich für den anfänglichen Zustand des Körpers sind. Hierauf denke man sich aber aus jenem Punkte wie aus einem Mittelpunkte eine Kugel um den Körper beschrieben, welche mit dem letztern fest zusammenhänge und mit ihm zugleich beweglich sei, ihr Radius werde durch die

Einheit bezeichnet. Auf diese Weise können alle Untersuchungen auf die sphärische Trigonometrie reducirt und so alle Rechnungen viel leichter abgemacht werden.

§. 992. (Figur 135.) Es stelle daher das sphärische Dreieck ABC den achten Theil einer Kugel dar, in deren Mittelpunkte man sich den Buchstaben I geschrieben denke; die von dort aus gezogenen geraden Linien IA, IB und IC stellen jene drei festen Axen dar, so dass die Bogen AB, BC und CA Quadranten sind, welche unter sich die rechten Winkel A, B und C bilden. Um hierauf die Lage der einzelnen Elemente des Körpers kennen zu lernen, denke man sich durch ein beliebiges derselben den Radius IZ gezogen und ziehe aus dem Punkte Z die drei Bogen ZA, ZB und ZC, welche wir respective ζ, η und θ nennen. Setzt man nun den Abstand des Elements des Körpers vom Mittelpunkte $I = s$, so werden die drei, den Axen IA, IB und IC parallelen Coordinaten $s\cos\zeta$, $s\cos\eta$ und $s\cos\theta$, wodurch also die Lage eines jeden Elementes im anfänglichen Zustande nach gewohnter Weise bestimmt werden wird. Es wird aber immer nach der Natur des sphärischen Dreiecks ABC

$$\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1;$$

ausserdem haben wir folgende Bestimmungen uns zu merken:

$$\cos BAZ = \frac{\cos\eta}{\sin\zeta}, \quad \cos ABZ = \frac{\cos\zeta}{\sin\eta}, \quad \cos BCZ = \frac{\cos\eta}{\sin\theta},$$

$$\sin BAZ = \frac{\cos\theta}{\sin\zeta}, \quad \sin ABZ = \frac{\cos\theta}{\sin\eta} \text{ und } \sin BCZ = \frac{\cos\zeta}{\sin\theta},$$

Ferner wird

$$\cos AZB = -\frac{\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\cos\eta}, \qquad \cos BZC = -\frac{\cos\eta\cos\theta}{\sin\eta\sin\theta},$$

$$\cos CZA = -\frac{\cos\zeta\cos\theta}{\sin\zeta\sin\theta}, \qquad \sin AZB = +\frac{\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta},$$

$$\sin BZC = +\frac{\cos\zeta}{\sin\eta\sin\theta} \text{ und } \sin CZA = +\frac{\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}.$$

§. 993. Nachdem wir diese Bestimmungeu für den anfänglichen Zustand gemacht haben, betrachten wir denjenigen Zustand des Körpers, in welchem er sich nach Verlauf der Zeit t befinden wird. Es mag nun zuerst der Mittelpunkt der Trägheit I nach einem beliebigen Orte versetzt sein, da die Bestimmung desselben keine Schwierigkeit verursacht; so mag sein Ort, wenigstens in Gedanken, nach dem Punkte I versetzt werden und zugleich mit ihm der ganze Körper, und zwar mit

sich selbst paralleler Bewegung. Da es nun in der versetzten Lage immer einen solchen Radius gibt, dessen Richtung dieselbe als im anfänglichen Zustande ist, so sei O auf der Oberfläche der Kugel derjenige Punkt, welcher so wohl in der anfänglichen als auch in der versetzten Stellung nach der Zeit t denselben Ort einnimmt, so dass der Radius dieselbe Richtung in den beiden Stellungen des Körpers einhält. Um seine Lage zu bestimmen, ziehe man die Bogen $OA=\alpha$, $OB=\beta$ und $OC=\gamma$, welche man als bestimmte Functionen der Zeit t betrachten muss, aus ihnen erlangen wir folgende Bestimmungen:

$$\cos OAB=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\quad \cos ABO=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta},\quad \cos BCO=\frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

$$\sin OAB=\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha},\quad \sin ABO=\frac{\cos\gamma}{\sin\beta} \text{ und } \sin BCO=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Ferner wird

$$\cos AOB=-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \cos BOC=-\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\cos COA=-\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},\quad \sin AOB=+\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\sin BOC=+\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} \text{ und } \sin COA=+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

Ausserdem ist, wie vorher

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1.$$

§. 994. Es sei nun φ jener Winkel, durch welchen der ganze Körper in der Zeit t um den Radius IO gedreht worden ist, so dass φ als eine Function der Zeit t betrachtet werden muss, während die zuerst eingeführten Bogen ζ, η und θ nur von der Veränderlichkeit eines jeden Elementes des Körpers, worauf sie sich beziehen, abhängig sind. Der Punkt der Kugel, welcher sich anfangs in Z befand, wird daher nun nach Verlauf der Zeit t so nach z versetzt sein, dass, wenn man die Bogen OZ und Oz zieht, der Winkel $ZOz=\varphi$ wird, wobei $Oz=OZ$ ist. Wenn man demnach hieraus die Abstände dieses Punktes z von den Ecken A, B und C sucht, so wird die wahre Lage bekannt, in welche der Radius des Körpers IZ aus der anfänglichen Lage nach Verlauf der Zeit t versetzt worden ist. Um daher die Bewegung des Körpers vollständig kennen zu lernen, kommt die ganze Arbeit darauf hinaus, dass man für jede verflossene Zeit $=t$ so wohl die Lage des Punktes O oder die Bogen α, β und γ, als auch den Winkel $ZOz=\varphi$ bestimme; indem auf diese Weise zu jeder Zeit die wahre Lage der einzelnen Elemente des Körpers angegeben werden kann.

§. 995. (Fig. 136.) Da wir also vor allem die Abstände des Punktes z von den Ecken A, B und C bestimmen müssen, wollen wir zuerst den Abstand Az suchen. Damit diess leichter geschehen könne, wollen wir in der Figur keine andere Linie, als die auf dieses Ziel sich beziehenden darstellen. Zuerst müssen wir die Grösse des Bogens OZ aus dem Dreieck OAZ suchen, in welchem wir die Bogen $OA=\alpha$ und $AZ=\zeta$ haben. Ausserdem wird man aber den Winkel OAZ durch die Winkel BAO und BAZ bestimmen können, indem $OAZ=BAO-BAZ$, also

$$\sin OAZ = \sin BAO \cos BAZ - \cos BAO \sin BAZ = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta},$$

$$\cos OAZ = \cos BAO \cos BAZ + \sin BAO \sin BAZ = \frac{\cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta}$$

und
$$\operatorname{tg} OAZ = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta}$$

wird. Nachdem wir diess bemerkt haben, findet man nach der Lehre der sphärischen Trigonometrie

$$\cos OZ = \cos\alpha\cos\zeta + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta$$

und
$$\operatorname{tg} AOZ = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\sin\alpha^2\cos\zeta - \cos\alpha(\cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta)}.$$

§. 996. Setzen wir aber zur Abkürzung den Winkel $OAZ=A$, so dass

$$\sin A = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta},$$

$$\cos A = \frac{\cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta}$$

und
$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta}$$

wird; so erhalten wir zur Bestimmung des gesuchten Bogens $OZ=Z$ und des Winkels $AOZ=O$

$$\cos Z = \cos\alpha\cos\zeta + \sin\alpha\sin\zeta\cos A$$

und
$$\operatorname{tg} O = \frac{\sin\zeta\sin A}{\sin\alpha\cos\zeta - \cos\alpha\sin\zeta\cos A}.$$

Substituirt man hier statt $\sin A$ und $\cos A$ die gefundenen Werthe, so erhält man, wie oben

$$\cos Z = \cos\alpha\cos\zeta + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta$$

und
$$\operatorname{tg} O = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\theta}{\sin\alpha^2\cos\zeta - \cos\alpha(\cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta)}.$$

§. 997. Nachdem wir diess gefunden haben, wollen wir das

sphärische Dreieck AOz angreifen, in welchem wir die zwei Seiten $OA=\alpha$ und $Oz=Z$, nebst dem zwischenliegenden Winkel $AOz=O+\varphi$ kennen und woraus wir schliessen, dass

$$\cos Az = \cos\alpha\cos Z + \sin\alpha\sin Z\cos(O+\varphi)$$

ist. Dieser Ausdruck wird nun reducirt auf den folgenden

$$\cos Az = \cos\alpha\cos Z + \sin\alpha\sin Z\cos O\cos\varphi - \sin\alpha\sin Z\sin O\sin\varphi,$$

wobei wir $\cos Z$ schon bestimmt haben. Wir haben aber sowohl $\sin Z$, als auch $\sin O$ und $\cos O$ nicht entwickelt, und es ist ausserdem nicht dienlich, diese Grössen unmittelbar aus den gefundenen abzuleiten, weil wir zu Wurzelzeichen kommen würden, bei denen es ungewiss wäre, ob wir sie positiv oder negativ zu nehmen hätten. Es wird daher angemessen sein, diese Entwickelung auf die folgende Weise anzustellen.

§. 998. Aus dem Dreieck AOZ leiten wir sogleich die Gleichung

$$\sin Z\sin O = \sin A\sin\zeta$$

oder

$$\sin O = \frac{\sin A\sin\zeta}{\sin Z}$$

ab und dividiren wir dieselbe durch $\operatorname{tg} O$, so erhalten wir

$$\cos O = \frac{\sin\alpha\cos\zeta - \cos\alpha\sin\zeta\cos A}{\sin Z}.$$

Hieraus ergeben sich demnach von selbst eben jene Formeln, deren wir bedürfen, nämlich $\sin Z\sin O$ und $\sin Z\cos O$, und wenn wir daher statt $\cos Z$ den gefundenen Werth substituiren, so gelangen mir zu dem folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\cos Az = {} & \cos\alpha^2\cos\zeta + \sin\alpha\cos\alpha\sin\zeta\cos A + \sin\alpha^2\cos\varphi\cos\zeta \\ & - \sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi\sin\zeta\cos A - \sin\alpha\sin\varphi\sin\zeta\sin A.\end{aligned}$$

Eliminirt man aber den Winkel A, so nimmt dieser Ausdruck die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\cos Az = {} & \cos\alpha^2\cos\zeta + \cos\alpha\cos\beta\cos\eta + \cos\alpha\cos\gamma\cos\theta + \sin\alpha^2\cos\varphi\cos\zeta \\ & - \cos\alpha\cos\varphi\cos\beta\cos\eta - \cos\alpha\cos\varphi\cos\gamma\cos\theta - \sin\varphi\cos\gamma\cos\eta \\ & + \sin\varphi\cos\beta\cos\theta.\end{aligned}$$

§. 999. Dieser Ausdruck ist um so bemerkenswerther, als er nicht nur mit keinen Brüchen belastet ist, sondern auch in in den einzelnen Gliedern nur Cosinusse der drei Winkel ζ, η und θ vorkommen, während die Sinusse ganz ausgeschlossen sind. Aus diesem Grunde wollen wir die einzelnen Glieder nach den erwähnten drei Cosinussen ordnen und erhalten so die folgende Form:

$$\begin{aligned}\cos Az = {} & \cos\zeta[\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi] \\ & + \cos\eta[\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta\cos\varphi - \cos\gamma\sin\varphi] \\ & + \cos\theta[\cos\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\cos\gamma\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi].\end{aligned}$$

Hierbei wird es angemessen sein zu bemerken, dass die Winkel ζ, η und θ sich nur auf die anfängliche Lage beziehen, dass durch sie der Ort eines jeden Elementes des Körpers bestimmt wird und daher nicht von der Zeit abhängt; während dagegen die übrigen Winkel α, β, γ und φ nur Functionen der Zeit t sind.

§. 1000. Nachdem wir diese Entwickelung für den Bogen Az angestellt haben, würde es durchaus überflüssig sein, für die zwei übrigen Bogen Bz und Cz eine ähnliche Untersuchung anzustellen. Da nämlich die drei Punkte A, B und C unter sich verwechselt werden können, so ist es nur nothwendig, dass wir sowohl die Winkel ζ, η und θ, als auch α, β und γ nach der Reihenfolge verrücken, während inzwischen der Winkel φ als derselbe beibehalten wird. Auf diese Weise finden wir daher die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\cos Bz = & \cos\eta[\cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi] \\ & + \cos\theta[\cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi] \\ & + \cos\zeta[\cos\beta\cos\alpha - \cos\beta\cos\alpha\cos\varphi + \cos\gamma\sin\varphi]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos Cz = & \cos\theta[\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\varphi] \\ & + \cos\zeta[\cos\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi] \\ & + \cos\eta[\cos\gamma\cos\beta - \cos\gamma\cos\beta\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi].\end{aligned}$$

§. 1001. Setzen wir nun der Kürze wegen, zur Bestimmung der versetzten Lage des Punktes Z, die Bogen $Az = \zeta'$, $Bz = \eta'$ und $Cz = \theta'$, durch deren Werthe die Coordinaten zur Bestimmung dieses Punktes hierauf gebildet werden; so wollen wir die Cosinusse dieser drei Bogen hier vereint zur Ansicht stellen:

$$\begin{aligned}\cos\zeta' = & \cos\zeta[\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi] \\ & + \cos\eta[\cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi] \\ & + \cos\theta[\cos\alpha\cos\gamma(1 - \cos\varphi) + \cos\beta\sin\varphi], \\ \cos\eta' = & \cos\eta[\cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi] \\ & + \cos\theta[\cos\beta\cos\gamma(1 - \cos\varphi) - \cos\alpha\sin\varphi] \\ & + \cos\zeta[\cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi], \\ \cos\theta' = & \cos\theta[\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\varphi] \\ & + \cos\zeta[\cos\alpha\cos\gamma(1 - \cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi] \\ & + \cos\eta[\cos\beta\cos\gamma(1 - \cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi].\end{aligned}$$

§. 1002. Es wird nun der Mühe Werth sein, einige hauptsächliche Lagen des Punktes Z zu betrachten. Nehmen wir daher diesen zuerst im Punkte A selbst an, so das $\zeta = 0$ und $\eta = \theta = 90^0$ ist; so erhalten wir zur Bestimmung der Lage des Punktes z'

$$\cos\zeta' = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi = 1 - \sin\alpha^2(1-\cos\varphi)$$
$$\cos\eta' = \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi$$
$$\cos\theta' = \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi.$$

Auf ähnliche Weise wird, wenn man Z in B annimmt, so dass $\zeta = \theta = 90^0$ und $\eta = 0$ ist, zur Bestimmung der Lage des Punktes z'

$$\cos\zeta' = \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi$$
$$\cos\eta' = \cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi = 1 - \sin\beta^2(1-\cos\varphi)$$
$$\cos\theta' = \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi.$$

Nehmen wir aber endlich den Punkt Z in C an, so wird der Ort des Punktes z' so bestimmt, dass wir haben

$$\cos\zeta' = \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\beta\sin\varphi$$
$$\cos\eta' = \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\alpha\sin\varphi$$
$$\cos\theta' = \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\varphi = 1 - \sin\gamma^2(1-\cos\varphi).$$

§. 1003. Diese 9 Formeln sind desshalb aller Beachtung werth, weil aus ihnen die allgemeinen Formeln für $\cos\zeta'$, $\cos\eta'$ und $\cos\theta'$ auf so schöne Weise zusammengesetzt werden. Offenbar ist nämlich die allgemeine Formel für $\cos\zeta'$ aus den eben gefundenen drei besonderen Formeln desselben zusammengesetzt, auf ähnliche Weise verhalten sich die allgemeinen Formeln von $\cos\eta'$ und $\cos\theta'$ zu den drei besondern Formeln eines jeden dieser Cosinusse.

§. 1004. Diese ausgezeichnete Eigenschaft, welche zwischen den Versetzungen der Punkte A, B, C und eines andern beliebigen Z eintritt, ist im höchsten Grade bemerkenswerth und verdient durchaus sorgfältiger erwogen zu werden. Daher wird es angemessen sein, sie in dem folgenden ganz allgemeinen Lehrsatze zu umfassen, dessen Wahrheit aus den eben ausgeführten Rechnungen genügend einleuchtet, während er sonst die tiefsten Untersuchungen erfordern würde.

Lehrsatz.

§. 1005. (Fig. 137.) Wird eine Kugel um ihren festen Mittelpunkt auf beliebige Weise bewegt, so dass die drei Punkte A, B und C, welche auf ihrer Oberfläche um Quadranten von einander abstehen, nach den Punkten a, b und c versetzt werden; so wird ein anderer beliebiger Punkt Z auf solche Weise nach z versetzt werden, dass man hat:

$$\text{I.}\quad \cos zA = \cos ZA\cos aA + \cos ZB\cos aB + \cos ZC\cos aC$$
$$\text{II.}\quad \cos zB = \cos ZB\cos bB + \cos ZC\cos bC + \cos ZA\cos bA$$
$$\text{III.}\quad \cos zC = \cos ZC\cos cC + \cos ZA\cos cA + \cos ZB\cos cB.$$

§. 1006. Weil man die, durch die grossen und kleinen Buchstaben bezeichneten, Punkte mit einander vertauschen kann, so dass die kleinen Buchstaben der ursprünglichen, die grossen aber der veränderten Lage angehören; so werden auch die folgenden Gleichungen mit der Wahrheit übereinstimmen:

$$\text{I. } \cos Za = \cos za \cos Aa + \cos zb \cos Ab + \cos zc \cos Ac$$
$$\text{II. } \cos Zb = \cos zb \cos Bb + \cos zc \cos Bc + \cos za \cos Ba$$
$$\text{III. } \cos Zc = \cos zc \cos Cc + \cos za \cos Ca + \cos zb \cos Cb.$$

Anwendung dieser Formeln auf rechtwinklige Coordinaten.

§. 1007. (Fig. 138.) Nun wollen wir alle die bisher gefundenen Formeln auf je drei, den festen Richtungen IA, IB und IC parallele Coordinaten anwenden; und zwar betrachten wir zuerst für die anfängliche Stellung ein beliebiges Element des Körpers in Z. Zur Bestimmung seines Ortes stellen wir die drei Coordinaten $IX = X$, $XY = Y$ und $YZ = Z$ auf, und setzen seinen Abstand vom Mittelpunkte $I = s$. Offenbar wird, wenn man diesen Punkt Z auf dem Radius der Kugel annimmt, welcher vorher durch den Punkt Z ging,

$$X = s\cos\zeta,\quad Y = s\cos\eta \text{ und } Z = s\cos\theta,$$

also
$$s^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Auf ähnliche Weise werden für jenen Radius IO, dessen Richtung in der versetzten Lage nicht verändert wird, die drei Coordinaten sich zu einander wie die Cosinusse der Winkel α, β und γ verhalten, es ist aber nöthig, sie in der Figur auszudrücken.

§. 1008. Nach Verlauf der Zeit t, welche wir immer in Secunden ausgedrückt annehmen, sei der Mittelpunkt des Körpers I nach i versetzt, zu dessen Bestimmung wir die Coordinaten $If = f$, $fi = g$ und $ig = h$ annehmen. Der Punkt aber, welcher sich vorher in Z befand, liege jetzt in z, dessen Coordinaten $Ix = x$, $xy = y$ und $yz = z$ gesetzt werden. Da nun der letztere Punkt sich eben so hinsichtlich des Punktes i verhält, als in den vorhergehenden Figuren der Punkt Z hinsichtlich des Mittelpunktes I, so dass der Abstand $iz = s$ ist; so muss offenbar wie vorher

$$x - f = s\cos\zeta',\quad y - g = s\cos\eta' \text{ und } z - h = s\cos\theta'$$

sein.

§. 1009. Substituiren wir statt dieser Cosinusse ihre eben

gefundenen Werthe, so erhalten wir, weil $s\cos\zeta = X$, $s\cos\eta = Y$ und $s\cos\theta = Z$ ist, die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} x = f &+ X[\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi] \\ &+ Y[\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi] \\ &+ Z[\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\beta\sin\varphi] \\ y = g &+ Y[\cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi] \\ &+ Z[\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\alpha\sin\varphi] \\ &+ X[\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi] \\ z = h &+ Z[\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\varphi] \\ &+ X[\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi] \\ &+ Y[\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi] \end{aligned}$$

§. 1010. Weil diese Ausdrücke aber zu complicirt sind, setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} x &= f + FX + F'Y + F''Z \\ y &= g + GX + G'Y + G''Z \\ z &= h + HX + H'Y + H''Z \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} F &= \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi \\ G &= \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi \\ H &= \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi \\ \hline F' &= \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi \\ G' &= \cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi \\ H' &= \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi \\ \hline F'' &= \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\beta\sin\varphi \\ G'' &= \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\alpha\sin\varphi \\ H'' &= \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\varphi. \end{aligned}$$

§. 1011. Da nun auch jetzt der Abstand *iz* gleich dem Abstande *IZ* sein muss, also

$$(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2) = X^2 + Y^2 + Z^2$$

ist; so findet man, indem man die Rechnung anstellt, dass in der Wirklichkeit die Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} F^2 + G^2 + H^2 &= 1 \\ F'^2 + G'^2 + H'^2 &= 1 \\ F''^2 + G''^2 + H''^2 &= 1 \\ FF' + GG' + HH' &= 0 \\ F'F'' + G'G'' + H'H'' &= 0 \\ FF'' + GG'' + HH'' &= 0 \end{aligned}$$

Hierüber sind wir in hinreichender Gewissheit, wenn auch die Rechnung nicht wenig lästig ist.

Allgemeine Formeln für die Bewegung starrer durch beliebige Kräfte angetriebener Körper.

§. 1012. Betrachten wir daher einen beliebigen starren Körper, in welchem nach Belieben ein bestimmter Punkt I als Mittelpunkt angenommen ist, dessen drei feste Richtungen IA, IB und IC in der anfänglichen Lage sich wechselseitig normal schneiden und in Beziehung auf welche die Oerter der einzelnen Elemente des Körpers durch die drei Coordinaten X, Y und Z bestimmt werden. Es bezeichne nun dM das im Punkte Z gelegene Element des Körpers, so dass der Buchstabe M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet. Hierbei bemerke man wohl, dass diese drei Veränderlichen X, Y und Z nur die anfängliche Stellung des Körpers betreffen und auf keine Weise von der Zeit t abhängig sind.

§. 1013. Dieselben sollen für die anfängliche Stellung festgesetzt sein, und wir denken uns, dass dem Körper eine beliebige Bewegung beigebracht worden sei. Zu diesem Ende setzen wir voraus, dass nach Verlauf der Zeit t der Mittelpunkt I nach i, das Element dM aber, welches wir als im Punkte Z befindlich betrachtet haben, nach dem Punkte z versetzt worden sei. Der Ort des letztern werde durch die oben angegebenen Coordinaten x, y und z, der Ort des Mittelpunktes i aber durch die Coordinaten f, g und h dargestellt. Hier werden demnach nicht nur die drei Grössen f, g und h bestimmte Functionen der Zeit sein, welche sowohl durch die dem Körper beigebrachte Bewegung, als auch durch die antreibenden Kräfte bestimmt werden müssen; sondern es werden auch die Buchstaben F, G und H nebst ihren abgeleiteten als solche Functionen anzusehen sein, indem sie nämlich durch die Winkel α, β, γ und φ, welche Functionen der Zeit sind, ausgedrückt werden. Die ganze Arbeit kommt nämlich darauf hinaus, dass wir sowohl durch die im Anfange beigebrachte Bewegung, als auch durch die antreibenden Kräfte zu jeder Zeit die Werthe der Buchstaben f, g und h, wie auch die Werthe der Winkel α, β, γ und φ ausdrücken; hat man diese gefunden, so wird die Bewegung des Körpers vollkommen bekannt.

§. 1014. Befindet sich nun ein beliebiges allgemein betrachtetes Element des Körpers im Punkte z, so wird sein Ort durch veränderliche Grössen doppelter Art ausgedrückt; man bezieht nämlich die drei X, Y und Z auf den Ort Z, welchen das Ele-

ment in der anfänglichen Stellung eingenommen hat, die übrigen aber sind Functionen der Zeit. Durch die Veränderlichkeit dieser letztern wird man daher sowohl die Bewegung dieses Elementes, als auch seine Beschleunigung bestimmen können, was sehr bequem geschieht, indem man seine Bewegung nach den drei festen Richtungen *IA*, *IB* und *IC* zerlegt, wodurch man zuerst die drei Geschwindigkeiten desselben Elementes und hierdurch ferner auch die Beschleunigungen nach denselben Richtungen wird bestimmen können. Nimmt man daher allein die Zeit t als veränderlich an, so werden die drei Formeln $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ jene drei Geschwindigkeiten, die zweiten Differentiale $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ aber die Beschleunigungen angeben.

§. 1015. Wenn wir nun auf ähnliche Weise alle Kräfte, durch welche der Körper in dieser Zeit angetrieben wird, nach diesen drei Richtungen zerlegen und hierauf aus ihrer Vereinigung für die Richtungen *IA*, *IB* und *IC* die Kräfte P, Q und R entspringen; so müssen nach den Principien der Bewegung nothwendig diese Kräfte den Summen aller beschleunigenden Kräfte, welche aus der Verbindung aller Elemente dM des Körpers entspringen, gleich sein. Wenn nämlich g die Fallhöhe schwerer Körper in Einer Secunde bezeichnet, so setzen wir statt $2g$ den Buchstaben i, weil der Buchstab g schon als eine Function der Zeit in die Rechnung eintritt, und erhalten so die folgenden Gleichungen:

$$\int dM \cdot \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iP$$
$$\int dM \cdot \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = iQ$$
$$\int dM \cdot \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = iR.$$

Hier bezieht sich das Integralzeichen nur auf die Veränderlichen X, Y und Z, so dass bei diesen Integrationen die Zeit t als constant betrachtet werden muss, wenn sie auch in den Differentialformeln allein als veränderlich angenommen ist. Ausserdem müssen aber auch alle Momente der beschleunigenden Kräfte in Bezug auf die drei festen Axen, zusammengenommen den Momenten gleich sein, welche aus allen antreibenden Kräf-

ten in Bezug auf dieselben Axen abgeleitet werden. Wir bezeichnen daher diese Momente, welche aus allen antreibenden Kräften für die drei Axen *IA*, *IB* und *IC* hervorgehen, durch die Buchstaben *S*, *T* und *U*; so dass, wenn wir diese Grössen durch *i* multipliciren, sie der Summe aller elementaren Momente, welche die einzelnen beschleunigenden Kräfte ergeben, gleichgesetzt werden müssen.

§. 1016. Da nun am Elemente dM, welches wir uns im Punkte z denken, die nach der Richtung *IA* wirkende Kraft $= dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ angebracht ist, so entspringt aus ihr kein Moment in Bezug auf diese Axe; für die Axe *IB* wird aber das Moment dieser Kraft $= zdM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ und für die Axe *IC* $= ydM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ entstehen. Auf ähnliche Weise entspringt aus der, längs der Richtung *IB* beschleunigenden, Kraft $= dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, für die Axe *IA* das Moment $= zdM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ und für die Axe *IC* $= xdM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$. Endlich entspringt aus der längs *IC* beschleunigenden Kraft $= dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ für die Axe *IA* das Moment $= ydM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ und für die Axe *IB* $= xdM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$. Hiernach haben wir für jede Axe zwei elementare Momente, welche nach entgegengesetzten Seiten zu wirken streben, wesshalb für die Axe *IA* die Summe aller elementaren Momente

$$= \int zdM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - \int ydM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = iS$$

sein wird. Auf dieselbe Weise erhalten wir für die Axe *IB* die Gleichung

$$\int xdM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \int zdM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iT$$

und die dritte Gleichung für die Axe *IC*

$$\int ydM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - \int xdM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = iU.$$

§. 1017. Auf diese Weise haben wir 6 Gleichungen erlangt, welche wir hier in Verbindung zur Ansicht aufstellen wollen:

$$\text{I.} \quad \int dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iP$$

$$\text{II.}\quad \int dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=iQ$$

$$\text{III.}\quad \int dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=iR$$

$$\text{IV.}\quad \int z\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)-\int y\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=iS$$

$$\text{V.}\quad \int x\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)-\int z\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=iT$$

$$\text{VI.}\quad \int y\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)-\int x\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=iU.$$

In diesen Integralformeln werden allein die grossen Buchstaben X, Y und Z für veränderlich gehalten, während dagegen in den Differentialformeln nur die von der Zeit abhängigen Glieder als veränderliche angesehen werden.

§. 1018. Um nun diese Formeln gehörig zu entwickeln, müssen wir für die drei Coordinaten x, y und z die zusammengezogenen und im §. 1010. gegebenen Werthe anwenden, und weil in den Differentialformeln die Grössen X, Y und Z als constant betrachtet werden, so erhalten wir:

$$\frac{ddx}{dt^2}=\left(\frac{ddf}{dt^2}\right)+X\left(\frac{ddF}{dt^2}\right)+Y\left(\frac{ddF'}{dt^2}\right)+Z\left(\frac{ddF''}{dt^2}\right)$$

$$\frac{ddy}{dt^2}=\left(\frac{ddg}{dt^2}\right)+X\left(\frac{ddG}{dt^2}\right)+Y\left(\frac{ddG'}{dt^2}\right)+Z\left(\frac{ddG''}{dt^2}\right)$$

$$\frac{ddz}{dt^2}=\left(\frac{ddh}{dt^2}\right)+X\left(\frac{ddH}{dt^2}\right)+Y\left(\frac{ddH'}{dt^2}\right)+Z\left(\frac{ddH''}{dt^2}\right).$$

Man sieht aber leicht ein, dass, wenn wir diese Werthe in die obigen 6 Gleichungen substituiren wollen, sich sehr weitläufige Formeln ergeben werden, welche hier anzuwenden jedoch der Mühe werth sein wird.

§. 1019. Substituiren wir demnach wirklich statt der Buchstaben x, y und z und der Formeln $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ die vorher entwickelten Werthe, so werden unsere 6 Gleichungen auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\text{I.}\quad iP=\left(\frac{ddf}{dt^2}\right)\int dM+\left(\frac{ddF}{dt^2}\right)\int X\,dM+\left(\frac{ddF'}{dt^2}\right)\int Y\,dM+\left(\frac{ddF''}{dt^2}\right)\int Z\,dM;$$

$$\text{II.}\quad iQ=\left(\frac{ddg}{dt^2}\right)\int dM+\left(\frac{ddG}{dt^2}\right)\int XdM+\left(\frac{ddG'}{dt^2}\right)\int YdM$$
$$+\left(\frac{ddG''}{dt^2}\right)\int ZdM;$$

$$\text{III.}\quad iR=\left(\frac{ddh}{dt^2}\right)\int dM+\left(\frac{ddH}{dt^2}\right)\int XdM+\left(\frac{ddH'}{dt^2}\right)\int YdM$$
$$+\left(\frac{ddH''}{dt^2}\right)\int ZdM;$$

$$\text{IV.}\quad iS=\left(\frac{hddg-gddh}{dt^2}\right)\int dM$$
$$+\left(\frac{hddG-Gddh}{dt^2}\right)\int XdM+\left(\frac{Hddg-gddH}{dt^2}\right)\int XdM$$
$$+\left(\frac{hddG'-G'ddh}{dt^2}\right)\int YdM+\left(\frac{H'ddg-gddH'}{dt^2}\right)\int YdM$$
$$+\left(\frac{hddG''-G''ddh}{dt^2}\right)\int ZdM+\left(\frac{H''ddg-gddH''}{dt^2}\right)\int ZdM$$
$$+\left(\frac{HddG-GddH}{dt^2}\right)\int X^2dM+\left(\frac{H'ddG'-G'ddH'}{dt^2}\right)\int Y^2dM$$
$$+\left(\frac{H''ddG''-G''ddH''}{dt^2}\right)\int Z^2dM$$
$$+\left(\frac{H'ddG-GddH'}{dt^2}\right)\int XYdM+\left(\frac{HddG'-G'ddH}{dt^2}\right)\int XYdM$$
$$+\left(\frac{H'ddG''-G''ddH'}{dt^2}\right)\int YZdM+\left(\frac{H''ddG'-G'ddH''}{dt^2}\right)\int YZdM$$
$$+\left(\frac{HddG''-G''ddH}{dt^2}\right)\int XZdM+\left(\frac{H''ddG-GddH''}{dt^2}\right)\int XZdM;$$

$$\text{V.}\quad iT=\left(\frac{fddh-hddf}{dt^2}\right)\int dM$$
$$+\left(\frac{fddH-Hddf}{dt^2}\right)\int XdM+\left(\frac{Fddh-hddF}{dt^2}\right)\int XdM$$
$$+\left(\frac{fddH'-H'ddf}{dt^2}\right)\int YdM+\left(\frac{F'ddh-hddF'}{dt^2}\right)\int YdM$$
$$+\left(\frac{fddH''-H''ddf}{dt^2}\right)\int ZdM+\left(\frac{F''ddh-hddF''}{dt^2}\right)\int ZdM$$
$$+\left(\frac{FddH-HddF}{dt^2}\right)\int X^2dM+\left(\frac{F'ddH'-H'ddF'}{dt^2}\right)\int Y^2dM$$
$$+\left(\frac{F''ddH''-H''ddF''}{dt^2}\right)\int Z^2dM$$
$$+\left(\frac{FddH'-H'ddF}{dt^2}\right)\int XYdM+\left(\frac{F'ddH-HddF'}{dt^2}\right)\int XYdM$$

$$+\left(\frac{F'ddH''-H''ddF'}{dt^2}\right)\int YZdM+\left(\frac{F''ddH'-H'ddF''}{dt^2}\right)\int YZdM$$
$$+\left(\frac{FddH''-H''ddF}{dt^2}\right)\int XZdM+\left(\frac{F''ddH-HddF''}{dt^2}\right)\int XZdM;$$

$$\text{VI. } iU=\left(\frac{gddf-fddg}{dt^2}\right)\int dM$$
$$+\left(\frac{gddF-Fddg}{dt^2}\right)\int XdM+\left(\frac{Gddf-fddG}{dt^2}\right)\int XdM$$
$$+\left(\frac{gddF'-F'ddg}{dt^2}\right)\int YdM+\left(\frac{G'ddf-fddG'}{dt^2}\right)\int YdM$$
$$+\left(\frac{gddF''-F''ddg}{dt^2}\right)\int ZdM+\left(\frac{G''ddf-fddG''}{dt^2}\right)\int ZdM$$
$$+\left(\frac{GddF-FddG}{dt^2}\right)\int X^2dM+\left(\frac{G'ddF'-F'ddG'}{dt^2}\right)\int Y^2dM$$
$$+\left(\frac{G''ddF''-F''ddG''}{dt^2}\right)\int Z^2dM$$
$$+\left(\frac{GddF'-F'ddG}{dt^2}\right)\int XYdM+\left(\frac{G'ddF-FddG'}{dt^2}\right)\int XYdM$$
$$+\left(\frac{G'ddF''-F''ddG'}{dt^2}\right)\int YZdM+\left(\frac{G''ddF'-F'ddG''}{dt^2}\right)\int YZdM$$
$$+\left(\frac{GddF''-F''ddG}{dt^2}\right)\int XZdM+\left(\frac{G''ddF-FddG''}{dt^2}\right)\int XZdM.$$

§. 1020. In diesen 6 Gleichungen müssen die Integralformeln, welche sich nur auf den anfänglichen Zustand des Körpers beziehen, vor allem über die ganze Masse des letztern ausgedehnt werden; hierdurch werden statt ihrer bestimmte constante Grössen in die Rechnung eintreten, welche man durch die Figur und Natur eines jeden Körpers bestimmen muss. So ergibt sich für die ersten Glieder sogleich $\int dM = M$, wo M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet. Hat man nun diese Constanten statt der Integralformeln in unsere Gleichungen eingeführt, so werden sich in denselben nur noch solche Veränderlichen befinden, welche allein von der Zeit t abhängig sind; man kann nämlich immer annehmen, dass alle Kräfte, welche nach unserer Voraussetzung den Körper antreiben, zu jeder Zeit gegeben sind. Weil aber diese 6 Gleichungen so sehr zusammengesetzt sind, besonders wenn wir statt der Buchstaben F, G, H etc. ihre Werthe substituiren wollten, so wird man im allgemeinen nichts ausserdem hieraus schliessen können.

§. 1021. Der Grund, warum diese Gleichungen sich so weitläufig ergeben haben, liegt offenbar darin, dass wir sowohl den

Punkt *I*, als auch die drei Axen im anfänglichen Zustande ganz nach Belieben angenommen haben. Wenn wir nämlich den Punkt *I* in den Schwerpunkt oder vielmehr den Mittelpunkt der Trägheit setzen, so werden wegen der Natur des letztern sogleich die drei Integralformeln

$$\int XdM=0,\ \int YdM=0 \text{ und } \int ZdM=0.$$

Wenn wir hierauf ausserdem die drei Axen *IA*, *IB* und *IC* in die Hauptaxen des Körpers legen, so werden auch die drei folgenden Integralformeln

$$\int XYdM=0,\ \int XZdM=0 \text{ und } \int YZdM=0.$$

Nachdem alle diese Glieder aufgehoben sind, werden unsere Gleichungen schon wunderbar zusammengezogen.

§. 1022. Es werden aber nur die drei Integralformeln $\int X^2dM$, $\int Y^2dM$ und $\int Z^2dM$ übrig bleiben und setzen wir, indem wir dieselben über den ganzen Körper ausdehnen,

$$\int X^2dM=A,\ \int Y^2dM=B \text{ und } \int Z^2dM=C;$$

so werden unsere Gleichungen auf folgende Formen reducirt:

$$\text{I. } iP=M\left(\frac{ddf}{dt^2}\right),\quad \text{II. } iQ=M\left(\frac{ddg}{dt^2}\right),\quad \text{III. } iR=M\left(\frac{ddh}{dt^2}\right),$$

$$\text{IV. } iS=M\left(\frac{hddg-gddh}{dt^2}\right)+A\left(\frac{HddG-GddH}{dt^2}\right)$$
$$+B\left(\frac{H'ddG'-G'ddH'}{dt^2}\right)+C\left(\frac{H''ddG''-G''ddH''}{dt^2}\right),$$

$$\text{V. } iT=M\left(\frac{fddh-hddf}{dt^2}\right)+A\left(\frac{FddH-HddF}{dt^2}\right)$$
$$+B\left(\frac{F'ddH'-H'ddF'}{dt^2}\right)+C\left(\frac{F''ddH''-H''ddF''}{dt^2}\right),$$

$$\text{VI. } iU=M\left(\frac{gddf-fddg}{dt^2}\right)+A\left(\frac{GddF-FddG}{dt^2}\right)$$
$$+B\left(\frac{G'ddF'-F'ddG'}{dt^2}\right)+C\left(\frac{G''ddF''-F''ddG''}{dt^2}\right).$$

Mehr aber kann man hieraus, für beliebige antreibende Kräfte, nicht schliessen.

Anwendung dieser Formeln auf den Fall, in welchem der Körper durchaus durch keine Kräfte angetrieben wird.

§. 1023. Hat man daher den Punkt *I* in dem Mittelpunkte der Trägheit des Körpers angenommen, und stellen die drei geraden Linien *IA*, *IB* und *IC* zugleich die Hauptaxen des letztern dar, während er sich nämlich im anfänglichen Zustande be-

findet; so haben wir nach Verlauf der Zeit t, weil alle Kräfte P, Q, R, S, T und U verschwinden, zuerst diese drei Gleichungen:

$$\text{I. } M\left(\frac{ddf}{dt^2}\right)=0, \quad \text{II. } M\left(\frac{ddg}{dt^2}\right)=0 \text{ und III. } M\left(\frac{ddh}{dt^2}\right)=0.$$

Werden dieselben einmal integrirt, so ergeben sie

$$\frac{df}{dt}=\mathfrak{a}, \quad \frac{dg}{dt}=\mathfrak{b} \text{ und } \frac{dh}{dt}=\mathfrak{c},$$

woran man erkennt, dass die Bewegung des Schwerpunktes eine gleichförmige und daher derjenigen gleich ist, welche ihm im Anfange beigebracht worden ist. Ferner schliesst man hieraus durch Integration auf

$$f=\mathfrak{a}t, \quad g=\mathfrak{b}t \text{ und } h=\mathfrak{c}t,$$

so dass der vom Schwerpunkte beschriebene Weg die gerade Linie Ii sein wird.

§. 1024. Die drei übrigen Gleichungen werden sich aber folgendermaassen verhalten:

$$\text{IV. } 0=A\left(\frac{HddG-GddH}{dt^2}\right)+B\left(\frac{H'ddG'-G'ddH'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{H''ddG''-G''ddH''}{dt^2}\right);$$

$$\text{V. } 0=A\left(\frac{FddH-HddF}{dt^2}\right)+B\left(\frac{F'ddH'-H'ddF'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{F''ddH''-H''ddF''}{dt^2}\right);$$

$$\text{VI. } 0=A\left(\frac{GddF-FddG}{dt^2}\right)+B\left(\frac{G'ddF'-F'ddG'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{G''ddF''-F''ddG''}{dt^2}\right).$$

Aus denselben leiten wir sogleich durch Integration die folgenden ab:

$$\mathfrak{A}dt=A(HdG-GdH)+B(H'dG'-G'dH')+C(H''dG''-G''dH''),$$
$$\mathfrak{B}dt=A(FdH-HdF)+B(F'dH'-H'dF')+C(F''dH''-H''dF''),$$
$$\mathfrak{C}dt=A(GdF-FdG)+B(G'dF'-F'dG')+C(G''dF''-F''dG''),$$

wo die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Bewegung enthalten, welche dem Körper ausser der des Schwerpunktes im Anfange beigebracht worden ist.

§. 1025. Die ganze Auflösung ist daher auf diese drei Differentialgleichungen vom ersten Grade reducirt, welche ausser der Zeit t nur drei Veränderliche enthalten, nämlich den Winkel φ und die drei α, β und γ, welche letztern aber, wie wir schon

bemerkt haben, wegen der Gleichung $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ nur zweien gleichgelten. Hieraus geht hervor, dass die Aufgabe eine bestimmte ist; sobald nämlich die Integrationen gelungen sind, wird man zu jeder Zeit diese Winkel angeben können. Man wird aber durch die Winkel α, β und γ die Lage derjenigen Axe des Körpers kennen lernen, welche nach Verlauf der Zeit t dieselbe Richtung wie im Anfange hat. Hierauf wird der Winkel φ zeigen, eine wie grosse Umdrehung der ganze Körper um diese Axe IO vorgenommen hat, wie wir im ersten Theile ausführlich auseinandergesetzt haben.

§. 1026. Damit wir aber um so leichter eben diese Winkel in die drei Gleichungen einführen können, setzen wir, weil sie alle bequem durch die Cosinusse der Winkel α, β und γ ausgedrückt werden können,

$$\cos\alpha = p,\ \cos\beta = q \text{ und } \cos\gamma = r,$$

so dass $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ und $pdp + qdq + rdr = 0$ wird. Hierdurch erhalten wir folgende Werthe der in unsere Gleichungen eintretenden grossen Buchstaben:

$$F = p^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi,\ F' = pq(1-\cos\varphi) - r\sin\varphi,$$
$$F'' = pr(1-\cos\varphi) + q\sin\varphi,$$
$$G = pq(1-\cos\varphi) + r\sin\varphi,\ G' = q^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi,$$
$$G'' = qr(1-\cos\varphi) - p\sin\varphi,$$
$$H = pr(1-\cos\varphi) - q\sin\varphi,\ H' = qr(1-\cos\varphi) + p\sin\varphi,$$
$$H'' = r^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi.$$

§. 1027. Sehen wir daher nun zu, auf welche Weise wir am bequemsten diese Werthe in unsere Gleichungen substituiren können, wobei man sogleich einsieht, dass die erste Formel $HdG - GdH$ aus der Differentiation des Bruches $\frac{G}{H}$ hervorgeht, indem man die Division durch das Quadrat des Nenners unterlässt. Da nun

$$\frac{G}{H} = \frac{pq(1-\cos\varphi) + r\sin\varphi}{pr(1-\cos\varphi) - q\sin\varphi}$$

ist, so wird durch Differentiation nach gewohnter Weise sich folgende Form ergeben:

$$p^2(1-\cos\varphi)^2(rdq - qdr) - pr^2(1-\cos\varphi)d\varphi - q^2\sin\varphi(1-\cos\varphi)dp$$
$$-pq^2(1-\cos\varphi)d\varphi - \sin\varphi^2(qdr - rdq) - r^2\sin\varphi(1-\cos\varphi)\,dp,$$

welche in die folgende zusammengezogen wird

$$(rdq - qdr)[p^2(1-\cos\varphi)^2 + \sin\varphi^2] - (1-p^2)\sin\varphi(1-\cos\varphi)\,dp$$
$$-p(1-p^2)(1-\cos\varphi)\,d\varphi.$$

§. 1028. Die zweite Formel $H'dG' - G'dH'$ wird abgeleitet aus der Differentiation des Bruches

$$\frac{G'}{H'} = \frac{q^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi}{qr(1-\cos\varphi)+p\sin\varphi},$$

woraus der folgende Ausdruck hervorgeht:

$$q^2(1-\cos\varphi)^2[rdq-qdr]-\cos\varphi(1-\cos\varphi)(qdr+rdq)-qr\sin\varphi\, d\varphi$$
$$+\sin\varphi(1-\cos\varphi)(2pqdq-q^2dp)+pq^2d\varphi(1-\cos\varphi)-pd\varphi$$
$$-\sin\varphi\cos\varphi\, dp$$

und dieser wird auf die folgende Form gebracht

$$-dp\sin\varphi[q^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]$$
$$+dq(1-\cos\varphi)[rq^2-r\cos\varphi(1+q^2)+2pq\sin\varphi]$$
$$-qdr(1-\cos\varphi)[q^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]$$
$$-d\varphi[qr\sin\varphi-pq^2(1-\cos\varphi)+p].$$

§. 1029. Die dritte Formel $H''dG'' - G''dH''$ endlich wird aus dem Bruch

$$\frac{G''}{H''} = \frac{qr(1-\cos\varphi)-p\sin\varphi}{r^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi}$$

gebildet werden; es ist nämlich hinreichend, diese drei Formeln zu entwickeln, weil die folgenden sich aus ihnen nach der Analogie ableiten lassen. Stellt man aber die Differentiation an, so ergibt sich die Form

$$r^2(1-\cos\varphi)^2(rdq-qdr)-pr^2d\varphi.\cos\varphi(1-\cos\varphi)+pr^2\sin\varphi^2d\varphi$$
$$+(qdr+rdq)\cos\varphi(1-\cos\varphi)+qrd\varphi\sin\varphi\cos\varphi+qrd\varphi\sin\varphi(1-\cos\varphi)$$
$$-dp\sin\varphi\cos\varphi-pd\varphi\cos\varphi^2-pd\varphi\sin\varphi^2+2pr\,dr\sin\varphi(1-\cos\varphi)$$
$$-r^2dp\sin\varphi(1-\cos\varphi),$$

welche in die folgende zusammengezogen wird:

$$-dp\sin\varphi[r^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]+rdq[r^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi](1-\cos\varphi)$$
$$+dr(1-\cos\varphi)[2pr\sin\varphi-qr^2+q\cos\varphi(1+r^2)]$$
$$+d\varphi[qr\sin\varphi+pr^2(1-\cos\varphi)-p].$$

§. 1030. Nun substituire man diese Werthe in die Gleichung für $\mathfrak{A}dt$, alsdann erhält man

$$\mathfrak{A}dt = -Adp(1-p^2)\sin\varphi(1-\cos\varphi)+Ardq[p^2(1-\cos\varphi)^2+\sin\varphi^2]$$
$$-Aqdr[p^2(1-\cos\varphi)^2+\sin\varphi^2]-Ad\varphi.p(1-p^2)(1-\cos\varphi)$$
$$-Bdp\sin\varphi[q^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]$$
$$+Bdq(1-\cos\varphi)[rq^2-r\cos\varphi(1+q^2)+2pq\sin\varphi]$$
$$-Bqdr(1-\cos\varphi)[q^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]$$
$$-Bd\varphi[qr\sin\varphi-pq^2(1-\cos\varphi)+p]$$
$$-Cdp\sin\varphi[r^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]$$
$$+Crdq(1-\cos\varphi)[r^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]$$
$$+Cdr(1-\cos\varphi)[2pr\sin\varphi-qr^2+q\cos\varphi(1+r^2)]$$
$$+Cd\varphi[qr\sin\varphi+pr^2(1-\cos\varphi)-p].$$

Aus dieser Gleichung bildet man aber die zwei übrigen, indem man die Buchstaben

$$A,\ B,\ C,\ p,\ q,\ r$$

erstens nach $B,\ C,\ A,\ q,\ r,\ p$

und zweitens nach $C,\ A,\ B,\ r,\ p,\ q$

fortrückt. Jene Form kann aber auch auf folgende Weise bequemer dargestellt werden:

$$\mathfrak{A}dt = + dp \sin\varphi (1-\cos\varphi)[Ap^2 - Bq^2 - Cr^2]$$
$$+ dp \sin\varphi \cos\varphi [A - B - C]$$
$$- Adp \sin\varphi + rdq (1-\cos\varphi)^2 [Ap^2 + Bq^2 + Cr^2]$$
$$+ rdq \cos\varphi (1-\cos\varphi)[A - B + C] + Ardq (1-\cos\varphi)$$
$$+ 2Bpqdq \sin\varphi (1-\cos\varphi) - qdr (1-\cos\varphi)^2 [Ap^2 + Bq^2 + Cr^2]$$
$$- qdr \cos\varphi (1-\cos\varphi)[A + B - C] \qquad - Aqdr (1-\cos\varphi)$$
$$+ 2Cprdr \sin\varphi (1-\cos\varphi) + pd\varphi (1-\cos\varphi)[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2]$$
$$- qrd\varphi \sin\varphi (B - C) - pd\varphi (A + B + C] + Apd\varphi \cos\varphi.$$

§. 1031. Weil aber in diesen schon an sich sehr verwickelten Gleichungen die Veränderlichen p, q, r und φ zu sehr unter einander gemischt sind, als dass man eine allgemeine Auflösung unternehmen könnte, so wollen wir vor allem den Fall entwickeln, in welchem der Körper sich um eine feste Axe drehen kann. Da die letztere mit der oben betrachteten Axe IO übereinstimmen muss, so werden die Winkel $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, mithin auch die Buchstaben p, q und r als constant zu betrachten sein; wesshalb nach Aufhebung der Glieder, welche die Differentiale dp, dq und dr enthalten, die drei Gleichungen für diesen Fall sein werden:

$$\mathfrak{A}dt = pd\varphi (1-\cos\varphi)[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2] - qrd\varphi \sin\varphi (B - C)$$
$$- pd\varphi (A + B + C) + Apd\varphi \cos\varphi,$$
$$\mathfrak{B}dt = qd\varphi (1-\cos\varphi)[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2] - prd\varphi \sin\varphi (C - A)$$
$$- qd\varphi [A + B + C] + Bqd\varphi \cos\varphi,$$
$$\mathfrak{C}dt = rd\varphi (1-\cos\varphi)[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2] - pqd\varphi \sin\varphi (A - B)$$
$$- rd\varphi [A + B + C] + Crd\varphi \cos\varphi.$$

§. 1032. Da also der Körper sich mit einer solchen Bewegung drehen könnte, wenn die Drehungsaxe auf eine der Hauptaxen fiele, so wollen wir voraussetzen, sie falle auf die Axe IA, so dass $p=1$, $q=0$ und $r=0$ wird. Hiernach werden unsere drei Gleichungen in die folgenden übergehen:

$$\mathfrak{A}dt = Ad\varphi (1-\cos\varphi) - d\varphi (A + B + C) + Ad\varphi \cos\varphi$$

oder $\mathfrak{A}dt = - d\varphi (B + C)$,

$\mathfrak{B}dt = 0$

und $\mathfrak{C}dt = 0$.

Hieraus geht daher sogleich hervor, dass dieser Fall gewiss stattfinden kann, indem man die Constanten $\mathfrak{B}=0$ und $\mathfrak{C}=0$ annimmt, worauf ferner

$$d\varphi = -\frac{\mathfrak{A}dt}{B+C}$$

ist, wesshalb der Winkel φ der Zeit proportional oder die Bewegung gleichförmig sein wird, wie von selbst klar ist.

§. 1033. Ferner ist es aber auch bekannt, dass sich ein Körper um alle Axen frei drehen kann, wenn alle Momente einander gleich sind, d. h. wenn $A=B=C$ ist. Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{A}dt}{A} = -2pd\varphi,\ \frac{\mathfrak{B}dt}{A} = -2qd\varphi \text{ und } \frac{\mathfrak{C}dt}{A} = -2rd\varphi;$$

es wird also $\frac{d\varphi}{dt}$ eine constante Grösse und daher die drehende Bewegung gleichförmig sein. Setzt man demnach $\frac{d\varphi}{dt}=\Delta$, so finden wir hieraus die Grössen p, q und r; es wird nämlich

$$p = -\frac{\mathfrak{A}}{2A\Delta},\ q = -\frac{\mathfrak{B}}{2A\Delta} \text{ und } r = -\frac{\mathfrak{C}}{2A\Delta}.$$

Weil nun $p^2+q^2+r^2=1$ ist, so wird

$$\Delta = \frac{1}{2A}\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2},$$

und es ist somit alles durch die drei Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmt.

§. 1034. Dieselben Werthe müssen sich aus unsern drei Gleichungen ergeben, wenn man auch die Grössen p, q und r als veränderlich ansieht, für den Fall dass $A=B=C$ ist. Die erste Gleichung wird aber alsdann

$$\frac{\mathfrak{A}dt}{A} = 2dp\sin\varphi(1-\cos\varphi)(p^2-1) + 2dq(1-\cos\varphi)(r+pq\sin\varphi)$$
$$-2dr(1-\cos\varphi)(q-pr\sin\varphi) - 2pd\varphi.$$

Weil aber $pdp+qdq+rdr=0$ ist, wird dieselbe reducirt auf die folgende Form:

$$\text{I. } \frac{\mathfrak{A}dt}{A} = -2dp\sin\varphi + 2(1-\cos\varphi)(rdq-qdr) - 2pd\varphi,$$

woraus man nach der Analogie erhält

$$\text{II. } \frac{\mathfrak{B}dt}{A} = -2dq\sin\varphi + 2(1-\cos\varphi)(pdr-rdp) - 2qd\varphi$$

$$\text{III. } \frac{\mathfrak{C}dt}{A} = -2dr.\sin\varphi + 2(1-\cos\varphi)(qdp-pdq) - 2rd\varphi.$$

Nun können wir sicher sein, dass diesen Gleichungen auf keine andere Weise, als die vorhin auseinander gesetzte, Genüge geschehen kann, wonach nämlich p, q und r constante Grössen sind, der Winkel φ aber der Zeit proportional ist.

§. 1035. Um diess zu zeigen, eliminiren wir zuerst das Element $d\varphi$, indem $\text{I.}\times q - \text{II.}\times p$ ergibt

$$\frac{\mathfrak{A}qdt - \mathfrak{B}pdt}{A} = -2\sin\varphi(qdp - pdq) - 2dr(1 - \cos\varphi).$$

Auf ähnliche Weise ergibt $\text{II.}\times r - \text{III.}\times q$

$$\frac{\mathfrak{B}rdt - \mathfrak{C}qdt}{A} = -2\sin\varphi(rdq - qdr) - 2dp(1 - \cos\varphi),$$

und diesen kann man die Combination $\text{III.}\times p - \text{I.}\times r$ hinzufügen, welche ergibt

$$\frac{\mathfrak{C}pdt - \mathfrak{A}rdt}{A} = -2\sin\varphi(pdr - rdp) - 2dq(1 - \cos\varphi).$$

Nun leuchtet es zwar ein, dass diesen Gleichungen Genüge geschieht, indem man die Grössen p, q und r constant setzt, indessen ist es nicht klar, dass keine andere Auflösung stattfinden könne. Hieraus entspringt die ausgezeichnete analytische Aufgabe, auf welche Weise diese Auflösung aus jenen Formeln abzuleiten sei; dieselbe verdient den Geometern insbesondere empfohlen zu werden.

§. 1036. Wegen dieser Schwierigkeiten, welche in dem einfachsten Falle, wo $A = B = C$ ist, Aufenthalt verursachen, wird es daher noch viel weniger gestattet sein, eine allgemeine Entwickelung zu versuchen. Da wir nun aber versichert sind, dass auch im allgemeinen ein Erfolg eintreten muss, wenn man diese Entwickelung nämlich nach der frühern Methode, deren ich mich einst bedient habe, zu Ende führen kann; so ist kein Zweifel, dass es gewisse uns noch unbekannte Hülfsmittel geben werde, welche zu diesem Ziele zu führen im Stande sind. Weil aber solche Kunstgriffe nicht nur den grössten Scharfsinn, sondern auch ein scharfes Auge erfordern, bin ich gezwungen, diese Untersuchung zu verlassen, indem ich aber diesen Gegenstand für einen, der höchsten Aufmerksamkeit der Geometer würdigen halte.

§. 1037. Es wird nicht wenig zum glücklichen Erfolge beitragen können, wenn wir, ehe wir statt der zuerst eingeführten Buchstaben F, G, H u. s. w. ihre Werthe substituiren, ihre wechselseitigen Beziehungen in genauere Erwägung ziehen; hierdurch würde sich vielleicht schon ein bequemerer Weg darbie-

ten, diese Arbeit zu vollenden. Da nun die erhaltenen Werthe dieser Buchstaben die folgenden sind:

$$F = p^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi,\quad F' = pq(1-\cos\varphi) - r\sin\varphi,\quad F'' = pr(1-\cos\varphi) + q\sin\varphi,$$

$$G = pq(1-\cos\varphi) + r\sin\varphi,\quad G' = q^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi,\quad G'' = qr(1-\cos\varphi) - p\sin\varphi,$$

$$H = pr(1-\cos\varphi) - q\sin\varphi,\quad H' = qr(1-\cos\varphi) + p\sin\varphi,\quad H'' = r^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi;$$

so wird, weil $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ ist,

$$F + G' + H'' = 1 + 2\cos\varphi.$$

Ferner stimmen aber unter den 6 übrigen Werthen dieser Buchstaben je zwei vortrefflich mit einander überein, woraus folgende Relationen hervorgehen:

$$\begin{aligned} G + F' &= 2pq(1-\cos\varphi) \\ G - F' &= 2r\sin\varphi \\ H + F'' &= 2pr(1-\cos\varphi) \\ -H + F'' &= 2q\sin\varphi \\ H' + G'' &= 2qr(1-\cos\varphi) \\ H' - G'' &= 2p\sin\varphi. \end{aligned}$$

Es wird hiernach

$$G^2 - F'^2 = F''^2 - H^2 = H'^2 - G''^2 = 4pqr\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Ausserdem wird man aber solche Combinationen bilden können, in welchen nur der Winkel φ sich befindet; von dieser Art sind die folgenden:

$$\frac{(F''-H)(H'-G'')}{G+F'} = 2(1+\cos\varphi)$$

$$\frac{(G-F')(H'-G'')}{H+F''} = 2(1+\cos\varphi)$$

$$\frac{(G-F')(F''-H)}{H'+G''} = 2(1+\cos\varphi).$$

Uebrigens scheint dieser Gegenstand im höchsten Grade zu verdienen, dass er mit allem Eifer ausgebildet werde, da man hieraus nicht nur für die Mechanik, sondern auch für die Analysis ausgezeichneten Zuwachs wird erwarten können.

§. 1038. Ehe ich diesen Gegenstand gänzlich verlasse, wird es vielleicht nicht unangemessen sein zu bemerken, dass die drei Gleichungen des §. 1034. ziemlich bequem auf zwei zurückgeführt werden können, indem man die Veränderliche t, deren Differential durchaus nur vorkommt, eliminirt. Diess wird man sehr leicht bewirken können, indem man die erste Gleichung

durch p, die zweite durch q und die dritte durch r multiplicirt. Es ergibt sich alsdann folgende ziemlich einfache Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r}{A}dt+2d\varphi=0,$$

also

$$dt=-\frac{2Ad\varphi}{\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r}.$$

Substituirt man diesen Werth nur in zwei Gleichungen, so erhält man zwei neue, in welchen sich nur drei Veränderliche befinden, von denen man je zwei durch die dritte bestimmen muss. Indessen zeigt sich kein Weg, auf welchem man diess bequem ausführen kann; besonders würde auf diese Weise jene einfache Auflösung, welche schon a priori bekannt ist, ganz ausgeschlossen werden. Weil nämlich die Grössen p, q und r constant sind, der Winkel φ aber der Zeit proportional ist, so kann dieser unmöglich durch jene Grössen ausgedrückt werden. Aus diesem Grunde scheint man daher dieses Verfahren ganz verlassen zu müssen, besonders da ich eine vollständige Auflösung dieser Aufgabe schon nach der früher benutzten Methode hergeleitet habe, wobei wir uns also beruhigen müssen.

Kapitel III.

Von der Bewegung eines Pendels, welches um eine cylindrische, und in einer Gabel von gegebener Form liegende Axe beweglich ist.

---

§. 1039. (Fig. 139.) Ich betrachte hier ein Pendel, welches aus der cylindrischen Axe $AABB$ und dem damit in der Mitte fest verbundenen Körper EDF von beliebiger Form zusammengesetzt ist. In dem letztern sei G der Schwerpunkt des ganzen zusammengesetzten Pendels, von demselben ist normal auf die Axe des Cylinders die Linie GC, welche wir $=c$ setzen, gezogen, ausserdem bezeichne M die Masse oder das Gewicht dieses ganzen, aus dem Cylinder $AABB$ und der Last EDF zusammengesetzten Pendels. Durch den Schwerpunkt G denke man sich hierauf der Axe des Cylinders parallel die gerade Linie IK gezogen, und in Bezug auf sie sei das Moment der Trägheit des ganzen Pendels $=M.k^2$. Man findet dieses nämlich, indem man die einzelnen Elemente des Pendels, in so weit sie aus Materie bestehen, in die Quadrate ihrer Abstände von dieser Linie IK multiplicirt und alle diese Produkte in Eine Summe vereinigt.

§. 1040. Es liege nun die cylindrische Axe $ABAB$ dieses Pendels mit beiden Enden A und A so auf zwei, beiderseits gleichen Gabeln, dass sie beständig horizontal bleibe. Das Pendel kann alsdann um die in diesen Gabeln liegende horizontale Axe seine Schwingungen frei ausführen, während es beständig gleich weit entfernt von beiden Gabeln bleibt, wesshalb man den Druck gegen diese auf beiden Seiten als gleich betrachten kann. Ich habe mir aber vorgenommen, die Bewegung dieses Pendels

hier nur in so fern zu erforschen, als seine Schwingungen möglichst klein sind, indem grössere Schwingungen uns in zu beschwerliche Rechnungen stürzen würden.

§. 1041. (Figur 140.) Wir betrachten zuerst unser Pendel im natürlichen Zustande, in welchem es beständig in Ruhe bleiben kann. Das Papier stelle eine vertikale Ebene dar, welche die Axe des Cylinders normal durchschneidet, und es sei MAN die Figur der Gabel, in welcher die Axe des Cylinders AB auf der einen Seite liegt, auf der andern Seite liege sie in einer ganz ähnlichen Gabel. Beide Gabeln MAN sind kreisförmig ausgehöhlt, der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in O, der Radius AO sei $= a$. Der Kreis AB stellt aber einen vertikalen Queerschnitt der cylindrischen Axe dar, um welche das Pendel beweglich ist; es liege der Mittelpunkt desselben in C und es sei der Radius $AC = CB = b$. Im Zustande des Gleichgewichts oder der Ruhe wird diese Axe auf dem untersten Punkte A der Gabel liegen, und wenn man die gerade Linie OCA verlängert, wird sich auf derselben nothwendig der Schwerpunkt G des ganzen Pendels befinden, wobei der Abstand $GC = c$ ist, wie wir ihn oben gesetzt haben. Auf diese Weise wird der Zustand unseres Pendels vollständig bestimmt sein.

§. 1042. Nachdem wir diesen Zustand des Gleichgewichts bestimmt haben, denken wir uns, es werde dem Pendel eine beliebige möglichst kleine Bewegung beigebracht, damit nämlich daraus gleichsam unendlich kleine Schwingungen hervorgehen. Um uns aber diese Bewegung gehörig vorzustellen, muss zuerst die dem Schwerpunkte G beigebrachte Bewegung betrachtet werden; die Richtung derselben sei die horizontale Linie Gg, längs welcher er zuerst sich zu bewegen anfängt. Wir setzen seine Geschwindigkeit $= n$, und müssen dieselbe demnach als unendlich klein betrachten. Ausserdem setzen wir aber voraus, dass dem ganzen Pendel zugleich eine beliebige Bewegung um jene horizontale Axe IK, welche wir uns hier normal auf der Ebene des Papiers stehend denken müssen, beigebracht werde; diese Winkelbewegung sei gleichfalls so klein als möglich, und man setze sie $= v$. Man hat hier zu bemerken, dass der Buchstabe n den Weg bezeichnet, welcher mit der dem Schwerpunkte beigebrachten Geschwindigkeit in einer Secunde durchlaufen werden kann; auf ähnliche Weise stellt v den Winkel dar, welcher in Folge der beigebrachten Winkelgeschwindigkeit in einer Secunde beschrieben werden würde. Nachdem daher

dem Pendel eine solche zweifache Bewegung beigebracht worden ist, muss man die ganze Bewegung erforschen, durch welche es hierauf angetrieben werden wird.

§. 1043. (Fig. 141.) Es sei nun nach Verlauf einer beliebigen und in Secunden ausgedrückten Zeit t der Schwerpunkt des ganzen Pendels von G nach g gelangt, und man ziehe aus dem letztern Punkte bis zur vertikalen Linie die horizontale gp. Zur Bestimmung des Punktes g setze man die Coordinaten $Op=x$ und $pg=y$, wobei man bemerke, dass im Anfange

$$x=a+c-b \text{ und } y=0$$

gewesen ist. Jetzt liege aber die cylindrische Axe des Pendels auf dem Punkte a der Gabel, und man ziehe von hier nach dem Mittelpunkte O der letztern die gerade Linie aO; dieselbe wird zugleich durch die Axe c des Cylinders gehen, und es wird $aO=a$ und $ac=b$. Den Winkel AOa setze man $=\theta$, derselbe wird demnach veränderlich sein, und da $cO=a-b$ ist, so wird, wenn man aus c die horizontale Linie cq zieht,

$$cq=(a-b)\sin\theta \text{ und } Oq=(a-b)\cos\theta.$$

Hierauf verlängere man die gerade Linie cq, bis sie die Vertikale OG in h schneidet, und setze den Winkel $Ahq=\varphi$; derselbe gibt an, um wie viel die Lage des Pendels von seiner natürlichen Lage abweicht, und es kann das Verhältniss desselben zum Winkel θ auf folgende Weise bestimmt werden. Da $Op=x$ und $Oq=(a-b)\cos\theta$ ist, so wird $pq=x-(a-b)\cos\theta$ und $pg-qc=y-(a-b)\sin\theta$; wir erhalten daher nun, weil $cg^2=pq^2+(pg-qc)^2$ ist, die Gleichung

$$c^2=[x-(a-b)\cos\theta]^2+[y-(a-b)\sin\theta]^2$$

oder $$c^2=x^2+y^2-2(a-b)[x\cos\theta+y\sin\theta]+(a-b)^2.$$

Dieselbe stellt eine Relation zwischen den drei Veränderlichen x, y und θ dar. Ausserdem ist aber offenbar

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{pg-qc}{pq}=\frac{y-(a-b)\sin\theta}{x-(a-b)\cos\theta},$$

also $$\sin\varphi=\frac{y-(a-b)\sin\theta}{c} \text{ und } \cos\varphi=\frac{x-(a-b)\cos\theta}{c}.$$

Mittelst dieser Gleichungen werden daher die in die Rechnung eingeführten vier Veränderlichen x, y, θ und φ auf zwei zurückgeführt.

§. 1044. Nachdem daher die Stellung, welche das Pendel nach Verlauf der Zeit t einnehmen wird, bestimmt ist, muss man, um seine Bewegung zu untersuchen, alle die Kräfte, durch welche es angetrieben wird, gehörig in Erwägung ziehen. Zuerst

wird nun aber das ganze Pendel durch die Kraft der Schwere angetrieben, und da wir sein Gewicht $=M$ gesetzt haben, so wird diese ganze Kraft dieselbe Wirkung hervorbringen, als wenn im Schwerpunkte g nach der vertikalen Richtung gf eine Kraft $gf=M$ angebracht wäre. Da ferner die cylindrische Axe des Pendels durch die Gabel im Punkte a unterstützt wird, so wird diese eben die bestimmte Kraft auszuhalten haben, durch welche man sich umgekehrt das Pendel, in Folge der Gegenwirkung, gleichsam von der Gabel zurückgestossen denken muss. Die Richtung derselben wird normal auf die Berührung sein, es wird mithin der Antrieb längs der Richtung ac erfolgen. Die Kraft selbst ist auch jetzt unbekannt, sie wird erst aus der Entwickelung der Bewegung erkannt werden können. Man setze daher diese Kraft, oder den unbekannten in der Richtung ac antreibenden Druck $=\Pi$, so dass wir unser Pendel als in der Wirklichkeit durch zwei Kräfte angetrieben sehen müssen, die erstere nämlich $=M$ in der Richtung gf und die zweite $=\Pi$ in der Richtung ac, wobei wir nämlich von der Reibung abstrahiren. Wäre nämlich Reibung im Berührungspunkte a vorhanden und ginge der Cylinder auf der Gabel gegen N hin fort, so müsste man überdem eine rückwärts gegen A hin antreibende und dem Drucke Π proportionale Kraft einführen; die Betrachtung der Reibung lassen wir aber in der gegenwärtigen Untersuchung zur Seite.

§. 1045. Nachdem die Kräfte aufgestellt sind, durch welche unser Pendel angetrieben wird, zerfällt die Bestimmung der Bewegung in zwei Abschnitte. Zuerst muss man nämlich die Bewegung des Schwerpunktes erforschen, und nachdem diess geschehen ist, muss man ausserdem die Winkelbewegung, durch welche das Pendel sich um seine Axe IK (Fig. 139) dreht, untersuchen. Was aber zuerst die Bewegung des Schwerpunktes anbetrifft, so muss, weil die erste Kraft M schon im Punkte g angebracht ist, auch die andere Kraft Π in ihrer Richtung nach demselben Punkte übertragen werden. Zerlegt man hierauf dieselbe nach den Richtungen der Coordinaten, so erhält man die vertikale Kraft längs pO oder $g\xi=\Pi\cos\theta$ und die horizontale längs $gp=\Pi\sin\theta$; der Punkt g wird demnach vertikal abwärts durch eine Kraft $=M-\Pi\cos\theta$, und horizontal längs gp durch die Kraft $=\Pi\sin\theta$ angetrieben.

§. 1046. Da nun die vertikale Geschwindigkeit des Schwer-

punktes $g = \frac{dx}{dt}$, seine horizontale aber $= \frac{dy}{dt}$ ist, so werden, wenn man das Zeitelement dt als constant betrachtet, die Beschleunigungen längs dieser Richtungen $\frac{ddx}{dt^2}$ und $\frac{ddy}{dt^2}$ sein. Diese muss man durch die Masse des ganzen Pendels M multipliciren, damit die Produkte den beschleunigenden Kräften multiplicirt in $2g$ gleich werden, wo g die Fallhöhe schwerer Körper in Einer Secunde bezeichnet. Hieraus ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$1)\quad M\frac{ddx}{dt^2} = 2g(M - \Pi\cos\theta)$$

$$2)\quad M\frac{ddy}{dt^2} = -2g\,\Pi\sin\theta.$$

Eliminirt man aus denselben die unbekannte Kraft Π, so erhält man die eine Gleichung

$$M.\frac{ddx.\sin\theta - ddy\cos\theta}{dt^2} = 2gM\sin\theta,$$

oder, indem man mit M dividirt,

$$\frac{ddx.\sin\theta - ddy.\cos\theta}{dt^2} = 2g\sin\theta.$$

§. 1047. Ferner haben wir für die Winkelbewegung, weil das Pendel von der natürlichen Lage schon um den Winkel $Ghg = \varphi$ abweicht, seine Winkelgeschwindigkeit im Sinne $Gg = \frac{d\varphi}{dt}$ und die Beschleunigung derselben in eben diesem Sinne $= \frac{dd\varphi}{dt^2}$. Diese müssen wir durch das Moment der Trägheit des ganzen Pendels $= Mk^2$ multipliciren, und das Produkt dem Momente der antreibenden Kräfte in Bezug auf die Axe IK (Fig. 139.), ebenfalls in $2g$ multiplicirt, gleich setzen. Weil aber die Kraft M durch den Punkt g selbst geht, ist ihr Moment $= 0$; das Moment der andern Kraft Π, welche im Punkte c angebracht ist und längs cO wirkt, wird in Bezug auf den Punkt $g = \Pi.cg\sin Och$. Der Winkel Och ist nun $= \varphi - \theta$, dieses Moment also $= \Pi cg\sin(\varphi - \theta)$ und es strebt dasselbe dahin, die Schiefe φ zu vermindern. Hiernach erhalten wir die Gleichung

$$M.\frac{k^2\,dd\varphi}{dt^2} = -2g\,\Pi c\sin(\varphi - \theta),$$

welche wieder die unbekannte Kraft Π enthält, die aber mittelst

der vorher gefundenen zwei Gleichungen fortgeschafft werden kann. Aus diesen folgt nämlich

$$M.\frac{\cos\theta\, ddx + \sin\theta\, ddy}{dt^2} = 2g(M\cos\theta - \Pi),$$

mithin

$$\Pi = M\cos\theta - M\frac{\cos\theta\, ddx + \sin\theta\, ddy}{2g dt^2},$$

und wenn man diesen Werth substituirt, hierauf aber durch die Masse M dividirt; so erhält man die letzte Gleichung in folgender Form:

$$\frac{k^2 dd\varphi}{dt^2} = -2gc\cos\theta\sin(\varphi-\theta) + c\sin(\varphi-\theta)\frac{\cos\theta\, ddx + \sin\theta\, ddy}{dt^2}.$$

§. 1048. Die ganze Bestimmung der Bewegung ist demnach, wenn auch der Druck Π unbekannt ist, auf die zwei folgenden Gleichungen gebracht:

1) $\sin\theta\, ddx - \cos\theta\, ddy = 2g\sin\theta\, dt^2$

2) $c\sin(\varphi-\theta)[\cos\theta ddx + \sin\theta ddy] = k^2 dd\varphi + 2gc\cos\theta\sin(\varphi-\theta)dt^2$.

Mit diesen muss man aber die zwei oben gefundenen Bedingungen, nämlich

3) $c^2 = x^2 + y^2 - 2(a-b)[x\cos\theta + y\sin\theta] + (a-b)^2$

4) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-(a-b)\sin\theta}{x-(a-b)\cos\theta}$

verbinden, so dass wir jetzt vier Gleichungen haben, mittelst welcher man demnach die vier Unbekannten x, y, θ und φ durch die Zeit t wird bestimmen können, so dass man zu jeder beliebigen Zeit jene vier Uebekannten angeben und so die ganze Bewegung des Pendels bestimmen kann. Diess würde zwar im Allgemeinen mit den grössten Schwierigkeiten verknüpft sein, allein da wir uns hier nur vorgenommen haben, gleichsam unendlich kleine Schwingungen zu untersuchen, so wird diese Bedingung die gefundenen Formeln zu einer weit grössern Einfachheit bringen. Wir werden nämlich die beiden Winkel θ und φ als unendlich klein ansehen können, ferner wird ausserdem die Ordinate y beständig so klein als möglich bleiben, während die andere x kaum merkliche Aenderungen erleiden wird.

§. 1049. Vor allem ist es angemessen, hier zu bemerken, dass alle Elemente, welche in diese zwei Gleichungen eintreten, auf die zwei Winkel θ und φ zurückgeführt werden können. Da nämlich $Oc = a - b$ ist, so setze man diesen Abstand der Kürze wegen $= e$, und da der Winkel $AOc = \theta$ ist, so wird $cq = e\sin\theta$ und $Oq = e\cos\theta$. Weil ferner die gerade Linie $cg = c$ gegen die Vertikale OA um den Winkel $Ahg = \varphi$ ge-

neigt ist, wird der Zwischenraum $qp = c\cos\varphi$ und $pg = e\sin\theta + c\sin\varphi$. Hieraus erhalten wir daher

$$Op = x = e\cos\theta + c\cos\varphi$$

und
$$pg = y = e\sin\theta + c\sin\varphi.$$

§. 1050. Da wir nun unsere Untersuchungen auf unendlich kleine Schwingungen beschränken, so werden die beiden Winkel θ und φ beständig sehr klein bleiben, wesshalb wir ohne Fehler $\sin\theta = \theta$ und $\sin\varphi = \varphi$ setzen dürfen, so wie $\cos\theta = 1$ und $\cos\varphi = 1$ sein wird. Wir haben daher

$$x = e + c = \text{Constans und } y = e\theta + c\varphi,$$

und weil demnach $\frac{ddx}{dt^2} = 0$ ist, so gehen unsere Differentialgleichungen der zweiten Ordnung in die folgenden über:

1) $0 = 2g(M - \Pi)$ oder $\Pi = M$,

2) $M\frac{edd\theta + cdd\varphi}{dt^2} = -2g\Pi\theta = -2gM\theta$

oder
$$\frac{edd\theta + cdd\varphi}{dt^2} = -2g\theta,$$

3) $\frac{Mk^2dd\varphi}{dt^2} = -2g\Pi c(\varphi - \theta)$

oder
$$\frac{k^2dd\varphi}{dt^2} = -2gc(\varphi - \theta).$$

§. 1051. Die ganze Bestimmung der Bewegung hängt demnach von der Auflösung dieser zwei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung ab:

1) $\frac{edd\theta + cdd\varphi}{dt^2} = -2g\theta$

2) $\frac{k^2dd\varphi}{dt^2} = -2gc(\varphi - \theta)$,

mittelst welcher man beide Winkel θ und φ für jede Zeit t bestimmen muss. Da sich aber in beiden Gleichungen beide Winkel θ und φ befinden, so ist es angemessen, die erstern so zu combiniren, dass sich eine Gleichung ergibt, welche nur zwei Veränderliche enthält.

§. 1052. Zu diesem Ende multiplicire man die erste Gleichung in die Constante A und die zweite in die Constante B, so dass die Summe beider die folgende Gleichung ergibt:

$$\frac{Aedd\theta + (Ac + Bk^2)dd\varphi}{2gdt^2} = -(A - Bc)\theta - Bc\varphi.$$

Hier muss man die Constanten A und B so bestimmen, dass man die Gleichung als eine nur zwei Veränderlichen ent-

haltende ansehen kann, und damit diess geschehen könne, setzen wir die linke Seite

$$Aedd\theta + (Ac + Bk^2)\, dd\varphi = Cddz,$$

also
$$Ae\theta + (Ac + Bk^2)\, \varphi = Cz.$$

Ferner setzen wir auf der andern Seite

$$(A - Bc)\,\theta + Bc\varphi = Dz,$$

alsdann nimmt unsere Gleichung die Form an:

$$\frac{Cddz}{2gdt^2} = - Dz,$$

sie enthält also jetzt nur die zwei Veränderlichen z und t.

§. 1053. Nun wollen wir mittelst der angenommenen Formeln beide Winkel θ und φ durch die neue Veränderliche z ausdrücken. Aus der ersten findet man

$$\theta = \frac{Cz}{Ae} - \frac{(Ac + Bk^2)\varphi}{Ae}$$

und aus der zweiten

$$\theta = \frac{Dz - Bc\,\varphi}{A - Bc};$$

diese zwei Werthe setze man einander gleich, und zwar so, dass sowohl die Theile, welche die neue Grösse z, als auch diejenigen, welche den Winkel φ enthalten, für sich einander gleich werden. Es muss daher

$$\frac{C}{Ae} = \frac{D}{A - Bc} \quad \text{und} \quad \frac{Ac + Bk^2}{Ae} = \frac{Bc}{A - Bc}$$

sein, und ordnet man die zweite Gleichung, so geht sie über in

$$A^2c + (k^2 - c^2 - ec)\, AB - B^2c\, k^2 = 0,$$

welche quadratische Gleichung doppelte Werthe für die Buchstaben A und B ergibt. Um dieselben zu finden, setzen wir der Kürze wegen $c + e - \frac{k^2}{c} = 2f$, so dass unsere Gleichung wird

$$A^2 - 2fAB - B^2k^2 = 0.$$

Aus derselben erhalten wir $A = B\,(f \pm \sqrt{f^2 + k^2})$ oder, wenn wir $B = 1$ annehmen,

$$1)\quad A = f + \sqrt{f^2 + k^2}$$

$$2)\quad A = f - \sqrt{f^2 + k^2};$$

diese beiden Werthe können aber auf gleiche Weise Genüge leisten.

§. 1054. Setzen wir nun den ersten gefundenen Werth von A in die erste Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{D}{C} = \frac{1}{e} - \frac{c}{ef + e\sqrt{f^2 + k^2}}$$

$$=\frac{k^2+cf-c\sqrt{f^2+k^2}}{ek^2}.$$

Nimmt man aber den zweiten Werth von A an, so ergibt sich

$$\frac{D}{C}=\frac{k^2+cf+c\sqrt{f^2+k^2}}{ek^2}.$$

Nehmen wir demnach

$$C=ek^2$$

an, so erhalten wir für D, eben so wie für A, doppelte Werthe; ist nämlich $B=1$ und $C=ek^2$ gesetzt, so haben wir für A und D die Auflösungen erlangt:

$$\text{Erste Auflösung}\begin{cases}A=f+\sqrt{f^2+k^2}\\ D=k^2+cf-c\sqrt{f^2+k^2}\end{cases}$$

$$\text{Zweite Auflösung}\begin{cases}A=f-\sqrt{f^2+k^2}\\ D=k^2+cf+c\sqrt{f^2+k^2}.\end{cases}$$

§. 1055. Für die erste Auflösung wird daher die Relation zwischen den Winkeln θ und φ, und der neuen Veränderlichen z folgendermassen beschaffen sein:

$$e\theta[f+\sqrt{f^2+k^2}]+[cf+k^2+c\sqrt{f^2+k^2}]\,\varphi=ek^2z,$$

und es wird die Gleichung, aus welcher man die Unbekannte z zu erforschen hat,

$$\frac{ek^2ddz}{2gdt^2}=-z[k^2+cf-c\sqrt{f^2+k^2}].$$

§. 1056. Indem man auf ähnliche Weise die zweiten Werthe von A und D substituirt, muss man zugleich statt z eine andere Veränderliche in die Rechnung einführen, welche z' sei. Die Relation zwischen θ, φ und z' wird alsdann ausgedrückt durch die Gleichung:

$$e\theta[f-\sqrt{f^2+k^2}]+[cf+k^2-c\sqrt{f^2+k^2}]\,\varphi=ek^2z',$$

diese Unbekannte z' aber muss gesucht werden aus der folgenden Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{ek^2ddz'}{2gdt^2}=-z'[k^2+cf+c\sqrt{f^2+k^2}].$$

§. 1057. Auf diese Weise haben wir zwei neue Veränderlichen z und z' in die Rechnung eingeführt, von welchen jede durch die Integration einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung ohne Schwierigkeit bestimmt werden kann, wie wir sogleich zeigen werden; sind sie aber gefunden, so können beide Winkel θ und φ leicht durch z und z' ausgedrückt werden. Addirt man nämlich die zwei vorher gegebenen Gleichungen zwischen θ, φ und z, und θ, φ und z', so erhält man

$$\theta+\varphi\frac{cf+k^2}{ef}=\frac{k^2}{2f}(z+z');$$

subtrahirt man aber die zweite von der ersten, so ergibt sich

$$\theta+\frac{c\varphi}{e}=\frac{k^2(z-z')}{2\sqrt{f^2+k^2}}.$$

Nun subtrahire man diese von der vorhergehenden, alsdann erhält man

$$\frac{k^2}{ef}\varphi=\frac{k^2z}{2}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{\sqrt{f^2+k^2}}\right)+\frac{k^2z'}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{\sqrt{f^2+k^2}}\right)$$

und hieraus durch Reduction

$$\varphi=\frac{ez[\sqrt{f^2+k^2}-f]+ez'[\sqrt{f^2+k^2}+f]}{2\sqrt{f^2+k^2}}.$$

Mittelst dieses für φ gefundenen Werthes erhält man den andern Winkel

$$\theta=z\frac{k^2+cf-c\sqrt{f^2+k^2}}{2\sqrt{f^2+k^2}}-z'\frac{k^2+cf+c\sqrt{f^2+k^2}}{2\sqrt{f^2+k^2}}.$$

§. 1058. Es bleibt daher noch übrig, die Werthe der Buchstaben z und z' aufzusuchen. Es ergibt sich aber für z die Gleichung

$$\frac{ek^2ddz}{2gdt^2}+z(k^2+cf-\sqrt{f^2+k^2})=0,$$

oder wenn wir der Kürze wegen $\frac{ek^2}{k^2+cf-\sqrt{f^2+k^2}}=h$ setzen,

$$\frac{h\,ddz}{2gdt^2}+z=0.$$

Multipliciren wir diese in dz und integriren, so erhält man

$$\frac{hdz^2}{2gdt^2}+z^2=\alpha^2,$$

also $$\frac{2gdt^2}{h}=\frac{dz^2}{\alpha^2-z^2}\quad\text{oder}\quad dt\sqrt{\frac{2g}{h}}=\frac{dz}{\sqrt{\alpha^2-z^2}},$$

und wenn man integrirt:

$$t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta=\text{arc.}\sin\frac{z}{\alpha}.$$

Wir haben demnach

$$\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)=\frac{z}{\alpha}$$

und es wird die bis jetzt unbekannte Grösse z so durch die Zeit t allein ausgedrückt werden, dass man

$$z = \alpha \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right)$$

hat, wo $h = \frac{ek^2}{k^2 + cf - \sqrt{f^2 + k^2}}$ ist.

§. 1059. Auf ähnliche Weise findet man die andere unbekannte Grösse z'. Setzen wir nämlich der Kürze wegen

$$\frac{ek^2}{k^2 + cf + \sqrt{f^2 + k^2}} = h',$$

und setzen wir die durch die Integration eintretenden Constanten gleich α' und δ', so ergibt sich

$$z' = \alpha' \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right).$$

Wie man durch diese gefundenen Grössen die zwei Winkel θ und φ zu bestimmen hat, haben wir schon gezeigt, so dass man diese nach Verlauf einer jeden Zeit t wird angeben können. Weil aber die Winkel θ und φ beständig möglichst klein bleiben sollen, ist es einleuchtend, dass die Coëfficienten α und α' als unendlich klein angesehen werden müssen.

Eine andere geschicktere Auflösung der oben im §. 1050. gefundenen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

§. 1060. Statt der zwei Winkel θ und φ führen wir zwei andere z und z' in die Rechnung ein, durch welche jene so bestimmt werden, dass man

$$\theta = Az + A'z' \text{ und } \varphi = Bz + B'z'$$

hat. Alsdann sind aber diese neuen Winkel z und z' so von der Zeit t abhängig, dass

$$\frac{ddz}{2gdt^2} = -\frac{z}{h} \text{ und } \frac{ddz'}{2gdt^2} = -\frac{z'}{h'}$$

wird. Aus diesen Gleichungen werden nun, wie wir eben gesehen haben, beide Winkel z und z' so durch die Zeit t bestimmt, dass

$$z = \alpha \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) \text{ und } z' = \alpha' \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

wird, wo α, α', δ und δ' die durch die Integration eingetretenen Constanten sind, und wobei man bemerken muss, dass die beiden ersten gleichsam unendlich klein sind, weil die Winkel z und z' beständig möglichst klein bleiben sollen.

§. 1061. Hiernach wird

$$\frac{dd\theta}{2gdt^2}=\frac{Addz+A'ddz'}{2gdt^2}=-\frac{Az}{h}-\frac{A'z'}{h'}$$

und
$$\frac{dd\varphi}{2gdt^2}=\frac{Bddz+B'ddz'}{2gdt^2}=-\frac{Bz}{h}-\frac{B'z'}{h'};$$

daher werden die obigen Gleichungen

$$\frac{edd\theta+cdd\varphi}{2gdt^2}=-\theta \text{ und } \frac{k^2dd\varphi}{2gdt^2}=-c\varphi+c\theta,$$

wenn wir die eben gefundenen Werthe substituiren, die folgenden ergeben:

$$\text{I. } -\frac{Aez}{h}-\frac{A'ez'}{h'}-\frac{Bcz}{h}-\frac{B'cz'}{h'}=-Az-A'z'$$

$$\text{II. } -\frac{Bk^2z}{h}-\frac{B'k^2z'}{h'}=-c(B-A)z-c(B'-A')z'.$$

§. 1062. Weil nun die Winkel z und z' nicht von einander abhängen sollen, müssen in beiden Gleichungen die mit z und z' behafteten Glieder für sich einander gleichgestellt werden, woraus sich folgende vier Gleichungen ergeben:

$$1)\ \frac{Ae}{h}+\frac{Bc}{h}=A$$

$$2)\ \frac{A'e}{h'}+\frac{B'c}{h}=A'$$

$$3)\ \frac{Bk^2}{h}=c(B-A)$$

$$4)\ \frac{B'k^2}{h'}=c(B'-A'),$$

aus welchen die Werthe der Constanten A, A', B, B' und der Buchstaben h und h' hergeleitet werden sollen.

§. 1063. Dividirt man die erste Gleichung durch die dritte und eben so die zweite durch die vierte, so findet man die zwei Gleichungen

$$\frac{Ae+Bc}{Bk^2}=\frac{A}{c(B-A)} \text{ und } \frac{A'e+B'c}{B'k^2}=\frac{A'}{c(B'-A')},$$

aus welchen man eine Relation sowohl zwischen A und B, als auch zwischen A' und B' herleiten muss. Hat man diese aber gefunden, so wird

$$h=\frac{Bk^2}{c(B-A)} \text{ und } h'=\frac{B'k^2}{c(B'-A')}.$$

§. 1064. Die erste jener Gleichungen, welche die Buchstaben A und B enthält, wird, wenn man sie ordnet

$$B^2c^2-AB(k^2+c^2-ce)-A^2ce=0,$$

und wenn wir zur Vereinfachung $k^2+c^2-ce=2cf$ setzen,

$$B^2c^2 - 2ABcf - A^2ce = 0,$$

also

$$Bc = Af \pm A\sqrt{f^2+ce} \text{ oder } \frac{B}{A} = \frac{f\pm\sqrt{f^2+ce}}{c}.$$

Nimmt man nun $A=c$ an, so wird $B=f\pm\sqrt{f^2+ce}$.

§. 1065. Auf ähnliche Weise geht die andere Gleichung, welche A' und B' enthält, wenn man sie ordnet, über in

$$B'^2c^2 - A'B'(k^2+c^2-ce) - A'^2ce = 0,$$

welche wie vorhin

$$\frac{B'}{A'} = \frac{f\pm\sqrt{f^2+ce}}{c}$$

ergibt. Diese Werthe stimmen vollkommen mit den vorher gefundenen überein, und es wird nur die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens einen Unterschied bilden; wir erhalten daher, wenn wir sowohl $A=c$, als auch $A'=c$ setzen, für B und B' die folgenden verschiedenen Werthe:

$$B = f+\sqrt{f^2+ce} \text{ und } B' = f-\sqrt{f^2+ce}.$$

§. 1066. Nachdem die Werthe der Buchstaben A, B, A' und B', in welchen man $f=\frac{k^2+c^2-ce}{2c}$ anzunehmen hat, aufgestellt worden sind, ergeben sich die beiden noch ausserdem zu bestimmenden Grössen folgendermaassen:

$$h = \frac{Bk^2}{c(B-A)} = \frac{k^2(f+\sqrt{f^2+ce})}{c(f-c+\sqrt{f^2+ce})}$$

und

$$h' = \frac{B'k^2}{c(B'-A')} = \frac{k^2(f-\sqrt{f^2+ce})}{c(f-c-\sqrt{f^2+ce})}.$$

Diese Ausdrücke werden leicht so umgeformt, dass wir erhalten

$$h = \frac{k^2(e+f+\sqrt{f^2+ce})}{2cf+ce-c^2},$$

oder weil $2cf=k^2+c^2-ce$ gesetzt ist,

$$h = e+f+\sqrt{f^2+ce}$$

und indem man das Zeichen der Wurzel ändert,

$$h' = e+f-\sqrt{f^2+ce}.$$

§. 1067. Nachdem wir diese Werthe gefunden haben, wird, wie wir oben gesehen haben,

$$z = \alpha\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right) \text{ und } z' = \alpha'\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}}+\delta'\right),$$

und behalten wir die Buchstaben h und h', deren Werthe schon bekannt sind, bei; so erhalten wir, für jede vom Anfang an ver-

flossene und in Secunden ausgedrückte Zeit t, beide Winkel θ und φ folgendermaassen ausgedrückt:

$$\theta = \alpha c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \alpha' c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

und

$$\varphi = \alpha(f + \sqrt{f^2 + ce}) \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right)$$
$$+ \alpha'(f - \sqrt{f^2 + ce}) \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right).$$

Kennt man aber diese Winkel, so wird die Stellung unseres Pendels zu jeder Zeit, mithin auch seine Bewegung vollkommen bekannt.

§. 1068. Wir haben schon bemerkt, dass α, α', δ und δ' die durch die Integrationen eingetretenen Constanten sind, welche man also nach der anfänglichen Stellung des Pendels, wo $t=0$ war, bestimmen muss. Weil wir nun angenommen haben, dass das Pendel sich im Zustande des Gleichgewichts befunden habe, so müssen nothwendig für $t=0$ beide Winkel θ und φ verschwinden; hierdurch erhalten wir die zwei Gleichungen:

1) $0 = \alpha c \sin\delta + \alpha' c \sin\delta'$ oder $0 = \alpha \sin\delta + \alpha' \sin\delta'$

2) $0 = \alpha(f + \sqrt{f^2 + ce}) \sin\delta + \alpha'(f - \sqrt{f^2 + ce}) \sin\delta'$.

Nach der ersten wird $\alpha' \sin\delta' = -\alpha \sin\delta$, und substituirt man diesen Werth in die zweite Gleichung, so erhält man

$$0 = 2\alpha \sin\delta \sqrt{f^2 + ce},$$

woraus folgt, dass entweder $\alpha = 0$ oder $\sin\delta = 0$ ist. Es kann aber nicht $\alpha = 0$ sein, weil sonst das Pendel gar keine Bewegung annehmen würde, und es wird daher

$$\sin\delta = 0 \text{ und } \delta = 0.$$

Hiernach werden unsere Ausdrücke viel einfacher, nämlich

$$\theta = \alpha c \sin t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \alpha' c \sin t\sqrt{\frac{2g}{h'}}$$

und

$$\varphi = \alpha(f + \sqrt{f^2 + ce}) \sin t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \alpha'(f - \sqrt{f^2 + ce}) \sin t\sqrt{\frac{2g}{h'}}.$$

§. 1069. Ferner haben wir aber im Anfange angenommen, dass dem Schwerpunkte eine Geschwindigkeit $= n$ beigebracht worden sei, und da diese Geschwindigkeit im allgemeinen $= \frac{dy}{dt} = \frac{ed\theta + cd\varphi}{dt}$ ist; so muss dieser Ausdruck, wenn man darin $t = 0$ setzt, $= n$ werden. Man findet aber

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha c \sqrt{\frac{2g}{h}} \cos t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \alpha' c \sqrt{\frac{2g}{h'}} \cos t\sqrt{\frac{2g}{h'}}$$

und ähnlich

$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha B\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\alpha' B'\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos t\sqrt{\frac{2g}{h'}},$$

wo wir die Buchstaben B und B' statt ihrer Werthe $f+\sqrt{f^2+ce}$ und $f-\sqrt{f^2+ce}$ beibehalten haben. Wendet man daher diese Werthe an, so ergibt für $t=0$ diese Bedingung der beigebrachten Bewegung die Gleichung

$$n=\alpha c\sqrt{\frac{2g}{h}}(e+B)+\alpha' c\sqrt{\frac{2g}{h'}}(e+B').$$

Es war aber $h=e+f+\sqrt{f^2+ce}=e+B$ und ähnlich $h'=e+B'$, mithin nimmt diese Gleichung folgende einfachere Form an:

$$n=\alpha c\sqrt{2gh}+\alpha' c\sqrt{2gh'}.$$

§. 1070. Ausserdem haben wir aber angenommen, dass dem ganzen Pendel im Anfange auch eine Winkelbewegung, deren Geschwindigkeit $=v$, beigebracht worden sei. Weil nun im allgemeinen die Geschwindigkeit des Pendels $=\frac{d\varphi}{dt}$ ist, so muss nothwendig für $t=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=v$ werden. Hieraus erhalten wir die Gleichung

$$v=\alpha B\sqrt{\frac{2g}{h}}+\alpha' B'\sqrt{\frac{2g}{h'}},$$

also

$$\alpha'\sqrt{\frac{2g}{h'}}=\frac{v}{B'}-\frac{\alpha B}{B'}\sqrt{\frac{2g}{h}}.$$

Substituiren wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, worin sich noch B und B' befand, so erhalten wir

$$n=\alpha ce\sqrt{\frac{2g}{h}}\frac{B'-B}{B'}+\frac{vc(e+B')}{B'};$$

und weil $B'-B=-2\sqrt{f^2+ce}$ und $e+B'=h'$ ist, so ergibt sich

$$n=-\frac{2\alpha ce}{B'}\sqrt{\frac{2g}{h}}(f^2+ce)+\frac{vch'}{B'},$$

also

$$\alpha\sqrt{\frac{2g}{h}}=\frac{vh'}{2e\sqrt{f^2+ce}}-\frac{nB'}{2ec\sqrt{f^2+ce}}.$$

Substituirt man endlich diesen Werth, so wird

$$\alpha'\sqrt{\frac{2g}{h'}}=\frac{v}{B'}-\frac{Bvh'}{2B'e\sqrt{f^2+ce}}+\frac{nB}{2ce\sqrt{f^2+ce}}$$

$$=-\frac{vh}{2e\sqrt{f^2+ce}}+\frac{nB}{2ce\sqrt{f^2+ce}};$$

wir haben mithin alle vier Constanten α, α', δ und δ' aus dem Anfangszustande bestimmt. Man wird daher für jede zukünftige Zeit t sowohl die Stellung des Pendels, als auch seine Bewegung angeben können

Von der regelmässigen Bewegung, welche ein vorausgesetztes Pendel annehmen kann.

§. 1071. So lange die Sinusse der beiden Winkel $t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta$ und $t\sqrt{\frac{2g}{h'}}+\delta'$ in unsern Formeln, welche wir hier im allgemeinen und ohne Rücksicht auf einen bestimmten Anfangszustand betrachten werden, enthalten sind, muss man die Bewegung des Pendels für eine aus zwei einfacheren gemischte halten und zwar hat man jede der letztern als aus einem jener zwei Winkel entspringend zu betrachten. Man ersieht hieraus, dass man erst dann die Bewegung des Pendels für eine einfache halten kann, wann nur ein einziger jener Sinusse in die Rechnung eintritt und es geschieht diess, wenn entweder $\alpha=0$ oder $\alpha'=0$ ist. Alsdann wird nämlich die ganze Bewegung des Pendels der Bewegung eines einfachen Pendels ähnlich, welches alle seine Schwingungen in gleichen Zeiten ausführt.

§. 1072. Wir wollen daher zuerst den Fall entwicken, in welchem $\alpha'=0$ ist und für jede Zeit t die zwei Winkel θ und φ auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\theta=\alpha c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)$$

und

$$\varphi=\alpha(f+\sqrt{f^2+ce})\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right).$$

Aus diesen erhält man durch Differentiation

$$\frac{d\theta}{dt}=\alpha c\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha\sqrt{\frac{2g}{h}}(f+\sqrt{f^2+ce})\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right),$$

wo $\frac{d\theta}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken, mit welchen sich das Pendel sowohl um den Punkt O, als um den Punkt c dreht.

§. 1073. Verschwinden diese letztern Ausdrücke, so wird das ganze Pendel zum Zustande der Ruhe gebracht, und weil diess in den grössten Ausweichungen geschieht, pflegt man von da ab die neuen Schwingungen zu zählen. Diese Zeiten wer-

den daher eintreten, wann $\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)=0$, d. h.

$$t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta=90^0 \text{ oder } =270^0$$

ist. Setzen wir daher $t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta=90^0=\frac{\pi}{2}$, so wird das Pendel in diese Stellung gelangen nach Verlauf der Zeit

$$t=(90^0-\delta)\sqrt{\frac{h}{2g}};$$

von hier aber wird es wieder in eine solche Stellung gelangen nach Verlauf der Zeit

$$t=(270^0-\delta)\sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Hiernach ist die Zwischenzeit dieser zwei Momente, welcher man die Dauer Einer Schwingung gleich zu setzen pflegt,

$$=180^0\sqrt{\frac{h}{2g}}=\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$$

und zwar wird dieselbe so in Secunden ausgedrückt werden. Es folgt hieraus, dass diese Schwingungen mit denen eines einfachen Pendels von der Länge $=h$ isochron sind.

§. 1074. Unser Pendel wird demnach eine solche regelmässige Bewegung annehmen können, welche mit derjenigen eines einfachen Pendels von der Länge $=h$ übereinstimmt. Wir haben aber gesehen, dass diese Länge so durch die Elemente, aus welchen unser Pendel zusammengesetzt ist, bestimmt wird, dass wir

$$h=e+f+\sqrt{f^2+ce}$$

haben, wo $f=\frac{k^2+c^2-ce}{2c}$ ist. In der Wirklichkeit wird aber unser Pendel in ein einfaches übergehen, wenn $k^2=0$ ist, weil alsdann die ganze Masse desselben im Schwerpunkte g vereinigt wird. Ausserdem fällt nun der Punkt O auf a, indem alsdann unser Pendel von der Länge $cg=c$ seine Schwingungen um den festen Punkt c ausführen wird. Macht man aber $k^2=0$ und $e=0$, so wird

$$f=\tfrac{1}{2}c \text{ und } h=c,$$

was vortrefflich mit der Wahrheit übereinstimmt. Es verdient aber auch im allgemeinen der Fall, in welchem $k^2=0$ oder die ganze Masse des Pendels im Schwerpunkte g vereinigt ist, bemerkt zu werden; alsdann wird nämlich

$$f = \frac{c-e}{2}, \text{ mithin } \sqrt{f^2+ce} = \frac{c+e}{2} \text{ und } h = c+e.$$

Da nun $Oc = e$ und $gc = c$, also $Og = c + e = h$ ist, so wird das Pendel seine Schwingungen eben so ausführen, als wenn es vom Punkte O herabhinge.

§. 1075. Offenbar wird die Figur der Gabel MAN sehr viel zu dieser Bewegung des Pendels beitragen, was näher zu betrachten der Mühe werth sein wird. Wir wollen daher zuerst den Fall annehmen, dass die Oberfläche der Gabel eben und horizontal sei und die cylindrische Axe des Pendels darauf liege. Es wird daher der Radius $AO = a = \infty$ und, weil b der Radius der Axe ist, auch der Abstand $Oc = e = \infty$, wesshalb der Winkel θ nothwendig verschwinden muss, damit der Raum $e\theta$, welcher das Intervall Cc angibt, endlich und so klein als möglich bleibe. Es wird alsdann

$$f = -\tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}c + \frac{k^2}{2c},\quad f^2 = \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{1}{2}ce - \frac{ek^2}{2c}$$

$$f^2 + ce = \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{2}ce - \frac{ek^2}{2c}$$

und
$$\sqrt{f^2+ce} = \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}c - \frac{k^2}{2c},$$

mithin $h = c + e$ und weil diese Länge unendlich gross ist, kann über einer ebenen Gabel die Axe des Pendels so aus ihrer Lage bewegt werden, dass gar keine Schwingungen entstehen.

§. 1076. Weil aber die Wurzelgrösse $\sqrt{f^2+ce}$ auch das negative Zeichen enthält, so ergibt sich, wenn wir ihren negativen Werth annehmen, für denselben Fall der ebenen Gabel

$$h = \frac{k^2}{c}.$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn nicht die ganze Masse des Pendels in seinem Schwerpunkte vereinigt ist, ein solches auf einer ebenen Gabel liegendes Pendel auch ähnlich wie ein einfaches von der Länge $= \frac{k^2}{c}$ schwingen kann. Für diesen Fall, wo $e = \infty$ und $h = \frac{k^2}{c}$ ist, wird die Bewegung unseres Pendels ausgedrückt durch die Formeln

$$\theta = \alpha c \sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right)$$

und
$$\varphi = \alpha\left(\frac{k^2}{c} - e\right)\sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right);$$

hieraus folgt, dass α klein genug angenommen werden muss,

damit αe noch so klein als möglich bleibe. Nehmen wir daher $\alpha e = -\beta$ oder $\alpha = -\frac{\beta}{e}$ an, so wird

$$e\theta = -\beta c \sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right)$$

und

$$\varphi = \beta \sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right),$$

wo $\frac{k^2}{c}$ gegen $e = \infty$ vernachlässigt ist. Hier geht nämlich, während das Pendel sich in der grössten Ausweichung befinden wird, die cylindrische Axe über der ebenen Gabel durch den Weg $ac = e\theta = \beta c$ zurück (Fig. 142), und da die gerade Linie cg von der vertikalen Lage um den Winkel β abweicht, so wird offenbar der Schwerpunkt auf die Hauptvertikale fallen. Hieraus ersieht man, dass ein Pendel zu einer solchen Bewegung zusammengesetzt werden kann, während die cylindrische Axe sich ausserhalb der Hauptvertikalen zurückbewegt, der Schwerpunkt aber auf eben dieser geraden Linie in g festgehalten wird. Wenn er nämlich alsdann losgelassen würde, so würde die gerade Linie cg sich der vertikalen Lage nähern und die cylinderische Axe über der Gabel gegen A rücken; diese wechselseitige Bewegung stimmt mit der eines Pendels von der Länge $\frac{k^2}{c}$ überein.

§. 1077. Auf dieselbe Weise verhält sich die Sache, wenn $\alpha = 0$ ist, alsdann wird nämlich unser Pendel gleichfalls eine regelmässige Bewegung annehmen, und zugleich werden beide Winkel θ und φ folgendermaassen abgeändert:

$$\theta = \alpha' c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

und

$$\varphi = \alpha'(f - \sqrt{f^2 + ce}) \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right).$$

Hier wird die wechselseitige Bewegung mit der schwingenden Bewegung eines Pendels, dessen Länge $= h'$ ist, übereinstimmen. Wir haben aber gesehen, dass

$$h' = e + f - \sqrt{f^2 + ce}$$

ist, wobei wir $f = \frac{k^2 + c^2 - ce}{2c}$ haben. Uebrigens haben wir die hieraus hervorgehenden Erscheinungen, wenn die Gabel als eben vorausgesetzt wird, schon vorher erwähnt, als wir die Wurzel $\sqrt{f^2 + ce}$ negativ annahmen.

§. 1078. Ehe wir die unregelmässigen Bewegungen in Er-

wägung ziehen, erfordert der oben erwähnte Fall, in welchem die cylindrische Axe des Pendels auf einer ebenen Gabel ausserhalb des Punktes A liegt, während der Schwerpunkt g auf der vertikalen Linie Ag festgehalten wird, eine gewisse Beleuchtung. Aus den gefundenen Formeln folgt nämlich, dass der Schwerpunkt g beständig auf der vertikalen Linie Ag verweilt, während inzwischen die cylindrische Axe auf beiden Seiten sich vom Punkte A mit wechselseitiger Bewegung entfernt und Schwingungen ausführt, welche mit denen eines einfachen Pendels von der Länge $= \frac{k^2}{c}$ übereinstimmen. Diess scheint der Erfahrung zu widersprechen, indem man vielmehr wahrnimmt, dass der Schwerpunkt g um die unbewegte cylindrische Axe Schwingungen ausführt. Diese Wirkung muss aber offenbar der Reibung zugeschrieben werden, vermöge welcher die cylindrische Axe nicht ohne Schwierigkeit über der Gabel fortschreiten kann. In dieser ganzen Analyse haben wir aber die Reibung durchaus entfernt gehalten, so dass die cylindrische Axe sich ganz frei über der Gabel bewegen könne. Hat man nämlich die Reibung aufgehoben, so wirkt sowohl das Gewicht des Pendels, als auch der Druck gegen die Gabel in vertikaler Richtung und es können diese zwei Kräfte, wenn sie am Schwerpunkte angebracht sind, keine Seitenbewegung hervorbringen, sondern es muss dieser Punkt beständig auf derselben vertikalen Linie bleiben.

Von den unregelmässigen Bewegungen, welche das vorliegende Pendel annehmen kann.

§. 1079. Verschwindet keine der beiden Constanten α und α', so entsteht eine höchst unregelmässige Bewegung. Dieselbe besteht nämlich aus einer doppelten schwingenden Bewegung, von denen die eine einem einfachen Pendel von der Länge h entsprechen wird und ihre Perioden in der Zeit $t = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}$ vollendet, die andere aber einem Pendel von der Länge $= h'$ entsprechen wird, dessen Perioden in der Zeit $t = \pi \sqrt{\frac{h'}{2g}}$ vollendet werden. Es wird daher unter dieser Voraussetzung je nach der Verschiedenheit der Grössen h und h', insbesondere aber nach dem gegenseitigen Verhältniss sowohl der Coëfficienten α und α', als auch der Winkel δ und δ' eine unermessliche Mannigfaltigkeit stattfinden können und man wird nicht im Stande

sein, alle verschiedenen Bewegungen auf irgend eine Weise abzuschätzen oder aufzuzählen.

§. 1080. Damit wir diess leichter, wenigstens im Geiste, zu fassen vermögen, wollen wir beide Werthe der Buchstaben h und h' genauer aus den ersten Elementen, worin der Zustand des Pendels enthalten ist, entwickeln. Da wir nun der Kürze wegen

$$f = \frac{k^2 + c^2 - ce}{2c}$$

gesetzt haben, so wird

$$f + e = \frac{k^2 + c^2 + ce}{2c}$$

und

$$\sqrt{f^2 + ce} = \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ck^2(c-e) + c^2(c+e)^2}.$$

Es ist aber

$$h = e + f + \sqrt{f^2 + ce} \text{ und } h' = e + f - \sqrt{f^2 + ce},$$

mithin wird

$$h = \frac{k^2 + c^2 + ce}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ck^2(c-e) + c^2(c+e)^2}$$

und

$$h' = \frac{k^2 + c^2 + ce}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ck^2(c-e) + c^2(c+e)^2}.$$

§. 1081. Nachdem diese zwei Werthe aufgestellt sind, wird, weil oben

$$h = e + B \text{ und } h' = e + B'$$

war, umgekehrt

$$B = h - e \text{ und } B' = h' - e.$$

Hiernach werden beide Winkel θ und φ für jede beliebige Zeit t auf folgende Weise bestimmt werden:

$$\theta = \alpha c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \alpha' c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

und

$$\varphi = \alpha(h-e)\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \alpha'(h'-e)\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right).$$

Mittelst dieser Formeln kann man auch beide Winkelgeschwindigkeiten, nämlich $\frac{d\theta}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$, um welche die Winkel θ und φ nach der Zeit t vergrössert werden, angeben; es wird nämlich

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha c\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \alpha' c\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha(h-e)\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)$$
$$+\alpha'(h'-e)\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}}+\delta'\right).$$

Durch diese Elemente wird die ganze Bewegung so vollständig bestimmt, dass nichts weiter zu wünschen übrig bleibt.

§. 1082. Oft, besonders wenn man den Mittelpunkt der Gabel O in einer bedeutenden Entfernung annimmt, oder derselbe selbst unterhalb der Gabel fällt, was nämlich geschieht, wenn die Krümmung der Gabel MAN convex ist, wird es angemessen sein, den Winkel φ aus der Rechnung fortzuschaffen und statt seiner den Bogen Cc, durch welchen der Mittelpunkt c der cylindrischen Axe schon aus der natürlichen Lage C fortgeschritten ist, in die Rechnung einzuführen. Setzen wir daher diesen Bogen $Cc=s$, so wird, weil der Abstand $OC=Oc=e$ ist, dieser Bogen

$$s=e\theta,$$

und damit derselbe einfacher in die Rechnung eingeführt werde, setzen wir statt αe und $\alpha' e$ die Buchstaben β und β', so dass

$$\alpha=\frac{\beta}{e} \text{ und } \alpha'=\frac{\beta'}{e}$$

wird. Hierdurch wird sowohl dieser Bogen $Cc=s$, als auch die Schiefe des Pendels oder der Winkel $Chc=\varphi$ auf folgende Weise bestimmt werden:

$$s=\beta c\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)+\beta' c\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}}+\delta'\right)$$

und

$$\varphi=\frac{\beta(h-e)}{e}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)+\frac{\beta'(h'-e)}{e}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}}+\delta'\right).$$

Die augenblicklichen Aenderungen derselben oder die Geschwindigkeiten werden aber sein:

$$\frac{ds}{dt}=\beta c\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)+\beta' c\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}}+\delta'\right)$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\beta(h-e)}{e}\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}}+\delta\right)$$
$$+\frac{\beta'(h'-e)}{e}\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}}+\delta'\right).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass man, damit die ganze Bewegung innerhalb unendlich kleiner Grenzen eingeschlossen werde, für β und β' unendlich kleine Brüche setzen muss.

§. 1083. (Figur 143.) Es wird der Mühe werth sein, den Fall, in welchem die Gabel oben convex ist, hier besonders zu untersuchen. Es sei daher MAN die Figur der oben convexen Gabel, ihr Mittelpunkt liege in O und es sei die Tiefe des letztern unterhalb des Mittelpunktes C der cylindrischen Axe, nämlich der Zwischenraum $OC = i$. Nach Verlauf der Zeit t befinde sich aber der Mittelpunkt der cylindrischen Axe in c, so dass er den Bogen $Cc = s$ zurückgelegt hat. Setzt man nun die Schiefe des Pendels oder den Winkel $Chc = \varphi$ und den Abstand $cg = c$, so werden die vorhergehenden Formeln diesem Falle angepasst werden, indem man überall $-i$ statt e schreibt. Die beiden Grössen h und h' werden alsdann auf die folgende Weise ausgedrückt werden:

$$h = \frac{k^2 + c^2 - ci}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ck^2(c+i) + c^2(c-i)^2}$$

und

$$h' = \frac{k^2 + c^2 - ci}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ck^2(c+i) + c^2(c-i)^2}.$$

§. 1084. Um aber alle möglichen Bewegungen dieses Pendels zu bestimmen, stellen wir die folgenden Formeln auf:

$$s = \beta c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta' c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

und

$$\varphi = -\frac{\beta(h+i)}{i}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) - \frac{\beta'(h'+i)}{i}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right);$$

zur Bestimmung der Geschwindigkeiten dienen ferner die Ausdrücke

$$\frac{ds}{dt} = \beta c\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta' c\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\beta(h+i)}{i}\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) - \frac{\beta'(h'+i)}{i}\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right).$$

§. 1085. In Betreff aller dieser Formeln hat man angemessener Weise wohl zu bemerken, dass sie nur bestehen können, wenn beide Grössen h und h' positiv sind, weil sie sonst imaginär werden würden. Sobald diess aber eintritt, ist es ein Zeichen, dass ein solches Pendel über einer Gabel durchaus keine schwingende Bewegung annehmen kann, sondern, wenn ihm eine Bewegung beigebracht worden ist, herabfallen wird. Diess ist besonders hinsichtlich der Grösse h', in dem letztern Falle einer oben convexen Gabel, zu befürchten.

Anhang über die wackelnde oder schwankende Bewegung, durch welche die Wiegen angetrieben zu werden pflegen.

§. 1086. Ueber diese Bewegung habe ich schon früher eine Abhandlung veröffentlicht, wo ich besonders die wechselnde Bewegung der Wiegen auf einem ebenen Aestrich betrachtet und nach der Länge eines einfachen Pendels, welches seine Schwingungen in gleichen Zeiten ausführen würde, geforscht habe. Offenbar wird aber die gegenwärtige Behandlung auf diesen Fall zurückgeführt, wenn wir die ganze Masse des Pendels als über einer Gabel stehend voraussetzen, so dass kein Theil desselben sich bis innerhalb der Gabel erstrecke.

§. 1087. (Fig. 144.) Es stelle daher der Kreisbogen MAN die Figur des Aestrichs dar, über welchem die Wiegen sich bewegen sollen, der unterste Punkt desselben liege in A und der Mittelpunkt der Krümmung in O, und das, was wir vorhin die cylindrische Axe des Pendels genannt haben, wird hier vorzüglich den Körper der Wiegen ausmachen, dessen Mittelpunkt sich im Zustande des Gleichgewichts in C befinde. Es ist hierbei einleuchtend, dass der Krümmungshalbmesser der Grundfläche der Wiegen kleiner sein muss, als der Radius AO, wenn nämlich der Aestrich nach oben zu concav ist. Man setze daher wie vorhin den Abstand $OC = e$, und weil der ganze Körper sich oberhalb des Aestrichs befindet, setzen wir voraus, dass im Zustande des Gleichgewichts der Schwerpunkt des ganzen Körpers in G, unterhalb des Bewegungsmittelpunktes C und im Abstande $CG = c$ liege. Befände er sich nämlich oberhalb C, so würde, wie man leicht einsehen kann, keine wechselseitige Bewegung entstehen können.

§. 1088. Nach Verlauf der Zeit t sei nun der Mittelpunkt der Krümmung der Wiegen nach c gelangt, indem er den Bogen $Cc = s$ durchlaufen hat, so dass die aus O durch c gezogene gerade Linie Oc den Aestrich im Berührungspunkte treffe. Der Schwerpunkt des ganzen Körpers befinde sich aber jetzt in g, wobei $cg = c$ ist, und wenn man diese gerade Linie rückwärts verlängert, bis sie die Vertikale AO in h schneidet, wird der Winkel $Ahc = \varphi$ die Schiefe der Wiege angeben, deren Körper in der Figur fälschlich durch einen ganzen Kreis angedeutet ist. Es ist nämlich genügend, dass die Grundfläche, welche auf dem Aestrich steht, eine aus dem Mittelpunkte c beschriebene Krümmung habe, indem wir hier nur unendliche kleine Schwingungen

oder Schwankungen betrachten; es wird um so angemessener sein, diess zu bemerken, weil sonst der Schwerpunkt G kaum unterhalb C fallen würde. Endlich haben wir das Moment der Trägheit des ganzen Körpers der Wiege wie oben $= Mk^2$ gesetzt, wo M das Gewicht des ganzen Körpers bezeichnet, dessen Verhältniss wieder aus der Rechnung herausgetreten ist.

§. 1089. Nachdem wir diesen Zustand der Wiegen festgestellt haben, ist es nun klar, dass unendlich viele wechselseitige Bewegungen mehr stattfinden können, als ich früher angegeben habe, wo ich nämlich die ganze Untersuchung nur auf die regelmässigen Schwingungen beschränkt hatte. Ausserdem aber hatte ich dort einen ebenen Aestrich angenommen; die gegenwärtige Entwickelung dieses Gegenstandes ist nicht nur viel allgemeiner, sondern umfasst auch alle möglichen Bewegungen.

§. 1090. Um den Zustand der vorausgesetzten Wiegen gehörig kennen zu lernen, kommt die ganze Arbeit auf drei Elemente zurück, deren erstes der Abstand des Mittelpunktes des Aestrichs O, vom Mittelpunkte der Wiege C, welchen wir $= OC = e$ gesetzt haben. Das zweite Element ist die Tiefe des Schwerpunktes G unter dem Mittelpunkte der Bewegung C, diese haben wir $= GC = gc = c$ gesetzt. Das dritte Element ist aber das Quadrat k^2, durch welches die ganze Masse multiplicirt wird, um das Moment der Trägheit des ganzen Körpers in Bezug auf den Schwerpunkt G oder g zu bilden.

§. 1091. Setzt man nun den vom Mittelpunkte der Bewegung beschriebenen Weg $Cc = s$ und die Schiefe der Wiege oder den Winkel $Chc = \varphi$, so werden, nachdem man

$$h = \frac{k^2 + c^2 + ce}{2c} + \frac{1}{2c} \sqrt{k^4 + 2ck^2(c-e) + c^2(c+e)^2}$$

und

$$h' = \frac{k^2 + c^2 + ce}{2c} - \frac{1}{2c} \sqrt{k^4 + 2ck^2(c-e) + c^2(c+e)^2}$$

bestimmt hat, für jede gegebene Zeit t die Buchstaben s und φ folgendermaassen bestimmt:

$$s = \beta c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta' c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$$

und

$$\varphi = \beta \frac{h-e}{e} \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta' \frac{h'-e}{e} \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right).$$

Ist aber der Aestrich convex, so muss man $-i$ statt e setzen, wodurch sich die §. 1084. angeführten Formeln ergeben. Uebrigens hat man hier dasselbe zu beobachten, was oben ausführlich auseinander gesetzt worden ist.

Ergänzung,

die durch die Reibung gestörte Bewegung betreffend.

Kapitel I.

Von der Reibung im Allgemeinen.

Erklärung.

§. 1092. Die Reibung ist der Widerstand, welchen ein über einer rauhen Oberfläche fortschreitender und dieselbe streifender Körper bei seiner Bewegung erleidet. Es ist daher die Reibung eine der Richtung der Bewegung entgegengesetzte und an der Grundfläche, mit welcher der Körper die Oberfläche berührt, angebrachte Kraft.

Zusatz 1.

§. 1093. So lange der Körper sich in Ruhe befindet, übt die Reibung durchaus keine Kraft aus, sobald aber jener sich bewegt, entsteht plötzlich ihre der Bewegung immer entgegengesetzte und daher dieselbe verzögernde Kraft.

Zusatz 2.

§. 1094. Wird ein Körper durch irgend eine Kraft angetrieben, so widersetzt sich, wenn jener auch ruhet, die Reibung dieser Kraft, weil sie sogleich bei der ersten Erzeugung der Bewegung existirt, und nur wenn die antreibende Kraft die Reibung überwiegt, wird der Körper sich bewegen können.

Zusatz 3.

§. 1095. Weil die Richtung der Reibung der Richtung der Bewegung stets entgegengesetzt ist, wird mit der Aenderung der letztern zugleich die Richtung der Reibung eine andere. Sobald aber der Körper zur Ruhe gebracht wird, verschwindet plötzlich die Reibung ebenso, wie die Richtung der Bewegung aufgehoben wird.

Erläuterung.

§. 1096. Um diess die Reibung Betreffende deutlich zu machen, wird es angemessen sein, alle Umstände zu beachten, welche irgend etwas zur Reibung beitragen zu können scheinen, wenn auch noch keinesweges klar ist, was jeder derselben zu bewirken im Stande ist. Zuerst muss man die Oberfläche betrachten, über welcher die Bewegung geschieht und es kommt wenig darauf an, ob diese eben ist oder nicht, weil man zu jeder Zeit auf die Stelle der Berührung zu sehen hat. (Fig. 145.) Es sei daher EF die Oberfläche, welche wir als eine Ebene betrachten, indem man nämlich leicht das Urtheil von dieser auf convexe und concave Oberflächen wird ausdehnen können. Die Rauhigkeit dieser Fläche wird demnach einen vorzüglichen Platz unter den Ursachen der Reibung einnehmen, denn wenn dieselbe vollkommen polirt und glatt wäre, so würde gar keine Reibung stattfinden können; hieraus schliesst man, dass die Reibung desto grösser sein muss, je rauher die Oberfläche ist. Ferner ist die Grundfläche des Körpers AB, in welcher die Berührung geschieht, in die Rechnung einzuführen. Ob deren Grösse und Figur etwas zur Reibung beitrage, ist noch nicht entschieden, ihre Rauhigkeit aber in Verbindung mit der der Oberfläche hat man, so wie sie vorzüglich ein Hinderniss der Bewegung ist, als die Reibung erzeugend zu betrachten. In Betreff des Körpers $ABCD$ endlich ist ausser seiner Masse und den übrigen Eigenschaften, sein Druck gegen die Oberfläche ohne Zweifel von der grössten Wichtigkeit; denn wenn er durch gar keine Kraft gegen dieselbe gedrückt würde, so würde auch gewiss gar keine Reibung da sein und der Körper sich eben so bewegen, als wenn die Oberfläche fehlte. Da man endlich die Reibung nur bei der Bewegung wahrnimmt, würde man auch die Geschwindigkeit als ein ausgezeichnetes Moment der Reibung ansehen können, allein gegen die Erwartung werden wir sehen, dass die Geschwindigkeit auf keine Weise zur Bestimmung der Reibung etwas beiträgt. Diess ist um so mehr zu bewundern, als mit Aufhebung der Geschwindigkeit sicher alle Reibung aufhört. Bewegt sich demnach der Körper nach der Richtung BF über der Oberfläche, so wird eine Kraft da sein, welche ihn nach der entgegengesetzten Seite AE antreibt und diese Kraft nennt man die Reibung.

Anmerkung.

§. 1097. Ich werde hier zuerst die Reibung als eine Er-

scheinung betrachten, deren Grösse und Natur uns die Erfahrung kennen gelehrt hat, worauf ich nach ihren Ursachen, so weit es angeht, forschen werde. Da nämlich hier die physischen Eigenschaften der Körper, zu welcher Art die Rauhigkeiten der Oberflächen und die Weise, nach welcher zwei gegeneinander gedrückte Oberflächen sich wechelseitig ausweichen und mit ihren kleinsten Theilchen gewisse Eindrücke hervorbringen, gehören, gleichsam die ganze Arbeit ausmachen; so müssen wir, weil eine solche Kenntniss der Körper uns fehlt, uns begnügen, die Erscheinungen der Reibung so anzunehmen, wie die Erfahrung sie uns darbietet, eben so wie wir den Ursprung anderer Kräfte, deren Wirkung wir in der Mechanik entwickeln, keineswegs durchschauen. Wir wollen daher kurz erwägen, was uns durch die Erfahrung in Betreff der Natur der Reibung bekannt geworden ist.

Erscheinung 1.

§. 1098. Unter übrigens gleichen Umständen ist die Reibung nicht von der Geschwindigkeit des Körpers abhängig, sie übt vielmehr, mag der letztere geschwinder oder langsamer fortschreiten, dieselbe Kraft aus, deren Richtung immer der Richtung der Bewegung entgegengesetzt ist.

Zusatz 1.

§. 1099. Die Reibung kann demnach nicht als eine gewisse Function der Geschwindigkeit betrachtet werden, da sie stets dieselbe Grösse beibehält, mag die Bewegung eine sehr geschwinde oder sehr langsame sein. Indessen verschwindet sie jedoch plötzlich, wenn die Bewegung durchaus aufhört.

Zusatz 2.

§. 1100. Wenn auch die Reibung keinesweges von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängt, so wird doch ihre Richtung einzig und allein durch die Richtung der Bewegung bestimmt, indem sie nämlich dieser entgegengesetzt und an der Berührungsstelle selbst angebracht ist.

Anmerkung.

§. 1101. Diess ist von der absoluten Bewegung des Körpers zu verstehen, wenn die Oberfläche, über welcher der letztere fortschreitet, absolut ruhet; wenn aber diese Oberfläche selbst

sich bewegt, muss man das Urtheil aus der respectiven, auf die Oberfläche bezogenen Bewegung des Körpers ableiten. Befindet sich nämlich der Körper in Bezug auf die Oberfläche in Ruhe, mag er auch absolut sich beliebig bewegen, so ist keine Reibung vorhanden; bewegt er sich aber in Bezug auf die Oberfläche, so erlangt die Reibung diejenige Grösse, welche die Umstände erfordern und es trägt die Grösse der Bewegung nichts hierzu bei. Die Richtung der Reibung wird aber beständig durch die respective Richtung des Körpers in Bezug auf die Oberfläche bestimmt, und man darf daher hier nicht die Bewegung nach zwei oder drei Richtungen zerlegen und für eine jede, als ob sie allein da wäre, die Reibung bestimmen und daraus auf die ganze Reibung schliessen. So wie vielmehr die Grösse der Reibung nicht von der Grösse der Bewegung abhängig ist, muss man auch immer ihre Richtung durch diejenige, nach welcher der Körper auf der Oberfläche fortschreitet, bestimmen.

Uebrigens wird diese Erscheinung nicht so genau durch Versuche angegeben, dass sie durchaus keinem Zweifel unterworfen wäre, vielmehr scheinen sehr geschwinde Bewegungen ein wenig von dieser Regel abzuweichen. Stimmt diess mit der Wahrheit überein, so wollen wir es eher einer andern Ursache zuschreiben, als die aufgestellte Bezeichnung der Reibung abändern; und da die Abweichung sehr gering ist, vernachlässigen wir sie um so mehr, als wir manche andere sehr kleine Kräfte, welche aus derselben Quelle als die Reibung zu entspringen scheinen, zu vernachlässigen gezwungen werden. Hier will ich nämlich nur die Wirkungen untersuchen, welche man als aus der Reibung wie gewöhnlich entstanden anzusehen pflegt, ohne mich um andere Hindernisse der Bewegung zu bekümmern.

Erscheinung 2.

§. 1102. Unter übrigens gleichen Umständen ist die Grösse der Reibung weder von der Figur, noch von der Grösse der Grundfläche, mit welcher der Körper die Oberfläche berührt, abhängig; sondern es übt die Reibung, mag die Grundfläche grösser oder kleiner und von beliebiger Gestalt sein, immer dieselbe Kraft aus.

Zusatz 1.

§. 1103. (Fig. 145.) Setzen wir demnach die Grundfläche, womit der Körper die Oberfläche berührt oder $AB = b^2$, so tritt diese

Grösse nicht in den Ausdruck der Reibung ein, eben so wenig als die Geschwindigkeit des Körpers.

Zusatz 2.

§. 1104. Es ändert sich auch nicht die Reibung, im Fall die Berührung in einem einzigen Punkte erfolgt, was geschieht, wenn der Körper eine Kugel ist oder eine convexe Grundfläche hat; wenn nur der Körper die Oberfläche streift.

Anmerkung.

§. 1105. Diese Erscheinung, obgleich sie durch die sichersten Versuche bestätigt wird, erleidet doch eine Ausnahme, wenn der Körper in eine sehr scharfe Spitze ausgeht, womit er in die Oberfläche eindringen kann, in welchem Falle er ohne Zweifel ganz festgehalten werden würde. Es sind nämlich die Fälle auszunehmen, in welchen die Oberfläche durch den darüber fortgehenden Körper eine Beschädigung erleidet, welche wir hier auch nicht behandeln werden. Uebrigens erscheint es sehr paradox, dass aus der in einem einzigen Punkte erfolgenden Berührung eine eben so grosse Reibung hervorgehen kann, als aus einer ziemlich grossen Grundfläche, da die Reibung durch die Rauhigkeit der beiden Oberflächen, welche sich wechselseitig streifen, hervorgebracht wird, bei einer ausgedehnten Berührung aber mehr Rauhigkeit überwunden werden muss. Dieser Zweifel wird aber bald verschwinden, wenn wir zeigen, auf welche Weise die Reibung sich in Bezug auf den Druck verhalten muss.

Erscheinung 3.

§. 1106. Unter übrigens gleichen Umständen ist die Reibung der Kraft proportional, durch welche der Körper gegen die Oberfläche gedrückt wird und ist einem desto grössern Theile dieses Druckes gleich, je grösser die Rauhigkeit der wechselseitig einander streifenden Oberflächen ist.

Zusatz 1.

§. 1107. Wird der Körper durch gar keine Kraft gegen die Oberfläche, über welcher er fortgeht, gedrückt, so erleidet er auch keine Reibung; diese wird aber desto grösser, je mehr der Druck zunimmt.

Zusatz 2.

§. 1108. Ist demnach die Rauhigkeit dieselbe, so wird die Reibung, welche die über den Oberflächen fortgehenden Körper erleiden, einem gewissen bestimmten Theile des Druckes gleich und ist dieser Theil bekannt, so wird die Grösse der Reibung vollständig bestimmt.

Zusatz 3.

§. 1109. (Fig. 145.) Wird demnach der Körper $ABCD$ durch eine Kraft $= P$ gegen die Oberfläche gedrückt und geht er über derselben in der Richtung BF fort, so wird die Reibung $= \delta P$, wo δ jenen erwähnten Theil bezeichnet und es wird der Körper durch dieselbe nach der entgegengesetzten Richtung AE zurückgezogen.

Anmerkung 1.

§. 1110. Dieses ist ganz klar, wenn der Körper mit fortschreitender Bewegung über der Oberfläche einhergeht, in welchem Falle die Reibung der Richtung der Bewegung entgegengesetzt ist. Hat aber der Körper überdem eine gewisse drehende Bewegung, so muss man darauf sehen, in welcher Richtung die Basis die Oberfläche streift und dieser wird die Richtung der Reibung entgegengesetzt sein. Da nun die Grösse derselben aus dem Drucke sich ergibt, so wird man ihre Wirkung in Bezug auf die Störung der Bewegung des Körpers nach den oben aufgestellten Principien bestimmen können. Da übrigens die Reibung allein aus dem Streifen des Körpers und der Oberfläche an einander entspringt, so wird, wenn der Körper sich dermaassen wälzend fortbewegt, dass gar kein Streifen existirt, welche Bewegung eine vollkommene Fortwälzung genannt wird, auch keine Reibung stattfinden. Sobald aber die wälzende Bewegung ein wenig geschwinder oder langsamer wird, als jene Bedingung erfordert und so eine wenn auch sehr geringe Anreibung sich einmischt, übt sogleich die vollständige Reibung δP ihre Wirkung aus. Die hieraus entspringenden Erscheinungen müssen daher einen grossen Sprung enthalten, da für eine bestimmte Art der Bewegung alle Reibung plötzlich aufgehoben wird, hingegen, wenn die Bewegung nur um ein weniges davon abweicht, mit voller Wirkung vorhanden ist.

Anmerkung 2.

§. 1111. Eine ausgezeichnete Abkürzung der Rechnung er-

langen wir dadurch, dass die Reibung so einfach ausgedrückt wird und nur von dem Drucke P nebst dem Bruche δ, welchen die Rauhigkeit bestimmt, abhängt. Wäre sie nämlich überdem so wohl von der Geschwindigkeit des Körpers, als auch von seiner Grundfläche abhängig, so würden wir leicht in unentwickelbare Rechnungen versinken. Wollen wir aber die Rechnung der Praxis anpassen, so wird die ganze Arbeit auf die Bestimmung des Werthes von δ zurückgeführt und es genügt, denselben durch einen einzigen Versuch für die einzelnen Arten von Körpern zu ermitteln. Für Körper von Holz zeigen aber die Versuche, dass man dem Buchstaben δ einen Werth von ungefähr $\frac{1}{3}$ beilegen muss, wenn nämlich ihre Oberfläche mittelmässig behauen ist; ist sie aber ziemlich roh und rauh, so ergibt sich ein grösserer Werth. Umgekehrt erfordern metallische gehörig polirte Körper für den Buchstaben δ den Werth $\frac{1}{4}$, also einen kleinern. Aus dem Folgenden wird sich aber ergeben, auf welche Weise man in jedem Falle durch Versuche den angemessenen Werth des Bruches δ leicht ermitteln kann. Durch die Erfahrung haben wir aber gelernt, dass keine Oberfläche noch irgend ein Körper so vollkommen polirt werden kann, dass die Reibung gänzlich verschwinde; vielmehr findet man, dass sie immer noch einem ziemlich bemerkbaren Theile des Druckes gleich ist. Dasjenige, was wir oben in Betreff der Bewegung der Körper über einer höchst polirten Ebene, so dass keine Reibung entsteht, angeführt haben, findet in der Praxis keinesweges statt.

Aufgabe 1.

§. 1112. Ein auf einer beliebigen Oberfläche liegender Körper befindet sich in Ruhe und wird zugleich durch beliebige Kräfte angetrieben; man soll die Fälle unterscheiden, in welchen er entweder zur Bewegung angetrieben wird oder in Ruhe verharret.

Auflösung.

(Figur 145.) Alle Kräfte, durch welche der Körper $ABCD$ angetrieben wird, zerlege man in je zwei, von denen die eine normal gegen die Oberfläche, die andere ihr parallel ist. Es sei P die Summe aller auf die Oberfläche normalen Kräfte, alsdann wird, in so fern als der Körper durch sie gegen die Oberfläche gedrückt wird, P der Druck und δP die Reibung sein,

wenn der Körper sich bewegt. Was nun die andern Kräfte anbetrifft, so betrachten wir hier nur den Fall, in welchem dem Körper durch sie eine fortschreitende Bewegung beigebracht werden würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre; weil die drehende Bewegung eine weitere, später zu unternehmende Entwickelung erfordert. Da nun der Körper keine andere Bewegung als nach der Richtung der Oberfläche annehmen kann, so betrachte man die der letztern parallelen Kräfte als in Einem Punkte angebracht und suche die ihnen gleichgeltende Kraft. Es sei diese $= V$ und es treibe dieselbe den Körper längs der Richtung BF an; alsdann wird offenbar der Körper so lange in Ruhe verharren, als $V < \delta P$ ist und er wird sich nur dann bewegen können, wenn die antreibende Kraft V grösser als δP ist. Wir haben demnach für die antreibende Kraft V die Grenze δP, ist sie kleiner als diese, so erfolgt keine Bewegung, ist sie aber grösser, so wird dann erst eine Bewegung hervorgebracht.

Zusatz 1.

§. 1113. Da der Körper in Ruhe zu verharren fortfährt, so lange $V < \delta P$ ist, so hat man anzunehmen, dass die Reibung eine V gleiche und entgegengesetzte Kraft ausübe. Triebe sie nämlich stärker an, so würde der Körper sich nach der entgegengesetzten Seite AE bewegen müssen, was absurd wäre, da er nach der Seite BF hin angetrieben wird.

Zusatz 2.

§. 1114. Während demnach der Körper ruhet, übt die Reibung eine nicht bestimmte Kraft aus, aber in jedem Falle eine so grosse, als erfordert wird, um den Körper in Ruhe zu erhalten, wenn es nicht einer grössern Kraft als δP bedarf. Wird daher der Körper durch keine Kraft zur Bewegung angetrieben, so übt auch die Reibung keine Kraft aus.

Zusatz 3.

§. 1115. So lange daher die Bewegung durch eine Kraft, welche nicht grösser als δP ist, verhindert werden kann, ergibt auch die Reibung eine Kraft, und zwar nach der Richtung, welche zur Verhinderung der Bewegung erforderlich ist. Erfordert aber die Erhaltung der Ruhe eine grössere Kraft, so wird eine Bewegung erzeugt werden, weil die Reibung nicht so viel leisten kann.

Anmerkung 1.

§. 1116. Da wir oben gesagt haben, dass es bei der Ruhe der Körper *keine Reibung* gibt, so ist diess nur von der wahren Ruhe zu verstehen, in welcher der Körper verharren würde, wenn auch keine Reibung da wäre. Sobald aber der Körper durch Kräfte angetrieben wird, welche, wenn keine Reibung da wäre, ihn in Bewegung setzen würden; so kämpft die Reibung dieser Erzeugung der Bewegung entgegen, wenn auch der Körper sich noch in Ruhe befindet. Es ist daher die Reibung im Verhältniss zur Bewegung als zur Ruhe so zu erklären, dass sie, während der Körper sich bewegt, beständig eine δP gleiche Kraft in einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung ausübt. Während aber der Körper ruhet, übt sie eine nicht durch sich bestimmte, aber nur so grosse Kraft aus, als zur Verhinderung der Bewegung ausreicht, wenn es nicht etwa hierzu einer grössern Kraft als δP bedarf. Alsdann widersteht sie nämlich der Hervorbringung der Bewegung nur mit der Kraft δP, und da diese die Bewegung nicht zu verhindern vermag, wird die letztere wirklich erzeugt werden. Die Kraft δP ist nämlich die grösste, womit die Reibung wirken kann, womit sie in der That immer der Bewegung widersteht und womit sie auch, wenn es nöthig ist, der Erzeugung der Bewegung entgegenkämpft. Reicht aber eine kleinere Kraft hin, so übt sie auch nur eine kleinere aus; oder so oft es, um die Erzeugung der Bewegung zu verhindern, einer nicht grössern Kraft als δP bedarf, wird die Reibung diese Kraft liefern. Diess ist aber nur in Betreff der fortschreitenden Bewegung festzuhalten, wenn nämlich eine drehende hinzukommt, vorzüglich wenn die Drehungsaxe gegen die Oberfläche geneigt ist; so ist diess eine Sache höherer Forschung und weil in diesem Falle nicht alle Elemente der Grundfläche sich nach derselben Richtung bewegen und die Oberfläche streifen, muss man die Reibung der einzelnen Elemente in Betracht ziehen, wesshalb auch die Figur und Grösse der Grundfläche in die Rechnung eintritt. Auf diesen Umstand haben wir oben, wo wir die Figur der Grundfläche bei der Bestimmung der Reibung beseitigten, keine Rücksicht genommen.

Anmerkung 2.

§. 1117. Es ist freilich schwierig, die Ursache der Reibung, wie wir sie hier mit der Erfahrung übereinstimmend aufgestellt

haben, anzugeben, leicht ist es aber, die Ursachen, welche etwa im Geiste aufstossen, zu widerlegen. Es ist nämlich klar, dass weder aus einer gewissen Abschabung der Theilchen, noch aus einer Niederdrückung der Fasern, während der Körper über der Oberfläche einhergeht, die Reibung entspringen kann, weil alsdann nothwendig die Grösse der Grundfläche in die Rechnung eintreten würde. Dasjenige, was wir der Reibung, so weit sie der Erzeugung der Bewegung widersteht, zuschreiben, scheint auf folgende Weise nicht unpassend erklärt werden zu können. (Fig. 146.) Während nämlich der Körper $ABCD$ auf der Oberfläche EF liegt, hat man sich die Berührung nicht längs der Ebene AB, wie es die Sinne zeigen, zu denken, sondern wegen der sehr kleinen Erhöhungen und Vertiefungen an beiden Seiten, längs der faltigen und gleichsam wellenförmigen Oberfläche *ababab*, während in Folge des Druckes die Erhöhungen des einen Körpers in die Vertiefungen des andern eindringen. Gibt man diess zu, so kann der Körper sich nicht bewegen, ohne dass er zugleich ein wenig über die Oberfläche AB gehoben wird, oder es muss der erste Eindruck der Bewegung nicht längs der AB parallelen Richtung OV, sondern längs einer gewissen geneigten Richtung OS erfolgen; die letztere wird nämlich gleichsam dem grössten Abhange an jener faltigen Berührungsstelle parallel sein. Dieser Abhang oder diese Schiefe entspricht der Rauhigkeit beider Oberflächen an der Berührungsstelle so, dass für eine grössere oder kleinere Rauhigkeit der Winkel VOS grösser oder kleiner gedacht werden muss. Man setze daher $VOS = \zeta$, und es werde der Körper gegen die Oberfläche durch die Kraft $OP = P$ gedrückt, alsdann wollen wir sehen, einer wie grossen längs der Richtung OV wirkenden Kraft es bedarf, damit der Körper sich aus seiner Lage zu bewegen vermag. Es sei demnach die Kraft $OV = V$ wirksam, in Folge welcher der Körper nach der Richtung OS durch eine Kraft $= V\cos\zeta$ angetrieben werden wird; die Kraft des Druckes $OP = P$ widersteht aber dieser Wirkung mit einer Kraft $= P\sin\zeta$. Wenn daher nicht

$$V\cos\zeta > P\sin\zeta \text{ oder } V > P\,\mathrm{tg}\,\zeta$$

ist, wird der Körper nicht aus der Ruhe gebracht werden; oder so lange als die antreibende Kraft

$$V < P\,\mathrm{tg}\,\zeta$$

ist, wird der Körper in Ruhe verharren. Diess stimmt vortreff-

lich mit dem Obigen überein, indem wir statt jenes Bruches δ hier die Tangente eines gewissen Winkels ζ haben.

Ich muss aber gestehen, dass ich hieraus nicht ersehe, warum während der Bewegung des Körpers die dieser entgegengesetzte Kraft der Reibung auch $P \operatorname{tg} \zeta$ gleich sein muss. Da nämlich die Grundfläche des Körpers sich wechselweise aus jenen Vertiefungen entfernt und in sie eindringt, so sieht man nicht deutlich ein, einen wie grossen Verlust die Bewegung hierdurch erleiden wird. Weil jedoch die aufgestellte Hypothese hierdurch nicht umgestürzt wird, wollen wir bei ihr verharren und die hier angegebene Ursache als von der Wahrheit nicht abweichend ansehen.

Kapitel II.

Von der durch die Reibung gehinderten fortschreitenden Bewegung schwerer Körper.

Aufgabe 2.

§. 1118. Ein schwerer Körper geht über einer horizontalen Ebene mit fortschreitender Bewegung fort; man soll die, aus der Reibung entspringende Verzögerung der letztern bestimmen.

Auflösung.

(Figur 147.) Es sei M die Masse oder das Gewicht des Körpers, welcher die horizontale Ebene EF mit seiner Grundfläche AB berührt, und zwar muss die letztere gleichfalls horizontal sein. Man betrachte des Körpers Mittelpunkt der Trägheit O, in welchem man sich sein Gewicht M vereinigt denkt, so dass der Körper abwärts durch die Kraft $OP = M$ angetrieben wird, und da diese auf die Ebene EF normal ist, so wird der Körper gegen die letztere durch eine eben so grosse Kraft gedrückt. Hierbei bemerke ich zuerst, dass die fortschreitende Bewegung nur stattfinden kann, wenn die gerade Linie OP innerhalb der Grundfläche AB des Körpers fällt. Aber diess reicht noch nicht hin. Da nämlich der Körper, wenn er nach der Richtung BF fortschreitet, in Folge der Reibung nach der entgegengesetzten Richtung BE durch eine Kraft $= \delta M$ zurückgezogen wird, wo $1 : \delta$ das Verhältniss des Druckes zur Reibung bezeichnet; so hat diese Kraft das Bestreben, dem Körper um eine horizontale und durch O gehende Axe eine drehende Bewegung beizubringen, deren Moment $= \delta M . OP$ ist. Wenn der Körper dieser Kraft Folge leistete, würde im ersten Augenblick

der Punkt A der Grundfläche sich zu erheben anfangen, so dass der ganze Körper sich auf den Endpunkt B der Grundfläche stützte und es würde hierdurch auch der Druck übertragen werden. In diesem zur Drehung geneigten Zustande, hat man anzunehmen, wird der Körper in B aufwärts gedrängt durch die Kraft $BM = M$, woraus das der Drehung widerstehende Moment $= M.BP$ entspringt; ist diess nicht grösser als jenes $\delta M.OP$, so wird der Körper in Wirklichkeit sich zu drehen anfangen. Da wir nun hier nur die fortschreitende Bewegung betrachten wollen, so ist ausserdem die Bedingung erforderlich, dass

$$BP > \delta . OP$$

sei, welche wir daher als stattfindend annehmen. Es sei demnach im Anfange die Geschwindigkeit des Körpers nach der Richtung $EF = c$ gewesen, er habe nach Verlauf der Zeit t den Weg $= s$ zurückgelegt und besitze alsdann die Geschwindigkeit $= v$. Weil nun die Kraft δM der Bewegung entgegengesetzt ist, haben wir

$$\frac{dv}{2g dt} = -\frac{\delta M}{M} = -\delta,$$

also

$$v = c - 2g\delta t.$$

Weil ferner $ds = v dt$ ist, wird

$$s = ct - \delta g t^2.$$

Die Bewegung wird aber nur so lange dauern, bis der Körper zur Ruhe gebracht ist, zu welcher Zeit die Reibung δM plötzlich aufhört; der Körper wird demnach zur Ruhe gelangen nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{c}{2\delta g}$$

und nach Durchlaufung des Weges

$$= \frac{c^2}{4\delta g}.$$

Zusatz 1.

§. 1119. Damit ein schwerer Körper also über einer horizontalen Ebene mit fortschreitender Bewegung einhergehen könne, muss das aus dem Mittelpunkte der Trägheit O auf die Ebene gefällte Perpendikel OP nicht nur innerhalb der Grundfläche AB fallen, sondern auch von dem vordern Ende B der letztern so weit entfernt sein, dass

$$BP > \delta . OP$$

werde.

Zusatz 2.

§. 1120. Zieht man daher aus dem Mittelpunkte der Trägheit O ausser dem Perpendikel OP nach dem vordern Ende B der Grundfläche die gerade Linie OB, so muss der Winkel

$$BOP > \text{arc.tg}\,\delta$$

sein. Ist desshalb $\delta = \frac{1}{3}$, so muss $BOP > 18^0\,26'$ sein. Wäre er kleiner, so würde der Körper beim Fortschreiten zugleich fortgewälzt werden.

Zusatz 3.

§. 1121. Wenn aber der Körper mit einer reinen fortschreitenden Bewegung vorwärts geht, so wird seine Bewegung eine gleichförmig verzögerte und derjenigen ähnlich sein, mit welcher ein mit der Geschwindigkeit c aufwärts geworfener Körper aufsteigen würde, indem eine Kraft, welche sich zu seiner Masse wie $\delta : 1$ verhält, ihn abwärts antriebe; nur mit dem Unterschiede, dass hier der zur Ruhe gebrachte Körper beständig in derselben verharren wird.

Anmerkung 1.

§. 1122. Damit einem solchen ruhenden Körper Bewegung beigebracht werde, muss er nach der horizontalen Richtung durch eine Kraft angetrieben werden, welche grösser als $\delta . M$ ist. So lange eine kleinere Kraft ihn antreibt, wird er in Ruhe verharren, wenn er nicht etwa zur Fortwälzung angeregt wird und wann diess eintreten muss, wollen wir genauer untersuchen. Es werde demnach zuerst der Körper nach der durch seinen Mittelpunkt der Trägheit O gehenden horizontalen Richtung durch eine Kraft $OS = S$ angetrieben, so dass

$$S < \delta M$$

sei; alsdann wird die Reibung mit einer gleichen Kraft S längs BA entgegenwirken. Die Beurtheilung, ob er um das Ende B sich fortwälzen wird, erlangt man aus dem Momente der Reibung $S.OP$ und dem Momente des nach B übertragenen Druckes M, welches $= M.BP$ ist. Wenn daher

$$S.OP > M.BP$$

ist, so wird der Körper fortgewälzt werden, ist aber

$$S.OP < M.BP,$$

so wird er in Ruhe bleiben, indem nämlich die im Mittelpunkte der Trägheit O angebrachte antreibende Kraft $OS = S$ nichts hierzu beiträgt. Es sei nun S unterhalb des Mittelpunktes der Trägheit in R angebracht; weil hieraus das der Fortwälzung

entgegengesetzte Moment $= S.OR$ entspringt, so muss, damit der Körper nicht fortgewälzt werde,

$$S.OR + M.BP > S.OP \text{ oder } S.PR < M.BP$$

sein. Hieraus ergibt sich zugleich, dass, im Fall die horizontale Kraft S höher in r angebracht ist, der Körper der Fortwälzung nicht unterworfen sein wird, wenn

$$S.Pr < M.BP$$

ist, wobei wir $S < \delta M$ angenommen haben. Dasselbe wird noch deutlicher, wenn wir den Punkt B als feste Axe und den Körper als um sie beweglich betrachten. Alsdann ist nämlich das Moment der Kraft $rv = S$ im Sinne $DC = S.Pr$, es entspringt aber aus dem in O vereinigten Gewichte des Körpers M das Moment im entgegengesetzten Sinne $= M.BP$; es wird daher der Körper fortgewälzt werden, wenn

$$S.Pr > M.BP$$

und ruhen, wenn $\quad S.Pr < M.BP.$

Anmerkung 2.

§. 1123. Ist aber die Kraft $rv = S$ grösser als δM, so wird dem Körper eine fortschreitende Bewegung eingeflösst durch den Ueberschuss $S - \delta M$, weil jetzt die Reibung nur mit der Kraft $= \delta M$ längs der Richtung BE entgegenwirkt. Ob aber der Körper zugleich eine drehende Bewegung annehmen wird, oder nicht, wird man auf folgende Weise erkennen. Indem ich nämlich die fortschreitende Bewegung zur Seite lasse, nehme ich an, dass dem Körper keine andere drehende Bewegung beigebracht werden könne, als um eine horizontale, durch den Mittelpunkt der Trägheit O gehende und auf die Richtung der Bewegung OS normale Axe. Um diese Bewewegung zu erforschen, wird, da der Punkt B der Grundfläche immer in der horizontalen Ebene bleibt, sobald der Punkt A sich zu erheben anfängt, der ganze Druck im Punkte B ausgeübt werden, so, dass man alsdann in demselben Punkte die aufwärts treibende Kraft $BM = M$ hat. Nun erhält man aus den Kräften $rv = S$, $BE = \delta M$, $OP = M$ und $BM = M$ das die Umwälzung hervorbringende Moment $\quad = S.Or + \delta M.PO - M.BP;$
damit daher der Körper allein mit fortschreitender Bewegung fortgeführt werde, ist die Bedingung erforderlich, dass

$$S.Or + \delta M.PO < M.BP$$

sei, wobei nach der Voraussetzung $S > \delta M$ ist. Ist die horizontale Kraft S unterhalb des Mittelpunktes der Trägheit in R an-

gebracht, so wird der Körper der Umwälzung nicht unterworfen sein, wenn

$$\delta M.PO < M.BP + S.OR \quad \text{oder} \quad S.OR + M.BP > \delta M.PO$$

ist. Hieraus ersehen wir deutlich, wieviel sowohl die Ausdehnung der Grundfläche oder der Abstand des aus dem Mittelpunkte der Trägheit gefällten Perpendikels OP von ihren Endpunkten, als auch die Höhe des Mittelpunktes der Trägheit über der horizontalen Ebene und ferner die Höhe, in welcher die horizontale Kraft angebracht ist und die Reibung selbst dazu beitragen, dass keine Fortwälzung zu befürchten sei.

Aufgabe 3.

§. 1124. (Fig. 148.) Wenn der schwere Körper $ABCD$ auf der geneigten Ebene EF liegt, soll man die Bedingungen bestimmen, unter denen er in Folge der Reibung in Ruhe bleiben wird.

Auflösung.

Es sei der Winkel, welchen die geneigte Ebene EF mit dem Horizonte GF bildet oder $GFE = \zeta$, die Masse des aufliegenden Körpers $= M$, der Mittelpunkt der Trägheit befinde sich in O und es liege der Körper mit der Grundfläche AB auf der geneigten Ebene. Man ziehe die vertikale gerade Linie OQR, längs welcher der Körper als in Folge der Schwere durch die Kraft $= M$ angetrieben gedacht werden muss und man zerlege die letztere nach den Richtungen OP und OC, jene auf die Ebene EF normal, diese ihr parallel; alsdann wird, weil $POQ = GFE = \zeta$ ist,

$$OP = M\cos\zeta \quad \text{und} \quad OC = M\sin\zeta.$$

Durch jene Kraft OP wird der Körper gegen die Ebene EF gedrückt, wesshalb, wenn er sich bewegte, die Reibung $= \delta M\cos\zeta$ sein würde; durch diese Kraft OC wird aber der Körper zur Bewegung längs der Richtung EF der geneigten Ebene angetrieben. Der Körper wird daher nur dann eine fortschreitende Bewegung erlangen, wenn

$$M\sin\zeta > \delta M\cos\zeta$$

ist und damit er in Ruhe bleibe, muss

$$M\sin\zeta < \delta M\cos\zeta \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\zeta < \delta$$

sein. Die erste zur Erhaltung der Ruhe erforderliche Bedingung ist demnach, dass

$$\operatorname{tg} F = \operatorname{tg}\zeta < \delta$$

sei, wo der Bruch δ die Reibung bestimmt. Ferner ist aber

offenbar erforderlich, dass die vertikale gerade Linie OQ innerhalb der Grundfläche AB liege. Damit nämlich der Körper nicht um das Ende B fortgewälzt werde, muss das Moment der Kraft $OQ = M$ in Bezug auf den Punkt B, welches $= M.BQ \cos\zeta$ ist, positiv, also BQ positiv sein oder der Punkt Q innerhalb der Grundfläche AB liegen. Diess kann auch folgendermaassen mittelst der, um den Punkt O zu erzeugenden, drehenden Bewegung gezeigt werden. Denken wir uns nämlich, dass der Körper schon eine solche drehende Bewegung anfange, und während der Punkt A sich erhebt, der ganze Druck $M\cos\zeta$ nach B übertragen werde. Der Körper wird daher nun in B angetrieben, erstens durch die Kraft $BM = M\cos\zeta$, in Folge der Reibung aber zweitens durch die Kraft $BA = M\sin\zeta$, und es wird hiernach das die drehende Bewegung erzeugende Moment

$$= M\sin\zeta . OP - M\cos\zeta . BP$$

sein. Damit nun aber eine solche Bewegung nicht entstehe, muss

$$PB . \cos\zeta > OP \sin\zeta \text{ oder } BP > OP \operatorname{tg}\zeta,$$

oder weil $OP \operatorname{tg}\zeta = PQ$ ist,

$$BP > PQ, \text{ d. h. } BQ \text{ positiv}$$

sein. Damit also der auf der geneigten Ebene EF liegende Körper $ABCD$ in Ruhe bleibe, ist erstens erforderlich, dass die Vertikale OQ innerhalb der Grundfläche AB falle und zweitens, dass die Tangente des Neigungswinkels F kleiner als δ sei.

Zusatz 1.

§. 1125. Hieraus erlangen wir daher eine sehr leichte Weise, die Reibung oder den Bruch δ zu erforschen. Man erhebe nämlich die Ebene EF so weit, dass der Körper auf ihr herabzusteigen anfängt; alsdann wird die Tangente des grössten Winkels F, bei welchem der Körper noch in Ruhe verharret, den Werth des Bruches δ ergeben.

Zusatz 2.

§. 1126. Ist $\delta = 1/_3$, so wird der Körper so lange in Ruhe verharren, als der Erhebungswinkel GFE nicht grösser als $18^0 26'$ wird. Ist aber $\delta = 1/_4$, so muss dieser Winkel kleiner als $14^0 2'$ sein, und es wird demnach durch diesen Winkel umgekehrt der Werth von δ bekannt.

Zusatz 3.

§. 1127. Damit aber der Körper auf der geneigten Ebene in Ruhe bleibe, genügt es nicht, dass $\operatorname{tg} GFE$ kleiner als δ ist,

sondern es muss auch die Grundfläche des Körpers so ausgedehnt sein, dass

$$BP > OP \operatorname{tg} GFE$$

oder der Winkel BOP grösser als GFE werde.

Anmerkung.

§. 1128. In der Figur wird ein vertikaler Schnitt des Körpers dargestellt, welcher durch seinen Mittelpunkt der Trägheit O gelegt und zugleich auf die geneigte Ebene normal ist; in demselben ist daher die gerade Linie OP auf jene Ebene perpendikulär und es wird OC die Richtung der fortschreitenden Bewegung, welchen die Schwere dem Körper einzuflössen strebt. Es ergibt sich aber aus dem Gesagten, dass die fortschreitende Bewegung gehemmt wird, wenn $\operatorname{tg} F < \delta$ ist. Um nun die Beurtheilung, ob der Körper eine drehende Bewegung annehmen werde, durchzuführen, genügt es nicht, den Durchschnitt $ABCD$ und seine Basis AB allein zu betrachten; da es möglich ist, dass in diesem Durchschnitt der Körper nirgends auf der Ebene liegt, sondern die Berührung nur in den Endpunkten des Körpers stattfindet. Alsdann muss man daher die ganze Berührung betrachten und untersuchen, auf welche Weise und um welche Linie eine Umwälzung entstehen kann, was allerdings nach der Figur der Grundfläche beurtheilt werden muss. Wenn man demnach so unregelmässige Körper anwendet, dass dieses Urtheil zu schwierig ausfällt, so ist es angemessen, die Erfahrung zu Rathe zu ziehen, ob der Körper zur Fortwälzung geneigt sei. Der frühere Schluss in Betreff des Winkels F bleibt aber stehen, und hängt keinesweges von dieser Unregelmässigkeit ab.

Aufgabe 4.

§. 1129. Wenn die Erhebung der geneigten Ebene zu gross ist, als dass der schwere auf ihr liegende Körper $ABCD$ in Ruhe bleiben kann, so soll man die Bedingungen bestimmen, unter welchen er allein mit fortschreitender Bewegung über der geneigten Ebene EF herabsteigen wird.

Auflösung.

(Figur 148.) Es sei wie vorhin die Masse oder das Gewicht des Körpers $= M$, sein Mittelpunkt der Trägheit befinde sich in O und es sei δ der Reibungsexponent. Setzt man den Erhebungswinkel $GFE = \zeta$, so wird nach der Voraussetzung

$$\operatorname{tg} \zeta > \delta.$$

Aus der Kraft der Schwere $OQR = M$ schliessen wir nun auf einen Druck gegen die geneigte Ebene $= M \cos \zeta = OP$, und auf eine zum Herabsteigen antreibende Kraft $= M \sin \zeta = OC$. Da nun dieser die Reibung mit der Kraft $= \delta M \cos \zeta$ entgegenwirkt, so wird der Körper in Wirklichkeit zum Herabsteigen angetrieben werden durch den Unterschied beider Kräfte

$$M \sin \zeta - \delta M \cos \zeta = M (\sin \zeta - \delta \cos \zeta),$$

wodurch eine fortschreitende Bewegung hervorgebracht wird, wenn nur ausserdem keine drehende Bewegung im Körper entsteht. Wir wollen demnach sehen, unter welchen Bedingungen im Körper eine drehende Bewegung um eine horizontale, auf die Ebene COP normale und durch den Mittelpunkt der Trägheit O gezogene Axe erzeugt werden kann. Sobald der Körper eine solche Bewegung beginnt, wird sogleich der ganze Druck $M \cos \zeta$ nach B übertragen, so dass jetzt der Körper durch die Kraft $BM = M \cos \zeta$ und wegen der Reibung durch die Kraft $BA = \delta M \cos \zeta$ angetrieben wird, woraus das, die Drehung im Sinne $BADC$ erzeugende, Moment sich

$$= \delta M \cos \zeta . OP - M \cos \zeta . BP$$

ergibt. Damit also der Körper der Fortwälzung nicht unterworfen sei, muss diese Grösse negativ, mithin

$$BP > \delta . OP \text{ oder } \operatorname{tg} BOP > \delta$$

sein.

Zusatz 1.

§. 1130. Weil die gefundene Bedingung, dass $\operatorname{tg} BOP > \delta$ sei, nicht von der Neigung der Ebene EF abhängig ist, so wird, wenn der Körper bei einer kleinern Neigung der Fortwälzung nicht unterworfen ist, auch bei einer grössern Neigung keine Fortwälzung zu befürchten sein.

Zusatz 2.

§. 1131. Ist demnach $\delta = \frac{1}{3}$, so wird, wenn nur

$$BOP > 18^0 26'$$

ist, der Körper keine wälzende Bewegung annehmen, sondern entweder auf der geneigten Ebene ruhen, oder allein mit fortschreitender Bewegung herabsteigen.

Anmerkung.

§. 1132. Bei dieser Beurtheilung hat man aber für den Punkt B nicht den Endpunkt in dem, durch den Mittelpunkt der Trägheit O gelegten, Schnitte $ABCD$ anzunehmen, sondern sich

in der ganzen Grundfläche, in welcher die Berührung geschieht, eine Linie durch die am weitesten von P entfernten Endpunkte gezogen zu denken und hierauf den Abstand desselben von P als den Zwischenraum PB anzunehmen.

Aufgabe 5.

§. 1133. Ein Körper ist so beschaffen, dass keine Fortwälzung zu befürchten steht; man soll seine niedersteigende Bewegung über der geneigten Ebene EF bestimmen.

Auflösung.

Es werde die Masse des Körpers oder, was dasselbe ist, sein Gewicht $=M$ und die Erhöhung der Ebene über den Horizont oder der Winkel $GFE=\zeta$ gesetzt, so dass $\operatorname{tg}\zeta>\delta$ ist, weil sonst der Körper in Ruhe verharren würde. Es habe nun der Körper in der Zeit $=t$ auf der geneigten Ebene den Weg $=s$ zurückgelegt, wobei die Bewegung von der Ruhe ab begonnen hat; weil nun die beschleunigende Kraft $=M\sin\zeta$, welche aus der Schwere entspringt, die verzögernde und aus der Reibung hervorgehende Kraft aber $=\delta M\cos\zeta$ ist, so erlangen wir hieraus die Gleichung

$$\frac{dds}{2gdt^2}=\frac{M\sin\zeta-\delta M\cos\zeta}{M}=\sin\zeta-\delta\cos\zeta$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{ds}{dt}=2gt(\sin\zeta-\delta\cos\zeta).$$

Der letzte Werth drückt die in dieser Zeit t erlangte Geschwindigkeit aus, und es wird der inzwischen zurückgelegte Weg

$$s=gt^2(\sin\zeta-\delta\cos\zeta).$$

Zusatz 1.

§. 1134. Die Reibung verhindert daher den Körper nicht, auf der geneigten Ebene mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herabzusteigen, da die Geschwindigkeiten im Verhältniss der Zeiten wachsen. Sie nehmen aber in einem viel kleinern Verhältniss zu, indem, wenn die Reibung aufgehoben wäre,

$$s=gt^2\sin\zeta$$

sein würde.

Zusatz 2.

§. 1135. Beobachtet man die Zeit t, in welcher ein gegebener Weg s zurückgelegt wird, und hat man zugleich die Er-

höhung der Ebene oder den Winkel ζ bestimmt, so kann man daraus auf den Reibungsexponenten δ schliessen, indem

$$\delta = \operatorname{tg}\zeta - \frac{s}{gt^2 \cos\zeta}$$

sein wird.

Anmerkung.

§. 1136. Auf diese Weise wird man erforschen können, ob sich für die Ruhe derselbe Werth des Exponenten δ ergibt, als für die Bewegung, und zwar wenn die letztere geschwinder oder langsamer ist. Derartige Versuche sind aber bedenklich, weil ein geringer in der Beobachtung der Zeit t begangener Fehler eine grosse Störung hervorbringt. Ferner muss man aber auch auf den Widerstand der Luft Rücksicht nehmen, weil dieser besonders bei den geschwindern Bewegungen ein ausgezeichnetes Moment hervorbringen kann. Man wird daher nur, nachdem man sehr viele Versuche mit der höchsten Sorgfalt angestellt hat, auf etwas Sicheres in dieser Sache schliessen können. Damit aber der Widerstand der Luft keine Verzögerung bewirke, ist es angemessen, die Ebene nicht viel über den Zustand der Ruhe zu erheben, weil bei den langsamen Bewegungen ihre Wirkung sehr gering ist. Man mache aber alsdann den Körper so schwer als möglich, indem man ein Stück Blei innerhalb seines Umfanges einschliesst, jedoch so, dass die Grundfläche aus derjenigen Materie bestehe, deren Reibung man erforschen will.

Beispiel.

§. 1137. Gesetzt, die Länge der Tafel EF betrage 6 Fuss und es werde die Zeit t beobachtet, in welcher der Körper beim Niedersteigen diese ganze Länge zurücklegt; alsdann wollen wir sehen, ein wie grosser Unterschied in der Zeit t sich ergeben muss, wenn die Reibung δ sich um ein weniges ändert. Da nun $g = 15^5/_8$ Fuss ist, so wird die Zeit des Niedersteigens

$$t = \sqrt{\frac{48}{125(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}}.$$

Setzen wir nun $\delta = 1/3$ und, weil $\operatorname{tg}\zeta > 1/3$ sein muss, $\zeta = 20^0$, so finden wir die Zeit des Niedersteigens $t = 3'',652$, oder sehr nahe $t = 3^2/_3$ Secunden.

Es sei nun δ um ein Geringes grösser, nämlich $\delta = 1/3 + \frac{1}{100}$, wobei $\zeta = 20^0$ bleibt, alsdann ergibt sich die Zeit $t = 4'',45 = 4\frac{9}{20}$

Secunden. Wäre $\delta = \frac{1}{3} - \frac{1}{100}$ und unverändert $\zeta = 20^0$, so würde die Zeit $t = 3{,}171 = 3\frac{1}{6}$ Secunden werden.

Der hundertste Theil der Einheit im Werthe von δ erzeugt daher einen Zeitunterschied von $\frac{4}{5}$ Secunden in jenem und nur $\frac{1}{2}$ Secunde in diesem Falle, wesshalb man bei der Beobachtung der Zeit sehr aufmerksam sein muss. Gibt man der Ebene eine geringere Erhebung, so dass eine viel langsamere Bewegung entsteht; so ist es zweifelhaft, ob wir den Beobachtungen grosses Vertrauen schenken können. Die geringste Ungleichheit in der Oberfläche wird nämlich das Niedersteigen sehr zu stören vermögen, so dass, wenn man denselben Versuch einige Male wiederholt, die Erscheinungen sehr von einander abweichen können. Wegen dieser Ursache werden wir, wenn ich auch hier die Rechnung auf die hinsichtlich der Reibung aufgestellte Voraussetzung gründe, doch eine keinesweges vollständige Uebereinstimmung erwarten können, im Fall wir die daraus abgeleiteten Schlüsse mit der Erfahrung vergleichen.

Kapitel III.

Von der durch die Reibung verzögerten drehenden Bewegung schwerer Körper um eine feste Axe.

Aufgabe 6.

§. 1138. Man soll bewirken, dass ein Körper sich um eine feste und durch seinen Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe drehen könne.

Auflösung.

(Figur 149.) Soll der Körper sich um die Axe *GG* drehen, so muss er an beiden Seiten mit cylindrischen Zapfen *CEFD* versehen sein, durch deren Mitte die Axe *GG* geht, so dass diese zugleich die Axe beider Cylinder ist. Ich nehme hier nun ferner an, dass die Axe *GG* durch des Körpers Mittelpunkt der Trägheit *I* gehe, obgleich dieselbe Struktur beobachtet werden muss, wenn die gerade Linie nicht durch den Schwerpunkt des Körpers gehen soll. Dass während der Dauer der Bewegung diese gerade Linie *GG* fest bleibe, kann auf mehrfache Weise erreicht werden. Erstens können die cylindrischen Zapfen in feste Ringe von derselben Weite eingefügt werden, innerhalb welcher sie sich frei, wenigstens mit Ausnahme der Reibung, umzudrehen vermögen. Wenn aber die Weite der Ringe die der Cylinder *CEFD* nicht übertrifft, so ist zu befürchten, dass in Folge der zu engen Einfügung ein grosser Widerstand entstehe und wenn jene cylindrischen Zapfen nur ein wenig anschwellen, die ganze Bewegung gehemmt werde.

(Figur 150.) Zweitens können die cylindrischen Zapfen auf beiden Seiten in den Kanal *MLN*, welcher quadratförmig ausgehöhlt ist, gelegt werden, so dass die Berührung nur in den

drei Punkten *E, H* und *F* geschieht; während nämlich der Körper sich innerhalb dieser Höhlungen herumdreht, bleibt die Axe *GG* unbewegt. Damit aber die Bewegung nicht zu sehr gehindert werde, ist es nicht nöthig, dass beide vertikale Wände *M* und *N* den Cylinder berühren, sondern sie können um einen grössern Zwischenraum von einander abstehen. Sobald nämlich der Körper sich dreht, werden die cylindrischen Zapfen sich an eine der beiden Wände anlegen und es ist eben so, als ob die andere fehlte; diese wird daher nur hinzugefügt, damit der Körper, wenn er sich etwa im entgegengesetzten Sinne drehen sollte, sich auf gleiche Weise an sie anlegen könne.

(Figur 151.) Drittens können die cylindrischen Zapfen auch auf beiden Seiten in die Höhlung *MLN*, welche aus den zwei geneigten Ebenen *ML* und *NL* gebildet ist, gelegt werden. Auf diese Weise wird die Berührung beständig in den zwei Punkten *E* und *F* erfolgen und die Axe *GG* in Ruhe bleiben, wenn nur die Neigung jener Ebenen so gross ist, dass die cylindrischen Zapfen sich nicht über sie erheben, welche Bedingung wir später untersuchen werden.

(Figur 152.) Viertens kann man auch beide cylindrische Zapfen in Gabeln legen, welche in der cylindrischen Form *MLN* ausgehöhlt sind, in denen der Körper während der Ruhe so liegt, dass die Berührung im untersten Punkte *H* erfolgt. Dreht er sich aber, so wird die Berührung in einem andern höher gelegenen Punkte erfolgen, und da dieser, wie wir zeigen werden, immer derselbe bleibt; so wird die Axe *GG*, so lange die drehende Bewegung in demselben Sinne dauert, unbewegt bleiben. Es genügt hier, dass der Radius des Kreises *MLN* grösser sei, als der Radius der cylindrischen Zapfen, es muss aber dieser Höhlung eine so grosse Tiefe beigelegt werden, dass man ein Uebersteigen des Körpers über die Grenzen *M* und *N* nicht zu befürchten habe.

Zusatz 1.

§. 1139. Während der Körper auf diese Weise beiderseits in solchen Höhlungen liegt, drückt er gegen sie vermöge seines Gewichts, und befindet sich der Mittelpunkt der Trägheit *I* in der Mitte, so wird auf beiden Seiten ein gleicher Druck ausgeübt. Befindet er sich aber nicht in der Mitte, so ist der Druck dem Abstande umgekehrt proportional, die Summe aber dem ganzen Gewichte gleich.

Zusatz 2.

§. 1140. Dreht sich der Körper aber, so hängt der Druck nicht mehr allein von seinem Gewichte ab, sondern wird sich in Folge der Reibung ändern und muss daher nach dem Verhältniss der letztern bestimmt werden, woraus auch im letztern Falle der Berührungspunkt hergeleitet werden muss.

Anmerkung.

§. 1141. Der Druck und daher auch die Reibung wird sehr durch Kräfte gestört, welche den Körper, während er sich dreht, ausser der Schwere antreiben. Um nun diesen Gegenstand deutlich zu behandeln, wollen wir zuerst von solchen Kräften abstrahiren und den Körper nur als einen schweren ansehen, welchem im Anfange eine drehende Bewegung beigebracht worden ist; wir wollen alsdann untersuchen, wie stark die letztere in Folge der Reibung verzögert werden muss. Ferner wollen wir aber auch annehmen, dass die Drehungsaxe GG durch des Körpers Mittelpunkt der Trägheit I gehe und dass beide Zapfen gleich weit von ihm entfernt seien, so dass der Körper eine auf beiden Seiten ähnliche Gestalt hat. Damit ferner nicht schiefe Kräfte die Rechnung stören, setzen wir fest, dass die gerade Linie GG zugleich eine Hauptaxe des Körpers sein soll. Es erscheint nämlich keinesweges rathsam, indem wir dem Körper eine zu unregelmässige Form beilegen, unsere Untersuchungen durch schwierige Rechnungen zu verwickeln, da die bis jetzt aufgestellten Principien auch für die Entwickelung dieser Fälle ausreichen, wenn Jemand diese Arbeit unternehmen will. Der in der Figur 150. dargestellte Fall ist in der Figur 151. enthalten, wenn die eine Ebene vertikal und die andere horizontal wird; ferner werden wir sehen, dass auch der Fall der Fig. 152. nach jenen beurtheilt werden kann.

Aufgabe 7.

§. 1142. (Figur 153.) Die cylindrischen Zapfen des in der Figur 149. dargestellten Körpers werden auf beiden Seiten zwischen zwei beliebig geneigten Ebenen ML und NL unterstützt und es wird der Körper zur Drehung mit einer beliebigen Geschwindigkeit angetrieben; man soll die Reibung und ihre Wirkung auf die Verzögerung der Bewegung des Körpers bestimmen.

Auflösung.

Weil wir den Mittelpunkt der Trägheit I in der Mitte der

Axe GG liegend annehmen, so wird in Bezug auf die cylindrischen Zapfen auf beiden Seiten alles gleich sein. Es sei daher für den einen Zapfen der Radius der kreisförmigen Grundfläche $GE = GF = f$, und es seien E und F die Berührungspunkte. Zieht man nun die Vertikale GH, so setze man die Winkel $EGH = \zeta$ und $FGH = \eta$, durch welche die Lage der Ebenen ML und NL bestimmt wird; ferner drehe sich der Körper nach Verlauf der Zeit t im Sinne EF mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$, welche im Anfange $= \varepsilon$ gewesen sei. Weil nun auf dieser Seite der Körper in den Punkten E und F unterstützt wird, so seien E und F die Kräfte, mit welchen der Körper gegen die Ebenen drückt und durch welche er umgekehrt, längs der auf die letztern normalen Richtungen EG und FG angetrieben wird. Die Reibung wird ferner in den Punkten E und F, wo die Berührung stattfindet, so ausgeübt, dass der Körper in E längs EM durch eine Kraft $= \delta E$, und in F längs FL durch eine Kraft $= \delta F$ angetrieben wird und man wird demnach auf dieser Seite die vier Kräfte haben:

$$EG = E,\ FM = \delta E,\ FG = F \text{ und } FL = \delta F,$$

und eben so viele gleiche auf der andern Seite. Man setze daher die Masse oder, was dasselbe ist, das Gewicht des Körpers $= M$ und weil nun jede fortschreitende Bewegung ausgeschlossen wird, so müssen diese am Mittelpunkte der Trägheit angebrachten Kräfte sich gegenseitig aufheben. Man schliesst aber aus diesen vier Kräften auf die vertikale aufwärts gerichtete Kraft

$$E\cos\zeta + F\cos\eta + \delta E\sin\zeta - \delta F\sin\eta$$

und die horizontale nach der rechten Seite gerichtete

$$E\sin\zeta - F\sin\eta - \delta E\cos\zeta - \delta F\cos\eta;$$

die letztere muss verschwinden, die erstere dem halben Gewichte des Körpers gleich sein. Hieraus erhalten wir die Gleichungen:

$$E\sin\zeta - F\sin\eta = \delta(E\cos\zeta + F\cos\eta)$$

und

$$(1+\delta^2)(E\cos\zeta + F\cos\eta) = \tfrac{1}{2}M;$$

also

$$E\cos\zeta + F\cos\eta = \frac{M}{2(1+\delta^2)}$$

und

$$E\sin\zeta - F\sin\eta = \frac{M\delta}{2(1+\delta^2)}.$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir ab:

$$E = \frac{M(\sin\eta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta^2)\sin(\zeta+\eta)} \text{ und } F = \frac{M(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}{2(1+\delta^2)\sin(\zeta+\eta)},$$

und weil die Kräfte E und F nicht negativ sein können, so hat man hier sogleich zu bemerken, dass

$$\sin\zeta > \delta\cos\zeta \text{ oder } \operatorname{tg}\zeta > \delta$$

sein muss. Nun stelle man die aus der Reibung entspringenden Momente dar, welche sein werden

$$\delta(E+F)f = \frac{M\delta f(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta^2)\sin(\zeta+\eta)};$$

der doppelte Werth des letzten Ausdrucks wirkt der Bewegung entgegen. Wenn daher das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axe $GG = Ma^2$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d\Omega}{2gdt} = -\frac{\delta f[\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta]}{(1+\delta^2)a^2\sin(\zeta+\eta)} \text{ (§. 585)},$$

und wenn man integrirt,

$$\Omega = \varepsilon - \frac{2\delta fgt[\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta]}{(1+\delta^2)a^2\sin(\zeta+\eta)}.$$

Zusatz 1.

§. 1143. Je kleiner demnach f ist oder je dünner die cylindrischen Zapfen sind, desto geringer ist die Wirkung der Reibung. Man darf aber diese Zapfen nicht nach Belieben verkleinern, weil sie stark genug sein müssen, um die Last zu tragen, und es muss die Grösse f fast im halben Verhältniss des Gewichts M stehen.

Zusatz 2.

§. 1144. Ist $\zeta = 90^0$ und $\eta = 0$, wie in Figur 150., so ist das Moment der Reibung

$$= \frac{M\delta(1+\delta)f}{1+\delta^2}.$$

Ist aber $\eta = \zeta$, oder haben die Ebenen ML und NL gleiche Neigung gegen den Horizont, so wird das Moment der Reibung

$$= \frac{2M\delta f\sin\zeta}{(1+\delta^2)\sin 2\zeta} = \frac{M\delta f}{(1+\delta^2)\cos\zeta},$$

wobei $\operatorname{tg}\zeta > \delta$ sein muss.

Zusatz 3.

§. 1145. Am kleinsten wird aber das Moment der Reibung, wenn man $\operatorname{tg}\zeta = \delta$ annimmt, alsdann wird nämlich $F = 0$ und $E = \frac{M}{2(1+\delta^2)\cos\zeta} = \frac{M}{2\sqrt{1+\delta^2}}$ und daher das Moment der Reibung

$$= \frac{M\delta f}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

In diesem Falle stützt sich also der Körper allein auf die

Ebene ML, und es tritt die andere NL gar nicht in die Rechnung ein.

Zusatz 4.

§. 1146. Hieraus entwickelt man leicht den Fall der Figur 152., wie auch immer die Gestalt der Höhlung MLN sein mag. Die cylindrischen Zapfen werden sich nämlich in einem Punkte O anlegen, wo die Tangente mit dem Horizonte einen Winkel bildet, dessen Tangente $=\delta$ ist und es wird das Moment der Reibung
$$=\frac{M\delta f}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Anmerkung.

§. 1147. Es ist demnach angemessen, die cylindrischen Zapfen so zu unterstützen, dass die Berührung auf beiden Seiten in einem einzigen Punkte geschehe, weil alsdann das Moment der Reibung am kleinsten wird. Zu diesem Ende wird man sie passend in Höhlungen MLN (Figur 152.) legen, welche die Form eines Halbkreises, der ihre Dicke nicht viel übertrifft, haben, damit die Lage, welche sie bei der Bewegung einhalten, wenig von der Lage der Ruhe abweiche. Ferner muss man aber diese cylindrischen Zapfen möglichst dünn machen, so weit es nämlich ihre Festigkeit, im Vergleich mit der zu tragenden Last, gestattet. Ausserdem pflegen auch diese Zapfen mit Oel oder einer andern schlüpfrigen Materie eingeschmiert zu werden, damit die Anreibung desto mehr vermindert und dem Bruche δ ein kleinerer Werth verschafft werde. Indessen wird doch in dem von uns betrachteten Falle die Bewegung bald aufhören, was nach Verlauf der Zeit
$$t=\frac{\varepsilon(1+\delta^2)a^2\sin(\zeta+\eta)}{2\delta fg[\sin\zeta+\sin\eta-\delta\cos\zeta+\delta\cos\eta]}$$
geschieht. Wendet man aber zur Erhaltung der Bewegung Kräfte an, so kann nach denselben Principien ihre Grösse bestimmt werden, damit die Bewegung gleichförmig bleibe. Man pflegt ferner solche Maschinen, während sie zur Drehung angetrieben werden, zur Hebung von Lasten einzurichten, und damit diese Operation mit gleichförmiger Bewegung ausgeführt werde, bedarf es so grosser Kräfte, dass sie nicht nur den Widerstand der Last, sondern auch die Reibung zu überwinden vermögen. Wir wollen diesen Fall, welcher im gemeinen Leben sehr häufig vorkommt, hier entwickeln.

Aufgabe 8.

§. 1148. Man wendet einen Cylinder (Fig. 149.) zur Hebung irgend einer Last an und soll die an ihm anzubringenden Kräfte bestimmen, damit mit Rücksicht auf die Reibung die Bewegung eine gleichförmige bleibe.

Auflösung.

(Figur 154.) Es liege der eine cylindrische Zapfen, dessen Radius $GE = GF = f$ ist, auf den zwei geneigten Ebenen ML und NL, welche mit dem Horizonte die Winkel ζ und η bilden. Den letztern sind die Winkel gleich, welche die nach den Berührungspunkten E und F gezogenen Radien mit der vertikalen Linie GH bilden. Während aber der Körper sich im Sinne EF dreht, hebe er mittelst eines in der Mitte umgerollten Seiles eine Last $= Q$, welche durch ihr Gewicht Q am horizontalen Hebel $GS = s$ längs der vertikalen Richtung SQ der Bewegung widerstrebt. Ferner sei am Radius $GR = r$, welcher von der Vertikalen GA um den Winkel $AGR = \theta$ abweicht, beständig eine auf denselben normale Kraft $RP = P$ angebracht, deren Grösse man sucht, damit die Bewegung gleichförmig bleibe und wobei die Winkelgeschwindigkeit um die Axe $GG = \varepsilon$ ist. Man setze das Gewicht des Körpers, durch dessen Mittelpunkt der Trägheit die Axe GG geht, wie vorhin $= M$ und die Kräfte, durch welche der eine cylindrische Zapfen von den Ebenen, auf denen er in E und F liegt, zurückgestossen wird, nämlich die längs $EG = E$ und die längs $FG = F$. Aus denselben entspringen die Reibungen längs $EM = \delta E$ und längs $FL = \delta F$, und wie wir oben gesehen haben, ergibt sich hieraus die vertikal aufwärts gerichtete Kraft

$$= E\cos\zeta + F\cos\eta + \delta(E\sin\zeta - F\sin\eta)$$

und die horizontale nach rechts gerichtete

$$= E\sin\zeta - F\sin\eta - \delta(E\cos\zeta + F\cos\eta);$$

beide muss man, weil der cylindrischen Zapfen je zwei da sind, verdoppeln. Ferner erhalten wir aus dem Gewichte des Körpers die vertikal abwärts strebende Kraft $= M$ und aus der zu hebenden Last die Kraft $= Q$. Aus der antreibenden Kraft P entspringt aber die abwärts treibende Kraft $= P\sin\theta$ und die horizontal nach links gerichtete $= P\cos\theta$. Alle diese Kräfte müssen sich gegenseitig aufheben, und wir erhalten daher die Gleichungen:

$$E\cos\zeta + F\cos\eta + \delta(E\sin\zeta - F\sin\eta) = \tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}P\sin\theta$$

$$E\sin\zeta - F\sin\eta - \delta(E\cos\zeta + F\cos\eta) = \tfrac{1}{2}P\cos\theta.$$

Hieraus leiten wir ab

$$E\cos\zeta + F\cos\eta = \frac{M+Q+P\sin\theta - \delta P\cos\theta}{2(1+\delta^2)}$$

und

$$E\sin\zeta - F\sin\eta = \frac{\delta M+\delta Q+\delta P\sin\theta + P\cos\theta}{2(1+\delta^2)},$$

ferner

$$E = \frac{(M+Q+P\sin\theta)(\sin\eta+\delta\cos\eta)+P(\cos\eta-\delta\sin\eta)\cos\theta}{2(1+\delta^2)\sin(\zeta+\eta)}$$

und

$$F = \frac{(M+Q+P\sin\theta)(\sin\zeta-\delta\cos\zeta)-P(\cos\zeta+\delta\sin\zeta)\cos\theta}{2(1+\delta^2)\sin(\zeta+\eta)}.$$

Weil wir aber ausserdem eine gleichförmige Bewegung verlangen, müssen die Momente der Kräfte in Bezug auf die Drehungsaxe sich aufheben. Es ist aber das beschleunigende Moment $= Pr$, ferner sind die entgegenstehenden Momente $= 2\delta(E+F)f + Qs$, wesshalb nothwendig

$$Pr = 2\delta(E+F)f + Qs,$$

also

$$Pr - Qs = \frac{\left\{\begin{array}{c}\delta(M+Q+P\sin\theta)(\sin\zeta+\sin\eta-\delta\cos\zeta+\delta\cos\eta) \\ +\delta P(\cos\eta-\cos\zeta-\delta\sin\eta-\delta\sin\zeta)\cos\theta\end{array}\right\}}{(1+\delta^2)\sin(\zeta+\eta)} f$$

sein muss. Durch die letzte Gleichung kann man die antreibende Kraft P bestimmen.

Setzen wir nun voraus, dass die cylindrischen Zapfen in kreisförmigen Höhlungen unterstützt werden, wobei die Berührung an einem einzigen Orte geschieht, nämlich da, wo die Tangente gegen den Horizont unter einem Winkel $= \zeta$ geneigt ist; so wird $F = 0$, also

$$(M+Q+P\sin\theta-\delta P\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\zeta = \delta(M+Q+P\sin\theta) + P\cos\theta$$

und

$$E = \frac{M+Q+P\sin\theta-\delta P\cos\theta}{2(1+\delta^2)\cos\zeta}.$$

Aus der ersten dieser zwei Gleichungen folgt

$$P = \frac{(M+Q)(\delta-\mathrm{tg}\,\zeta)}{(\sin\theta-\delta\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\zeta-\cos\theta-\delta\sin\theta},$$

und substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung, welche jetzt

$$Pr - Qs = 2\delta Ef$$

ist; so ergibt sich

$$(M+Q)\delta f\cos\theta = (M+Q)r(\sin\zeta-\delta\cos\zeta)$$
$$+ Qs[(\sin\theta-\delta\cos\theta)\sin\zeta-(\cos\theta+\delta\sin\theta)\cos\zeta].$$

Nun setzen wir $\delta = \mathrm{tg}\,\lambda$, alsdann geht diese Gleichung über in

$$(M+Q)f\sin\lambda\cos\theta = (M+Q)r\sin(\zeta-\lambda) - Qs\cos(\zeta+\theta-\lambda),$$

woraus der Winkel ζ ermittelt werden muss. Hat man diesen gefunden, so wird

$$P = \frac{(M+Q)\sin(\zeta-\lambda)}{\cos(\zeta+\theta-\lambda)}$$

oder

$$P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q)f\sin\lambda\cos\theta}{r\cos(\zeta+\theta-\lambda)}.$$

Zusatz 1.

§. 1149. Liegt der cylindrische Zapfen an einer einzigen Stelle der hohlen Unterlage, so ergibt sich, wenn man für P seinen Werth substituirt, der Druck an derselben Stelle

$$E = \frac{(M+Q)\cos\theta}{2(1+\delta^2)\cos\lambda\cos(\zeta+\theta-\lambda)} = \frac{(M+Q)\cos\lambda\cos\theta}{2\cos(\zeta+\theta-\lambda)},$$

wobei $\delta = \operatorname{tg}\lambda$ gesetzt ist. Dieser Druck verschwindet demnach in dem Falle, dass $\cos\theta = 0$, vorausgesetzt dass nicht zugleich $\cos(\zeta+\theta-\lambda) = 0$ ist.

Zusatz 2.

§. 1150. Setzt man aber $\theta = 90^0$, so wird

$$(M+Q)r\sin(\zeta-\lambda) + Qs\sin(\zeta-\lambda) = 0,$$

mithin in diesem Falle $\zeta = \lambda$ oder $\operatorname{tg}\zeta = \delta$ und

$$P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q)f\sin\lambda}{r} \cdot \frac{0}{0}.$$

Da aber nun

$$E = \frac{M+Q+P}{2(1+\delta^2)\cos\lambda}$$

ist, so wird

$$Pr - Qs = \frac{\delta(M+Q+P)f}{(1+\delta^2)\cos\lambda} = (M+Q+P)f\sin\lambda,$$

und

$$P = \frac{Qs + (M+Q)f\sin\lambda}{r - f\sin\lambda}.$$

Zusatz 3.

§. 1151. Setzen wir $\theta = -90^0$, so wird zuerst, weil $F = 0$ ist,

$$(M+Q-P)\operatorname{tg}\zeta = \delta(M+Q-P),$$

weil aber ferner

$$E = \frac{M+Q-P}{2(1+\delta^2)\cos\zeta},$$

$$Pr - Qs = \frac{\delta f(M+Q-P)}{(1+\delta^2)\cos\zeta}.$$

Nimmt man daher $P = M+Q$ an, so verschwindet der Druck und also auch die Reibung und man muss

$$r = \frac{Qs}{M+Q}$$

nehmen.

Zusatz 4.

§. 1152. Wenn man aber in diesem Falle, wo $\theta = -90^0$ ist, nicht $P = M + Q$ setzt, so wird $\operatorname{tg}\zeta = \delta$ und

$$Pr - Qs = \frac{\delta f(M+Q-P)}{\sqrt{1+\delta^2}} = f(M+Q-P)\sin\lambda,$$

und hieraus
$$P = \frac{Qs + (M+Q)f\sin\lambda}{r + f\sin\lambda}.$$

Man muss aber r so annehmen, dass der Werth von E nicht negativ wird; in diesem Falle würde nämlich die Unterstützung von der entgegengesetzten Seite her geschehen und dort eine Reibung entstehen.

Anmerkung 1.

§. 1153. Auf diese Weise würde demnach die Reibung ganz aufgehoben werden können, indem man die Kraft P so anbrächte, dass sie mit dem Gewichte des Körpers M und der Last Q im Gleichgewicht wäre. Dieser Fall würde aber in der Praxis geringen Nutzen haben, weil die cylindrischen Zapfen innerhalb ihrer Vertiefungen, welche weiter als sie sein müssen, hin- und herwackeln und dieser Fehler mehr als die Reibung der Bewegung hinderlich sein würde. Ferner pflegen aber die meisten Maschinen dieser Art so eingerichtet zu werden, dass die antreibende Kraft P viel kleiner als die zu hebende Last Q, mithin noch weit mehr

$$P < M + Q$$

ist. Wollte man nämlich eine der Last gleiche Kraft anwenden, so könnte die Arbeit ohne Maschine ausgeführt werden, wesshalb man sich nicht darüber wundern darf, dass man in diesem Falle den Gewinn der Reibung erlangen kann. Nimmt man aber die Kraft P als gegeben an, so leitet man aus unsern Formeln, zur Bestimmung des Ortes ihrer Anbringung, die Grösse r her; wenn daher die Winkelgeschwindigkeit der Maschine $= \varepsilon$ ist, so wird die Last mit der Geschwindigkeit εs gehoben werden, die antreibende Kraft aber mit der Geschwindigkeit εr wirken. Wäre daher die Reibung nicht der Bewegung hinderlich, so würde

$$P\varepsilon r = Q\varepsilon s$$

sein, jetzt aber wird in Folge der Reibung

$$P\varepsilon r - Q\varepsilon s = 2\delta\varepsilon Ef$$

sein. Hierbei ist es angemessen zu bemerken, dass $P\varepsilon r$ die Wirksamkeit der antreibenden Kraft, $Q\varepsilon s$ aber die Grösse der in Einer Secunde hervorgebrachten Wirkung bezeichnet, indem εr und εs die in derselben Zeit zurückgelegten Wege sind. Diess muss man aber zur Theorie der Maschinen rechnen, welche man angemessener Weise besonders behandelt.

Anmerkung 2.

§. 1154. Ist die antreibende Kraft P nebst dem Winkel θ gegeben, und sucht man den Abstand, in welchem sie angebracht werden muss oder die Länge des Hebels $GR = r$; so findet man sogleich aus der ersten Gleichung den Winkel ζ oder den Punkt E, wo in der Höhlung die Berührung geschehen wird, nämlich

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\delta(M+Q+P\sin\theta)+P\cos\theta}{M+Q+P\sin\theta-\delta P\cos\theta}.$$

Um denselben zu erkennen, stelle man zwei Winkel λ und ξ auf, so dass

$$\operatorname{tg}\lambda = \delta \text{ und } \operatorname{tg}\xi = \frac{P\cos\theta}{M+Q+P\sin\theta}$$

ist; alsdann wird

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\operatorname{tg}\lambda+\operatorname{tg}\xi}{1-\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\xi}, \text{ also } \zeta = \lambda+\xi.$$

Hieraus ersieht man, dass $\zeta > \lambda$ sein wird, wenn $\cos\theta > 0$, d. h. wenn die gerade Linie GR aufwärts gerichtet ist; ist sie aber abwärts gerichtet, so wird $\zeta < \lambda$ sein und in diesem Falle könnte möglicherweise die Berührung im untersten Punkte erfolgen, wenn nämlich

$$P = \frac{\delta(M+Q)}{-\cos\theta-\delta\sin\theta}$$

wäre. Man erhält ferner den Druck

$$E = \frac{(M+Q+P\sin\theta-\delta P\cos\theta)\cos\lambda^2}{2\cos(\lambda+\xi)}$$
$$= \frac{P\cos\lambda\cos\theta}{2\sin\xi}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos\lambda\sqrt{(M+Q)^2+2P(M+Q)\sin\theta+P^2},$$

und hieraus schliesst man auf die Länge des Pendels

$$GR = r = \frac{Qs}{P}+\frac{f\sin\lambda}{P}\sqrt{(M+Q)^2+2P(M+Q)\sin\theta+P^2}.$$

Damit nun für dieselbe antreibende Kraft P der Druck E, also auch die Reibung so klein als möglich werde, muss der

Winkel $\theta = -90^0$ sein, oder man hat angemessener Weise den Hebel GR auf dem Radius GS anzunehmen. In diesem Falle wird, wie wir schon gesehen haben,

$$\xi = 0, \text{ also } \zeta = \lambda,\ E = \tfrac{1}{2}(M+Q-P)\cos\lambda$$

und

$$GR = r = \frac{Qs}{P} + \frac{f(M+Q-P)\sin\lambda}{P}.$$

Wir wollen nun auch die Bewegung eines Pendels untersuchen, welches auf ähnliche Weise an cylindrischen Zapfen aufgehängt ist, wobei die letztern nämlich auf beiden Seiten auf je zwei geneigten Ebenen liegen. Weil diese Bewegung eine wechselnde ist, wird es angemessen sein, diese Ebenen als gleich gegen den Horizont geneigt vorauszusetzen.

Aufgabe 9.

§. 1155. Ein Pendel schwingt um eine horizontale feste Axe, deren cylindrische Zapfen auf beiden Seiten auf je zwei gleich geneigten Ebenen liegen; man soll seine in Folge der Reibung gestörte Bewegung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 155.) Es sei $AEBF$ die Grundfläche des einen cylindrischen Zapfens, welcher auf den, unter dem Winkel ζ gegen den Horizont geneigten Ebenen ML und NL liegt, alsdann werden die Berührungspunkte in E und F liegen, so dass die Radien GE und GF mit der Vertikalen $ABLH$ den Winkel $= \zeta$ bilden. Alles diess mag auf der andern Seite sich eben so verhalten, damit die Drehungsaxe die horizontale gerade Linie GG sei. Ferner sei die Gestalt des Pendels auf beiden Seiten einander ähnlich, und es weiche jetzt, nach Verlauf der Zeit t, der Mittelpunkt der Trägheit I des Pendels von der vertikalen Lage um den Winkel $HGI = \varphi$ ab, von hier aus nähere er sich der vertikalen Lage mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$, so dass die drehende Bewegung im Sinne EBF erfolge. Die ganze Masse, oder was dasselbe ist, das Gewicht des Pendels sei $= M$, der Abstand $GI = h$ und sein Moment der Trägheit in Bezug auf die Drehungsaxe $GG = Mk^2$. Was nun die Wirksamkeit der Schwere betrifft, so darf man sich das ganze Gewicht M im Punkte I vereinigt denken. Man setze den Radius der cylindrischen Zapfen oder $GE = GF = f$, ferner seien die Kräfte, mit welchen die Ebenen diese unterstützen, längs $EG = E$ und längs $FG = F$, wonach die Reibung längs $EM = \delta E$ und längs $FL = \delta F$ sein wird. Aus diesen Kräften entspringt nun

wie oben §. 1142., wobei $\eta = \zeta$ ist, erstens die vertikale aufwärts gerichtete Kraft $= (E+F)\cos\zeta + \delta(E-F)\sin\zeta$, zweitens die horizontale nach rechts gerichtete $= (E-F)\sin\zeta - \delta(E+F)\cos\zeta$; das Gewicht ergibt ferner die abwärts gerichtete Kraft $= M$. Hiernach haben wir für die fortschreitende oder die Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit I erstens die vertikal abwärts gerichtete Kraft

1) $M - 2(E+F)\cos\zeta - 2\delta(E-F)\sin\zeta = P$,

zweitens die nach rechts gerichtete horizontale Kraft

2) $2(E-F)\sin\zeta - 2\delta(E+F)\cos\zeta = Q$.

Da aber die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit $= h\Omega$ ist, so ist die vertikale abwärts gerichtete Geschwindigkeit dieser Bewegung $= h\Omega\sin\varphi$ und die horizontale nach rechts gerichtete $= h\Omega\cos\varphi$; hieraus schliessen wir (§. 305), dass

3) $$\frac{h\sin\varphi\, d\Omega + h\Omega\cos\varphi\, d\varphi}{2g\,dt} = \frac{P}{M}$$

und 4) $$\frac{h\cos\varphi\, d\Omega - h\Omega\sin\varphi\, d\varphi}{2g\,dt} = \frac{Q}{M}$$

ist, wobei wir $\Omega dt = -d\varphi$ haben.

Da ferner der Körper sich um die feste Axe GG dreht, in Bezug auf welche das Moment der auf Beschleunigung wirkenden Kräfte $= Mh\sin\varphi - 2\delta(E+F)f$ ist, so wird (§. 585.)

5) $$\frac{d\Omega}{2g\,dt} = \frac{Mh\sin\varphi - 2\delta(E+F)f}{Mk^2}.$$

Substituiren wir diesen Werth in die beiden vorhergehenden Gleichungen, so erhalten wir

6) $$\frac{Mh^2\sin\varphi^2 - 2\delta(E+F)fh\sin\varphi}{Mk^2} - \frac{h\Omega^2\cos\varphi}{2g} = \frac{P}{M}$$

und 7) $$\frac{Mh^2\sin\varphi\cos\varphi - 2\delta(E+F)fh\cos\varphi}{Mk^2} + \frac{h\Omega^2\sin\varphi}{2g} = \frac{Q}{M};$$

also hieraus

8) $$\frac{Mh^2\sin\varphi - 2\delta(E+F)fh}{Mk^2} = \frac{P\sin\varphi + Q\cos\varphi}{M}$$

und 9) $$\frac{h\Omega^2}{2g} = \frac{Q\sin\varphi - P\cos\varphi}{M}.$$

Mittelst dieser Werthe hat man die Kräfte E und F zu bestimmen. Da aber $P + \delta Q = M - 2(1+\delta^2)(E+F)\cos\zeta$ ist, so wird $M - 2(1+\delta^2)(E+F)\cos\zeta$

$$= \frac{Mh^2\sin\varphi(\sin\varphi + \delta\cos\varphi) - 2\delta(E+F)fh(\sin\varphi + \delta\cos\varphi)}{k^2} - \frac{Mh\Omega^2(\cos\varphi - \delta\sin\varphi)}{2g}$$

und hieraus

$$10)\quad 2(E+F)[(1+\delta^2)k^2\cos\zeta-\delta fh(\sin\varphi+\delta\cos\varphi)]$$
$$=Mk^2-Mh^2\sin\varphi(\sin\varphi+\delta\cos\varphi)+\frac{Mhk^2\Omega^2(\cos\varphi-\delta\sin\varphi)}{2g}.$$

Substituirt man nun den hieraus sich für $E+F$ ergebenden Werth in die obige Gleichung 5), so erhalten wir

$$11)\quad \frac{d\Omega}{2gdt}=\frac{(1+\delta^2)h\cos\zeta\sin\varphi-\delta f-\frac{\delta fh\Omega^2(\cos\varphi-\delta\sin\varphi)}{2g}}{(1+\delta^2)k^2\cos\zeta-\delta fh(\sin\varphi+\delta\cos\varphi)},$$

durch welche Gleichung die Bewegung des Pendels mittelst der Formel
$$\Omega dt=-d\varphi$$
bestimmt werden kann.

Zusatz 1.

§. 1156. Hinsichtlich des Druckes in E ist es nicht zweifelhaft, dass er positiv wird, der Druck in F wird aber durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$2F\left[(1+\delta^2)\sin 2\zeta+\frac{2\delta fh}{k^2}\cos\zeta\cos\varphi-\frac{2\delta^2 fh}{k^2}\cos\zeta\sin\varphi\right]$$
$$=M\left[\sin\zeta-\delta\cos\zeta+\frac{\delta fh}{k^2}\cos\varphi\right]$$
$$-\frac{Mh^2\sin\varphi}{k^2}[\cos(\zeta-\varphi)+\delta\sin(\zeta-\varphi)]$$
$$+\frac{Mh\Omega^2}{2g}\left[\sin(\zeta-\varphi)-\delta\cos(\zeta-\varphi)+\frac{\delta fh}{k^2}\cos 2\varphi\right].$$

Hieraus muss sich ein positiver Werth von F ergeben, was geschieht, wenn nur $\operatorname{tg}\zeta>\delta$ und φ ein kleiner Winkel ist.

Zusatz 2.

§. 1157. Ist die Reibung nicht vorhanden oder $\delta=0$, so wird

$$1)\quad \frac{d\Omega}{2gdt}=\frac{h\sin\varphi}{k^2},$$

woraus man die oben bestimmte Bewegung der Pendel leicht herleitet. Zur Bestimmung der Kräfte E und F erhalten wir aber die Gleichungen:

$$2)\quad 2(E+F)k^2\cos\zeta=M\left[k^2-h^2\sin\varphi^2+\frac{hk^2\Omega^2\cos\varphi}{2g}\right]$$

$$3)\quad 2Fk^2\sin 2\zeta$$
$$=M\left[k^2\sin\zeta-h^2\sin\varphi\cos(\zeta-\varphi)+\frac{hk^2\Omega^2\sin(\zeta-\varphi)}{2g}\right],$$

und indem man (3) von (2) $\times 2\sin\zeta$ abzieht,

4) $2Ek^2 \sin 2\zeta$

$$= M\left[k^2 \sin\zeta + h^2 \sin\varphi \cos(\zeta+\varphi) + \frac{hk^2 \Omega^2 \sin(\zeta+\varphi)}{2g}\right].$$

Beide Kräfte E und F werden positiv, wenn

$$\operatorname{tg}\zeta > \frac{2gh^2 \sin\varphi \cos\varphi + hk^2 \Omega^2 \sin\varphi}{2gk^2 - 2gh^2 \sin\varphi^2 + hk^2 \Omega^2 \cos\varphi},$$

wobei man zu bemerken hat, dass $k^2 > h^2$ ist.

Zusatz 3.

§. 1158. Die gefundene Differentialgleichung (§. 1155., Gl. 11) geht, weil $dt = -\frac{d\varphi}{\Omega}$ ist, in die folgende Form über:

$$0 = \Omega d\Omega \left[(1+\delta^2) k^2 \cos\zeta - \delta fh(\sin\varphi + \delta\cos\varphi)\right]$$
$$- \delta fh\Omega^2 d\varphi\left[\cos\varphi - \delta\sin\varphi\right] + 2(1+\delta^2) gh\cos\zeta\sin\varphi d\varphi - 2\delta fg d\varphi,$$

und multiplicirt man diese durch

$$(1+\delta^2) k^2 \cos\zeta - \delta fh(\sin\varphi + \delta\cos\varphi),$$

so wird sie integrabel und man erhält:

$$C = \Omega^2 \left[(1+\delta^2) k^2 \cos\zeta - \delta fh(\sin\varphi + \delta\cos\varphi)\right]^2$$
$$+ 4g\int d\varphi\left[(1+\delta^2) h\cos\zeta\sin\varphi - \delta f\right]\left[(1+\delta^2) k^2 \cos\zeta - \delta fh(\sin\varphi + \delta\cos\varphi)\right].$$

Anmerkung.

§. 1159. Wenn wir dieses Integral entwickeln, so finden wir:

$$C = \Omega^2 \left[(1+\delta^2) k^2 \cos\zeta - \delta fh(\sin\varphi + \delta\cos\varphi)\right]^2$$
$$-4(1+\delta^2)^2 ghk^2 \cos\zeta^2 \cos\varphi - \delta(1+\delta^2) fgh^2 \cos\zeta\left[2\varphi - \sin 2\varphi - \delta\cos 2\varphi\right]$$
$$-4\delta(1+\delta^2) fgk^2 \varphi\cos\zeta - 4\delta^2 f^2 gh(\cos\varphi - \delta\sin\varphi).$$

Nehmen wir daher an, dass der Winkel HGI im Anfange $= \theta$ gewesen sei und dass zugleich das Pendel seine niedersteigende Bewegung von der Ruhe ab begonnen habe; so wird die Constante C so bestimmt, dass wir haben:

$$C = -4(1+\delta^2)^2 ghk^2 \cos\zeta^2 \cos\theta - \delta(1+\delta^2) fgh^2 \cos\zeta(2\theta - \sin 2\theta - \delta\cos 2\theta)$$
$$- 4\delta(1+\delta^2) fgk^2 \theta\cos\zeta - 4\delta^2 f^2 gh(\cos\theta - \delta\sin\theta).$$

Substituirt man diesen Werth, so wird das Pendel auf der andern Seite so lange aufsteigen, bis wieder $\Omega = 0$ wird; allein diese Bestimmung kann man im Allgemeinen nicht unternehmen. Wir haben aber auch die Aufgabe selbst nicht im weitesten Sinne aufgelöst, so dass sie sich auf alle Pendel von beliebiger Gestalt erstreckt, sondern wir haben erstens angenommen, dass die beiden cylindrischen Zapfen vom Schwerpunkte gleich weit entfernt seien. Zweitens haben wir einen solchen Bau des Pendels vorausgesetzt, dass die durch den Mittelpunkt der Trägheit I der Drehungsaxe GG parallel gezogene gerade Linie zu-

gleich eine Hauptaxe des Körpers sei. Fände diese Bedingung nicht statt, so würde man nicht sogleich die Momente der Kräfte auf die Drehungsaxe GG übertragen dürfen, sondern auch auf die schiefen Kräfte, welche an den Zapfen der Axe ungleichen Druck hervorbrächten, Rücksicht haben nehmen müssen; es würden sich daher auch die Formeln viel verwickelter ergeben haben. Um daher hieraus etwas für den Gebrauch herzuleiten, setzen wir die Schwingungen als sehr klein voraus und wollen nun sorgfältig untersuchen, auf welche Weise ihre Bewegung durch die Reibung gestört wird.

Aufgabe 10.

§. 1160. (Figur 155.) Ein auf dieselbe Weise, wie wir in der vorhergehenden Aufgabe angenommen haben, aufgehängtes Pendel führt sehr kleine Schwingungen aus; man soll seine durch die Reibung gestörte Bewegung bestimmen.

Auflösung.

Es bleibe alles, wie wir es in der vorhergehenden Aufgabe aufgestellt haben, und wenn im Anfange das Pendel unter dem Winkel $HGI=\theta$ geneigt gewesen ist, so mag es seine Bewegung in dieser Stellung von der Ruhe ab begonnen haben. Nach Verlauf der Zeit t sei der Winkel $HGI=\varphi$ und die Winkelgeschwindigkeit im Sinne $IH=\Omega$. In der gegenwärtigen Hypothese werden die Winkel θ und φ sehr klein sein und man kann sie statt der Sinusse und Cosinusse so einführen, dass ihre Potenzen, welche höher als das Quadrat sind, vernachlässigt werden. Hiernach nimmt die im vorhergehenden §. hergeleitete Integralgleichung die folgende Form an:

$$C=\Omega^2[(1+\delta^2)k^2\cos\zeta-\delta fh(\varphi+\delta-{}^1\!/_2\delta\varphi^2)]^2$$
$$-4(1+\delta^2)^2ghk^2\cos\zeta^2(1-{}^1\!/_2\varphi^2)+\delta^2(1+\delta^2)fgh^2(1-2\varphi^2)\cos\zeta$$
$$-4\delta(1+\delta^2)fgk^2\varphi\cos\zeta-4\delta^2f^2gh(1-\delta\varphi-{}^1\!/_2\varphi^2),$$

wo die Constante

$$C=-4(1+\delta^2)^2ghk^2\cos\zeta^2(1-{}^1\!/_2\theta^2)+\delta^2(1+\delta^2)fgh^2(1-2\theta^2)\cos\zeta$$
$$-4\delta(1+\delta^2)fgk^2\theta\cos\zeta-4\delta^2f^2gh(1-\delta\theta-{}^1\!/_2\theta^2)$$

ist. Entwickelt man daher diese Gleichung, so erhalten wir

$$\Omega^2[(1+\delta^2)k^2\cos\zeta-\delta^2fh]^2$$
$$=2gh[(1+\delta^2)^2k^2\cos\zeta^2-\delta^2(1+\delta^2)fh\cos\zeta+\delta^2f^2](\theta^2-\varphi^2)$$
$$-4\delta fg[(1+\delta^2)k^2\cos\zeta-\delta^2fh](\theta-\varphi).$$

Hierbei habe ich in dem Coëfficienten von Ω^2 den Winkel φ vernachlässigt, weil er in der Entwickelung zu höheren Poten-

zen geführt haben würde. Um diese Gleichung aufzulösen, setzen wir der Kürze wegen:

$$(1+\delta^2)k^2\cos\zeta-\delta^2 fh=A$$

und

$$(1+\delta^2)^2k^2\cos\zeta^2-\delta^2(1+\delta^2)fh\cos\zeta+\delta^2f^2=B,$$

so dass wir erhalten:

$$A^2\Omega^2=2Bgh(\theta^2-\varphi^2)-4A\delta fg(\theta-\varphi).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\Omega=0$, so finden wir, wie weit das Pendel aufsteigen wird, bis es wieder zur Ruhe gelangt. Dividiren wir aber durch $2g(\theta-\varphi)$, so erhalten wir

$$Bh(\theta+\varphi)-2A\delta f=0,$$

also

$$\varphi=-\theta+\frac{2A\delta f}{Bh},$$

oder es wird das Pendel auf der andern Seite jenseits H nur durch den Winkel

$$\theta-\frac{2A\delta f}{Bh}$$

aufsteigen.

Um ferner die Dauer dieser Schwingung zu erforschen, haben wir, weil

$$\Omega=\frac{\sqrt{2Bgh(\theta^2-\varphi^2)-4A\delta fg(\theta-\varphi)}}{A}=-\frac{d\varphi}{dt}$$

ist,

$$dt=\frac{-Ad\varphi}{\sqrt{2Bgh(\theta^2-\varphi^2)-4A\delta fg(\theta-\varphi)}}$$

$$=\frac{-Ad\varphi}{\sqrt{2g(\theta-\varphi)[Bh(\theta+\varphi)-2A\delta f]}}.$$

Hieraus findet man durch Integration

$$t=\frac{A}{\sqrt{2Bgh}}\,\text{arc.}\cos\left(\frac{Bh\varphi-A\delta f}{Bh\theta-A\delta f}\right).$$

Setzt man nun nach dem Obigen

$$\varphi=-\theta+\frac{2A\delta f}{Bh}\quad\text{oder}\quad\frac{Bh\varphi-A\delta f}{Bh\theta-A\delta f}=-1,$$

so ergibt sich die Zeit einer ganzen Schwingung

$$T=\frac{\pi A}{\sqrt{2Bgh}},$$

welche also nicht von der Weite der Schwingung abhängt, so dass alle sehr kleinen Schwingungen isochron bleiben, eben so als ob keine Reibung da wäre. Sie werden aber nicht in gleicher Zeit ausgeführt. Um nämlich zu bestimmen, wie sehr die Reibung auf die Dauer einer jeden Schwingung störend ein-

wirkt, suche man den Werth von $\frac{A}{\sqrt{B}}$, wobei wir die Dicke der cylindrischen Zapfen oder f als sehr klein betrachten. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{B}}=\frac{1}{(1+\delta^2)k\cos\zeta}+\frac{\delta^2 fh}{2(1+\delta^2)^2k^3\cos\zeta^2},$$

also

$$\frac{A}{\sqrt{B}}=k-\frac{\delta^2 fh}{2(1+\delta^2)k\cos\zeta}$$

und so die Zeit Einer Schwingung oder

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{2gh}}\left[k-\frac{\delta^2 fh}{2(1+\delta^2)k\cos\zeta}\right].$$

Hieraus ersieht man, dass in Folge der Reibung die Schwingungszeiten vermindert werden.

Zusatz 1.

§. 1161. Ist der Radius f der cylindrischen Zapfen sehr klein im Vergleich mit den Grössen k und h, so wird sehr nahe

$$B=A(1+\delta^2)\cos\zeta \text{ oder } \frac{A}{B}=\frac{1}{(1+\delta^2)\cos\zeta}.$$

Ist daher der erste Bogen der niedersteigenden Bewegung $=\theta$, so wird der folgende Bogen der aufsteigenden Bewegung

$$=\theta-\frac{2\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$$

und es ist dieser zugleich der Bogen der niedersteigenden Bewegung in der zweiten Schwingung.

Zusatz 2.

§. 1162. Die auf einander folgenden Schwingungen werden sich daher auf die folgende Weise verhalten:

In der Schwingung	Bogen der niedersteigenden Bewegung.	Bogen der aufsteigenden Bewegung.	Ganzer Bogen.
I.	θ	$\theta-\frac{2\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$	$2\theta-\frac{2\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$
II.	$\theta-\frac{2\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$	$\theta-\frac{4\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$	$2\theta-\frac{6\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$
III.	$\theta-\frac{4\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$	$\theta-\frac{6\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$	$2\theta-\frac{10\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$
IV.	$\theta-\frac{6\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$	$\theta-\frac{8\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$	$2\theta-\frac{14\delta f}{(1+\delta^2)h\cos\zeta}$

Zusatz 3.

§. 1163. Die Schwingungen werden so lange dauern, als die Bogen der aufsteigenden Bewegung positiv bleiben; sobald diese nämlich verschwinden oder selbst negativ werden, hört alle Bewegung auf. Damit ferner eine Bewegung entstehe, muss nothwendig

$$\theta > \frac{A\delta f}{Bh}$$

sein; ist nämlich $\theta =$ oder $< \frac{A\delta f}{Bh}$, so wird das Pendel in Folge der Reibung gänzlich in Ruhe gehalten, wenn es sich auch in geneigter Lage befindet.

Zusatz 4.

§. 1164. Damit demnach das Pendel wenigstens Eine Schwingung ausführe, muss

$$\theta > \frac{A\delta f}{Bh}$$

sein, wo $\frac{A}{B} = \frac{1}{(1+\delta^2)\cos\zeta}$ ist. Damit es zwei Schwingungen ausführe, muss

$$\theta > \frac{3A\delta f}{Bh},$$

damit es drei,

$$\theta > \frac{5A\delta f}{Bh}$$

und im allgemeinen muss, damit es n Schwingungen ausführe,

$$\theta > \frac{(2n-1)A\delta f}{Bh}$$

sein. Hierbei darf man aber die Zahl n nicht grösser annehmen, als dass der Winkel θ noch klein genug bleibe.

Anmerkung 1.

§. 1165. Was die Verminderung der einzelnen Schwingungszeiten betrifft, so ist es angemessen, zu bemerken, dass $\frac{k^2}{h}$ den Abstand des Schwingungsmittelpunktes von der Drehungsaxe bezeichnet und setzt man denselben $= l$, so wird die Zeit Einer Schwingung

$$= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 - \frac{\delta^2 f}{2(1+\delta^2)l\cos\zeta}\right].$$

Hier bemerke man aber zuerst, dass $\operatorname{tg}\zeta > \delta$ genommen werden muss, damit die Axe GG unbewegt an ihrem Orte bleibe. Ist daher $l = 3$ Fuss, in welchem Falle das Pendel, wenn die Reibung nicht im Wege stände, fast in den einzelnen Secunden seine Schwingungen ausführen würde; so sei der Radius der kleinen Axen oder $f = \frac{1}{500}$ und man nehme ferner $\delta = 1/3$ und $\zeta = 20^0$ an. Alsdann wird die Zeit Einer Schwingung

$$= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left(1 - \frac{1}{28191}\right),$$

so dass wegen der Reibung erst nach 28191 Schwingungen oder nach fast 8 Stunden ein Fehler von 1 Secunde entsteht. Damit in eben diesem Falle das Pendel n Schwingungen ausführen könne, ehe es zur Ruhe gelangt, muss

$$\theta > \frac{2n-1}{4698} \text{ oder } \theta > 4{,}3905\,(2n-1) \text{ Secunden}$$

sein. Soll es also 100 Schwingungen ausführen, so mus $\theta > 874''$ oder $> 14'\,34''$ angenommen werden. Nimmt man demnach $\theta = 5^0$ an, so wird das Pendel 2050 Schwingungen ausführen, ehe es zur Ruhe gelangt. Ist f grösser oder kleiner als $\frac{1}{500}$, so ergibt sich die Wirkung der Reibung in demselben Verhältniss grösser oder kleiner.

Anmerkung 2.

§. 1166. Da wir jetzt die Bewegung der Körper um eine feste Axe bestimmt haben, so gehen wir zu andern Arten der Bewegung über, bei welchen der Körper, während er sich bewegt, eine gewisse Oberfläche streift. Hier muss man daher vorzüglich die Figur des Körpers, in so fern nach und nach andere und andere Theile die Oberfläche berühren, in Betracht ziehen, wobei uns zuerst solche Körper aufstossen, welche beständig in einem und demselben Punkte die Oberfläche berühren. Diess ist nämlich der Fall der in eine Spitze ausgehenden Kreisel, mit welcher Spitze sie beständig auf der Oberfläche stehen; es wird angemessen sein zu bestimmen, wie sehr die Bewegung dieser Kreisel in Folge der Reibung der Spitze gestört wird.

Ferner stossen uns Körper auf, welche zwar nur in einem einzigen Punkte die Oberfläche berühren, wobei aber dieser sich beständig verändert, wie diess geschieht, wenn Kugeln und andere sphäroidische Körper sich über einer gewissen Oberfläche bewegen, und ausser der fortschreitenden mit einer beliebigen drehenden Bewegung fortrücken. Um in diesen Fällen die Wirkung der Reibung kennen zu lernen, muss die Richtung der Bewegung, bei welcher der Berührungspunkt die Oberfläche streift, in jedem Augenblicke betrachtet werden, weil dieser die Richtung der Reibung entgegengesetzt ist.

Es folgen nun die Fälle, in welchen der Körper zwar immer mit derselben Grundfläche die Oberfläche berührt, wie diess bei der fortschreitenden Bewegung geschieht, wobei aber der Körper sich zugleich um eine auf die Grundfläche normale Axe dreht, so dass eben diese Grundfläche sich über der Oberfläche herumdreht. Hierauf wollen wir zur Bewegung cylindrischer Körper über ebenen Oberflächen fortschreiten, wobei die Be-

rührung stets längs einer geraden Linie geschieht, durch deren Bewegung und Druck die Reibung bestimmt werden muss. Haben aber Körper eine so winklige Figur, dass während ihrer Bewegung stets andere Ecken die Oberfläche berühren, so können wir, weil ein Zusammenstoss eine solche Bewegung begleitet, so bald eine neue Ecke zur Berührung gelangt, die Bewegung derselben hier noch nicht entwickeln, sondern müssen vorher die Art des Zusammenstosses darstellen.

Nach dieser Eintheilung wollen wir daran gehen, die Bewegung der in eine Spitze ausgehenden Kreisel über einer horizontalen Ebene zu bestimmen.

Kapitel IV.

Von der Bewegung der in eine Spitze ausgehenden Kreisel über einer horizontalen Ebene, mit Rücksicht auf die Reibung.

Aufgabe 11.

§. 1167. Ein Kreisel bewegt sich auf beliebige Weise über einer horizontalen Ebene, und es ist in den einzelnen Augenblicken sein Druck gegen die Ebene gegeben; man soll die Reibung und die fortschreitende Bewegung des Kreisels bestimmen.

Auflösung.

(Figur 156.) Es stelle das Papier die horizontale Ebene vor, über welcher der Kreisel fortgeht, dessen durch den Mittelpunkt der Trägheit und die Spitze gehende Axe jetzt nach Verlauf der Zeit t die Lage AIF einhält, so dass I der in der Höhe liegende Mittelpunkt der Trägheit, F aber die Spitze ist, welche die horizontale Ebene berührt; man setze den constanten Zwischenraum $IF=f$. Aus I fälle man auf die Ebene das Perpendikel IG, und indem man in der Ebene die gerade und nach einer festen Weltgegend gerichtete Axe OV annimmt, ziehe man auf dieselbe aus G und F die normalen Linien GX und FZ, und eben so durch G die Linie $KL \# OV$. Man setze den Winkel $FIG=\varrho$, derselbe drückt die Abweichung der Kreiselaxe AF von der vertikalen Lage aus, ferner den Winkel $KGH=\varphi$, welcher die Abweichung der vertikalen Ebene, worin jetzt die Axe des Kreisels sich befindet, von einer über OV oder LK errichteten vertikalen Ebene darstellt. Es wird demnach
$$GI=f\cos\varrho \text{ und } GF=f\sin\varrho,$$
ferner
$$GN=f\sin\varrho\cos\varphi \text{ und } FN=f\sin\varrho\sin\varphi.$$

Ausserdem sei $OX = x$ und $XG = y$, wonach zur Bestimmung des Punktes F

$$OZ = x - f\sin\varrho\cos\varphi \text{ und } ZF = y + f\sin\varrho\sin\varphi$$

ist und woraus man auf die Bewegung der Spitze F schliessen kann. Die Geschwindigkeit derselben nach der Richtung OV oder NG ist
$$= \frac{dx - fd.\sin\varrho\cos\varphi}{dt},$$
und nach der Richtung NF
$$= \frac{dy + fd.\sin\varrho\sin\varphi}{dt};$$
wenn diese beiden nicht verschwinden, wird sich die Spitze über der Ebene bewegen und eine Reibung hervorbringen. Um die Richtung der letztern zu finden sei Ff die Richtung, nach welcher die Spitze fortschreitet und verlängert man dieselbe rückwärts nach L, so gibt FL die Richtung der Reibung an. Setzt man zur Bestimmung der Lage dieser Linie den Winkel $FLG = \omega$, so wird
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{dy + fd.\sin\varrho\sin\varphi}{dx - fd.\sin\varrho\cos\varphi}.$$

Nun sei der Druck, welchen die Spitze gegen die Ebene ausübt, $= \Pi$, wobei das Gewicht des ganzen Kreisels $= M$ ist; alsdann wird in Folge der Reibung der Kreisel in F nach der Richtung FL durch eine Kraft $= \delta\Pi$ angetrieben und zerlegt man dieselbe, so ergeben sich die Kräfte
$$\text{längs } XO = \delta\Pi\cos\omega \text{ und längs } FZ = \delta\Pi\sin\omega.$$

Um demnach die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit I zu bestimmen, denke man sich ausser diesen Kräften der Reibung die abwärts längs IG antreibende Kraft $= M - \Pi$ an ihm angebracht; alsdann erhalten wir nach den Principien der Bewegung folgende drei Gleichungen:
$$\frac{ddx}{2gdt^2} = -\frac{\delta\Pi\cos\omega}{M},\quad \frac{ddy}{2gdt^2} = -\frac{\delta\Pi\sin\omega}{M}$$
$$\text{und } \frac{fdd\cos\varrho}{2gdt^2} = -1 + \frac{\Pi}{M} \quad (\S.\ 767.),$$
woraus man sogleich die Gleichung
$$\sin\omega\, ddx = \cos\omega\, ddy$$
ableitet. Mittelst dieser Gleichungen bestimme man, wenn man die Winkel ϱ und ω zur Zeit t als bekannt betrachtet, zuerst $\frac{\Pi}{M}$, hierauf die Differentiale dx und dy und mittelst derselben

endlich den Winkel ω aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{dy + fd.\sin\varrho\sin\varphi}{dx - fd.\sin\varrho\cos\varphi}.$$

Zusatz 1.

§. 1168. Substituirt man statt $\frac{\Pi}{M}$ den durch ϱ ausgedrückten Werth, so erhält man zur Bestimmung der Grössen x und y diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$ddx = -2\delta g\cos\omega\, dt^2 - \delta f\cos\omega\, dd.\cos\varrho$$

und

$$ddy = -2\delta g\sin\omega dt^2 - \delta f\sin\omega dd.\cos\varrho.$$

Zusatz 2.

§. 1169. Zur Bestimmung der Richtung der Reibung oder der Linie FL in Bezug auf die gerade Linie FH wird, da der Winkel $LGF = \varphi$ und $FLG = \omega$ ist, der Winkel $GFL = 180^0 - \varphi - \omega$, die Reibung selbst aber $= \delta\Pi$; ausgenommen wenn die Geschwindigkeit der Spitze F Null wird, in welchem Falle die Reibung plötzlich verschwindet. Diess geschieht, wenn wir haben

$$dx = fd.\sin\varrho\cos\varphi \text{ und } dy = -fd.\sin\varrho\sin\varphi.$$

Anmerkung.

§. 1170. Aus diesen Gleichungen kann man noch nichts schliessen, da eine Relation der Veränderlichen ω und Π oder ϱ zur Zeit t bis jetzt nicht bekannt ist, diese vielmehr erst aus der drehenden Bewegung hergeleitet werden muss. Hat man diese aber gefunden, so wird man durch die hier gegebenen Formeln die Veränderlichen x und y, und so die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Trägheit I bestimmen können. Wir wollen daher den Winkel ω in die Bestimmung der drehenden Bewegung einführen, wenn auch seine Relation zu den Winkeln ϱ und φ und der Zeit angegeben werden kann. Da nämlich

$$\cos\omega\, dy + f\cos\omega\, d.\sin\varrho\sin\varphi - \sin\omega\, dx + f\sin\omega\, d.\sin\varrho\cos\varphi = 0$$

ist, so setzen wir, damit man x und y um so leichter fortschaffen könne,

$$f\cos\omega d.\sin\varrho\sin\varphi + f\sin\omega d.\sin\varrho\cos\varphi = sdt,$$

wodurch wir erhalten

$$1)\quad \cos\omega dy - \sin\omega\, dx + sdt = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so erhalten wir, weil $\cos\omega\, ddy = \sin\omega\, ddx$ ist,

$$2)\quad -\sin\omega\, dy - \cos\omega dx + \frac{dsdt}{d\omega} = 0.$$

Differentiirt man auch diese wieder, so ergiebt sich, weil $\sin\omega ddy + \cos\omega ddx = -\frac{2\delta g \Pi dt^2}{M}$ ist,

$$3)\quad \frac{2\delta g \Pi dt^2}{M} - \cos\omega dy d\omega + \sin\omega dx d\omega + dtd.\frac{ds}{d\omega} = 0.$$

Zu dieser addire man die durch $d\omega$ multiplicirte Gleichung 1), und dividire hierauf durch dt, alsdann erhalten wir

$$4)\quad \frac{2\delta g \Pi dt}{M} + sd\omega + d.\frac{ds}{d\omega} = 0.$$

Diese Gleichung drückt eine Relation zwischen s, ω, Π und t aus, welche vielleicht in der Folge in Gebrauch kommen kann. Es enthält aber s die Winkel ϱ, φ und ω und es ist

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd\,.\cos\varrho}{2gdt^2},$$

so dass hier noch die vier Veränderlichen ϱ, φ, ω und t vorhanden sind.

Aufgabe 12.

§. 1171. Während ein Kreisel sich beliebig über einer horizontalen Ebene bewegt und Reibung erleidet, soll man die Momente der Kräfte, welche ihn antreiben, in Bezug auf seine Hauptaxe bestimmen.

Auflösung.

(Figur 157.) In der um den Mittelpunkt der Trägheit I des Kreisels beschriebenen Kugel stelle der Kreis GZH eine verticale Ebene vor, in welcher jetzt die, durch den Mittelpunkt der Trägheit I und die Spitze F gezogene, Axe des Kreisels AIF sich befindet. Dieselbe sei zugleich eine Hauptaxe des Kreisels, und in Bezug auf sie das Moment der Trägheit $= Ma^2$, die zwei übrigen Hauptaxen mögen aber von I aus die Punkte B und C der Kugel treffen und in Bezug auf sie die einander gleichen Momente der Trägheit $= Mc^2$ sein, so dass in unsern allgemeinen Formeln $b^2 = c^2$ ist, wie wir schon oben angenommen haben. Wird Z als der Scheitelpunkt der Kugel vorausgesetzt, so wird der Bogen $ZA = \varrho$; wir wollen aber, indem wir die Bogen ZB und ZC ziehen, wie oben $ZA = l$, $ZB = m$ und $ZC = n$ setzen, so dass $\varrho = l$ ist. Unter diesen Voraussetzungen sind die Kräfte, durch welche der Kreisel angetrieben wird, erstens sein Gewicht M, welche im Mittelpunkte der Trägheit I angebrachte Kraft keine Momente liefert; zweitens ist der Druck vorhanden, mit welchem die horizontale Ebene

der Spitze F entgegenwirkt und deren Richtung die vertikal nach oben gezogene Linie $F\Pi$ ist. Setzt man diese Kraft $=\Pi$, so haben wir, wie wir gesehen haben,

$$\frac{\Pi}{M}=1+\frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}.$$

Endlich wird der Kreisel in F durch die Reibung $=\delta\Pi$ angetrieben, wenn die Spitze nicht etwa ruhet, die Richtung dieser Kraft ist die horizontale Linie FL. Zur Bestimmung ihrer Lage ziehe man den horizontalen grössten Kreis $G\varDelta H$ und nehme auf demselben nach §. 1169. den Bogen $H\varDelta=180^0-\varphi-\omega$ oder $G\varDelta=\varphi+\omega$ an, wo φ die Abweichung der Ebene GLH von einer gewissen festen vertikalen Ebene bezeichnet. Der Winkel ω muss aber durch die in der vorhergehenden Aufgabe gegebenen Formeln bestimmt werden, und es wird die Richtung FL dem Radius $I\varDelta$ parallel sein. Um nun die Momente dieser Kräfte in Bezug auf die Hauptaxen zu ermitteln, zerlege man zuerst die Kräfte nach den Richtungen dieser Axen, zu welchem Ende man sie als im Mittelpunkte der Trägheit angebracht betrachte. Die in der Richtung IZ angebrachte Kraft $F\Pi=\Pi$ ergibt aber die folgenden Kräfte:

$$\text{längs } IA,\ \Pi\cos ZA=\Pi\cos l$$
$$\text{längs } IB,\ \Pi\cos ZB=\Pi\cos m$$
$$\text{längs } IC,\ \Pi\cos ZC=\Pi\cos n.$$

Hierauf zerlege man die in $I\varDelta$ angebrachte Kraft $FL=\delta\Pi$ in die Kräfte:

$$1)\ \text{längs } IA,\ =\delta\Pi\cos A\varDelta,$$
$$2)\ \text{längs } IB,\ =\delta\Pi\cos B\varDelta$$
und
$$3)\ \text{längs } IC,\ =\delta\Pi\cos C\varDelta.$$

Um diese aber zu entwickeln, sei ZX jener feste vertikale Kreis, also der Winkel $XZ\varDelta=\varphi$, ausserdem setzen wir wie oben (§. 857.), die Winkel $XZA=\lambda$, $XZB=\mu$ und $XZC=\nu$, so dass $\varphi=\lambda$ wird. Weil nun $AZ\varDelta=180^0-\lambda-\omega$ ist, so wird $XZ\varDelta=180^0-\omega$ und hieraus $BZ\varDelta=\mu+\omega-180^0$ und $CZ\varDelta=180^0-\nu-\omega$; also, weil $Z\varDelta$ ein Quadrant ist,

$$\cos A\varDelta=-\sin l\cos(\lambda+\omega),$$
$$\cos B\varDelta=-\sin m\cos(\mu+\omega)$$
und
$$\cos C\varDelta=-\sin n\cos(\nu+\omega).$$

Wir erhalten demnach die Kräfte

$$\text{längs } IA=\Pi\cos l-\delta\Pi\sin l\cos(\lambda+\omega)$$
$$\text{längs } IB=\Pi\cos m-\delta\Pi\sin m\cos(\mu+\omega)$$
und
$$\text{längs } IC=\Pi\cos n-\delta\Pi\sin n\cos(\nu+\omega),$$

welche man sich aber als im Punkte F angebracht zu denken hat und wobei $IF = f$ ist. Hieraus schliesst man auf ihre Momente in Bezug auf die Hauptaxen, und da wir dieselben oben durch P, Q und R bezeichnet haben, so erhalten wir

$$P = 0$$
$$Q = \Pi f \cos n - \delta f \Pi \sin n \cos(\nu + \omega)$$
$$R = -\Pi f \cos m + \delta f \Pi \sin m \cos(\mu + \omega).$$

Aufgabe 13.

§. 1172. Nachdem diese Momente der Kräfte gefunden sind, soll man die Gleichungen darstellen, in welchen die durch die Reibung gestörte Bewegung eines über einer horizontalen Ebene fortgehenden Kreisels enthalten ist.

Auflösung.

(Figur 157.) Es halte zuerst für die drehende Bewegung nach Verlauf der Zeit t der Kreisel die in der Figur dargestellte Lage ein, wobei alle eben aufgestellten Bezeichnungen dieselben bleiben. Es drehe sich ferner der Kreisel jetzt um die Axe IO im Sinne ABC mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$, und es seien zur Bestimmung des Punktes O die Bogen $AO = \alpha$, $BO = \beta$ und $CO = \gamma$. Ferner setze man $\Omega \cos\alpha = x$, $\Omega \cos\beta = y$ und $\Omega \cos\gamma = z$, welche Grössen durch die eben gefundenen Momente so bestimmt werden, dass

$$dx = 0, \text{ also } x = \text{Const.}$$

sei. Setzt man demnach $x = h$, so werden wir zur Bestimmung der Grössen y und z die Gleichungen haben:

$$dy + \frac{a^2 - c^2}{c^2} hz dt = \frac{2\Pi f g dt}{Mc^2} [\cos n - \delta \sin n \cos(\nu + \omega)]$$

und

$$dz - \frac{a^2 - c^2}{c^2} hy dt = -\frac{2\Pi f g dt}{Mc^2} [\cos m - \delta \sin m \cos(\mu + \omega)] \quad (§.857.).$$

Ferner haben wir gezeigt, dass man zur Bestimmung der Bogen l, m, n und der Winkel λ, μ, ν die Gleichungen hat:

$$\sin l \, dl = [y \cos n - z \cos m]\, dt$$
$$\sin m \, dm = [z \cos l - h \cos n]\, dt$$
$$\sin n \, dn = [h \cos m - y \cos l]\, dt$$
$$\sin l^2 d\lambda = -[y \cos m + z \cos n]\, dt$$
$$\sin m^2 d\mu = -[z \cos n + h \cos l]\, dt$$
$$\sin n^2 d\nu = -[h \cos l + y \cos m]\, dt$$

Hierbei hat man ausserdem folgende Relationen zu merken:

$$\cos(\mu-\lambda) = -\frac{\cos l \cos m}{\sin l \sin m}$$

$$\sin(\mu-\lambda) = -\frac{\cos n}{\sin l \sin m}$$

$$\cos(\nu-\lambda) = -\frac{\cos l \cos n}{\sin l \sin n}$$

$$\sin(\nu-\lambda) = +\frac{\cos m}{\sin l \sin n},$$

mittelst deren die Winkel μ und ν folgendermaassen durch λ bestimmt werden:

$$\cos\mu = \frac{-\cos\lambda\cos l\cos m + \sin\lambda\cos n}{\sin l\sin m}$$

$$\sin\mu = \frac{-\sin\lambda\cos l\cos m - \cos\lambda\cos n}{\sin l\sin m}$$

$$\cos\nu = \frac{-\cos\lambda\cos l\cos n - \sin\lambda\cos m}{\sin l\sin n}$$

$$\sin\nu = \frac{-\sin\lambda\cos l\cos n + \cos\lambda\cos m}{\sin l\sin n}.$$

Hierbei ist noch

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos l}{2gdt^2}.$$

Der Winkel ω ist aus der fortschreitenden Bewegung eingetreten, setzen wir nun in der Figur 156. der Unterscheidung wegen die dem Mittelpunkte der Trägheit I angehörigen Coordinaten $OX = X$ und $XG = Y$, wobei $GI = f\cos l$ ist: so müssen wir zu den obigen Gleichungen noch die folgenden hinzufügen:

$$\frac{ddX}{2gdt^2} = -\frac{\delta\Pi}{M}\cos\omega, \quad \frac{ddY}{2gdt^2} = -\frac{\delta\Pi}{M}\sin\omega$$

und

$$\cos\omega\, dY - \sin\omega\, dX + f\cos\omega\, d.\sin l\sin\lambda + f\sin\omega\, d.\sin l\cos\lambda = 0.$$

Durch diese Gleichungen wird alles, was sowohl die fortschreitende als die drehende Bewegung betrifft, bestimmt. Wollen wir zuerst die Grössen X und Y aus der Rechnung ausschliessen, so genügt es, statt dieser drei letzten Gleichungen die folgende einzige anzuwenden. Setzt man zu diesem Ende

$$sdt = f\cos\omega d.\sin l\sin\lambda + f\sin\omega d.\sin l\cos\lambda,$$

oder substituirt man, indem man diese Differentiationen ausführt, statt dl und $d\lambda$ ihre obigen Werthe, so wird

$$s = -fy\sin n\sin(\omega+\nu) + fz\sin m\sin(\omega+\mu)$$

und es ist die statt jener drei anzuwendende oben gefundene Gleichung:

$$\frac{2\delta g \Pi dt}{M} + sd\omega + d \cdot \frac{ds}{d\omega} = 0.$$

Anmerkung 1.

§. 1173. Die grosse Menge dieser Gleichungen, vorzüglich aber der in die ersten Gleichungen eintretende Winkel ω ist die Ursache, dass wir ihre Auflösung auf keine Weise unternehmen können. Hiernach wird offenbar die Bewegung der Kreisel in Folge der Reibung so sehr gestört, dass wir aus diesen Gleichungen auf durchaus nichts, woraus man diese Bewegung erkennen könnte, zu schliessen vermögen. Wenn wir aber die Ursachen dieser Bewegung nur beiläufig betrachten, so ist es einleuchtend, dass der Mittelpunkt der Trägkeit I nicht nur auf einer vertikalen geraden Linie, wie es ohne die Reibung geschah, auf- oder niedersteigen, sondern auch eine horizontale Bewegung erlangen wird, welche aus der Kraft der Reibung hervorgeht. Da nun die Richtung der letztern der Bewegung der Spitze entgegengesetzt ist, so wird der Mittelpunkt der Trägheit zu einer Bewegung nach derselben Richtung angetrieben, wesshalb dieselbe weder gleichförmig noch geradlinig ist. In so fern sie aber gekrümmt wird, wird sie an der Seite convex sein, nach welcher die Spitze fortschreitet. Auf ähnliche Weise wird auch die drehende Bewegung sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeit, als auch der Drehungsaxe im höchsten Grade gestört werden, worüber man kaum etwas aus der Betrachtung der Reibung zu erweisen vermag.

Anmerkung 2.

§. 1174. Diese so grosse Störung der Bewegung dauert aber nur so lange, bis die Reibung aufhört, und dass diess endlich eintreten muss, leuchtet von selbst ein, indem nämlich die Bewegung in Folge der Reibung beständig verzögert wird. Die Reibung kann aber nur aufhören, wenn die Spitze des Kreisels an demselben Orte bleibt, wesshalb nothwendig die Bewegung so gemässigt werden muss, dass die Spitze endlich in demselben Punkte der Ebene verbleibe, wenn nur diess geschieht, ehe der Kreisel niederfällt. Ist nämlich diesem zuerst eine zu langsame drehende Bewegung beigebracht worden, so wird er ohne Zweifel niederfallen, ehe jene Erscheinung eintritt. Hieraus kann man umgekehrt schliessen, dass, wenn die Bewegung geschwind

genug gewesen ist, die Spitze des Kreisels durch die Reibung an denselben Punkt der horizontalen Ebene gebunden werden wird, ehe er selbst niederfällt. Ist jenes eingetreten und findet noch eine drehende Bewegung des Kreisels statt, so ergibt sich aus dem Frühern, dass seine Axe vertikal sein muss. Wäre sie nämlich geneigt, so könnte sich der Kreisel auf keine Weise so drehen, dass seine Spitze in demselben Punkte bliebe. Aus diesem Allen können wir daher den Schluss ziehen, dass der Kreisel, wenn ihm nur eine hinreichend geschwinde drehende Bewegung beigebracht worden ist, sich in Folge der Reibung endlich in die vertikale Stellung aufrichten und dann um die vertikale Axe seine Drehung fortsetzen wird. Diese Erscheinung ist um so bemerkenswerther, als sie nur eine Folge der Reibung ist, so dass mittelst dieser eine vertikale Linie und daher auch eine horizontale Ebene erhalten werden kann. Diess kann auch in der Schifffahrt grossen Nutzen verschaffen und ist desshalb einst in England hierzu empfohlen worden.

Kapitel V.

Von der Bewegung einer Kugel, deren Mittelpunkt der Trägheit in ihrem eigenen Mittelpunkte liegt, über einer horizontalen Ebene.

Aufgabe 14.

§. 1175. Eine Kugel geht über einer horizontalen Ebene beliebig sowohl mit fortschreitender, als auch mit drehender Bewegung fort; man soll ihre Geschwindigkeit und die Richtung, in welcher der Berührungspunkt die horizontale Oberfläche streift, bestimmen.

Auflösung.

(Figur 158.) Es sei I der Mittelpunkt und zugleich der Mittelpunkt der Trägheit der Kugel, deren Radius $=f$ ist, und es geschehe die Berührung im untersten Punkte T. Die Bewegung der Kugel sei aber so beschaffen, dass der Mittelpunkt der Trägheit sich nach der Richtung PIR mit der Geschwindigkeit $=v$ bewege, zugleich aber drehe sich die Kugel um die beliebige Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ und in dem Sinne, dass der Punkt T um O durch den kleinen Bogen Tt fortgeht. Um die Lage des Punktes O zu bestimmen, setze ich den Winkel $PTO=\theta$ und den Bogen $TO=s$, den letztern so genommen, als ob der Radius der Kugel $=1$ wäre. Man ziehe $TV \# PIR$, alsdann würde, wenn die drehende Bewegung nicht stattfände, der Berührungspunkt T die horizontale Ebene mit der Geschwindigkeit v und in der Richtung TV streifen. Wenn ferner die Kugel nur mit drehender Bewegung herumgeführt würde, so würde der Punkt T, welcher sich durch Tt mit der Geschwindigkeit $=f\Omega \sin TO = f\Omega \sin s$ bewegte, da diese

Richtung horizontal ist, in der Ebene durch die gerade Linie $T\Theta$ geführt werden, so dass, weil $OTt=90^0$, der Winkel $ST\Theta = PTt = \theta - 90^0$ wäre. Es wird demnach $VT\Theta = 270^0 - \theta$. Man nehme nun die geraden Linien $TV=v$ und $T\Theta = f\Omega \sin s$ an, weil alsdann der Punkt T in Folge der Verbindung dieser zwei Bewegungen fortrückt, so wird seine wahre Bewegung längs der geraden Linie TF, der Diagonale des Parallelogramms $TVF\Theta$ erfolgen. Zieht man aus F auf TV die Normale FH, so wird

$$VH = f\Omega \sin s \sin\theta \text{ und } FH = -f\Omega \sin s \cos\theta,$$

also

$$TH = v - f\Omega \sin s \sin\theta$$

und die streifende Geschwindigkeit

$$TF = \sqrt{v^2 - 2f\Omega v \sin s \sin\theta + f^2\Omega^2 \sin s^2},$$

wie auch

$$\operatorname{tg} VTF = \frac{-f\Omega \sin s \cos\theta}{v - f\Omega \sin s \sin\theta}.$$

Man ziehe aus dem Mittelpunkte I die Linie $IQ \# TF$, alsdann wird $TQ = 90^0$ und $RTQ = VTF$. Ist daher IQ der Richtung, längs welcher der Punkt T die Ebene streift, parallel, so wird

$$\operatorname{tg} PTQ = \frac{f\Omega \sin s \cos\theta}{v - f\Omega \sin s \sin\theta},$$

und wenn man die streifende Geschwindigkeit $\sqrt{v^2 - 2f\Omega v \sin s \sin\theta + f^2\Omega^2 \sin s^2} = u$ setzt,

$$\sin PTQ = -\frac{f\Omega \sin s \cos\theta}{u} \text{ und } \cos PTQ = \frac{f\Omega \sin s \sin\theta - v}{u}.$$

Zusatz 1.

§. 1176. Es ist demnach möglich, dass die streifende Geschwindigkeit und daher auch die Anreibung verschwindet, in welchem Falle diese zwei Bedingungsgleichungen stattfinden müssen:

$$1)\ \Omega \sin s \cos\theta = 0 \quad\text{und}\quad 2)\ v = f\Omega \sin s \sin\theta.$$

Hieraus ergibt sich sogleich, dass, wenn keine fortschreitende Bewegung vorhanden oder $v=0$ ist, keine Anreibung stattfinden wird, im Fall

$$\sin s = 0$$

ist, d. h. im Fall die Kugel sich um die vertikale Axe dreht.

Zusatz 2.

§. 1177. Ferner wird die Bewegung der Kugel frei von der Anreibung sein, wenn erstens $\cos\theta = 0$ oder der Winkel $PTO = 90^0$ ist; zweitens muss die fortschreitende Geschwindigkeit v zur Winkelgeschwindigkeit Ω in dem Verhältniss stehen, dass

$$v = f\Omega \sin s,$$

oder $TV = T\Theta$ und der Winkel $ST\Theta = 0$ wird.

Zusatz 3.

§. 1178. Verfolgt demnach die Kugel eine solche Bewegung, so wird sie, weil nach Aufhebung aller Anreibung auch keine Reibung stattfindet, dieselbe Bewegung beständig beibehalten, indem nämlich die Drehungsaxe IO die Eigenschaft einer Hauptaxe hat.

Anmerkung 1.

§. 1179. So wie wir hier die Reibung aufgestellt haben, ist sie einer Kugel nicht hinderlich, ihre Bewegung über einer horizontalen Ebene unversehrt beizubehalten, wir bemerken jedoch, dass diess keinesweges geschieht, da die über einer Tafel mit einer solchen Bewegung fortgeführte Kugel die letztere bald ganz verliert; die Ursache hiervon kann dem Widerstande der Luft nicht zugeschrieben werden. Ich bemerke hier aber zuerst, dass die Versuche niemals sehr vollkommen mit der Theorie übereinstimmen; eben so wie, während wir in dem hier behandelten Falle angenommen haben, dass die Berührung nur in einem einzigen Punkte geschehe, in der Praxis immer ein anderer Fall stattfindet. Wenn indessen der Bogen $TO = 90^0$ und auch der Winkel $PTO = 90^0$ ist, wonach sich

$$v = f\Omega$$

ergibt; so wird, wenn auch die Berührung nicht in einem einzigen Punkte erfolgt, doch die Anreibung verschwinden und man wird daher das Aufhören der Bewegung keinesweges der Reibung zuschreiben können. Hieraus müssen wir schliessen, dass es ausser der Reibung, wie wir sie hier erklärt haben, noch ein anderes Hinderniss der Bewegung gibt, während die Körper über den Oberflächen einhergehen, welches man von der Reibung gehörig zu unterscheiden hat. Wie auch der Grund dieses Hindernisses beschaffen sein mag, so ist es angemessener, seine Wirkung besonders zu erforschen, als die hier aufgestellte Natur der Reibung abzuändern. So wie wir hier vom Widerstande der Luft abstrahiren, wird es auch erlaubt sein, dieses die Reibung begleitende Hinderniss vom gegenwärtigen Gegenstande zu trennen.

Anmerkung 2.

§. 1180. Ich betrachte hier sphärische Körper, in deren

Mittelpunkte sich ihr Mittelpunkt der Trägheit I befindet, welcher letztere sich demnach selbst auch in einer horizontalen Ebene bewegt und beständig vertikal über dem Berührungspunkte T liegt. Hieraus folgt, dass der Druck im Berührungspunkte immer dem Gewichte M des Körpers gleich sein wird. Bestände demnach der Körper aus gleichartiger Materie, so würden alle seine Durchmesser die Eigenschaft einer Hauptaxe besitzen; allein wir wollen uns eine beliebige ungleichmässige Vertheilung der Materie denken, jedoch so, dass der Mittelpunkt der Trägheit in den Mittelpunkt der Figur fällt. Es wird daher nothwendig sein, in der Kugel je drei Hauptaxen zu betrachten, welche vom Mittelpunkte I aus die um Quadranten von einander abstehenden Punkte A, B und C treffen und in Bezug auf welche, nach früherer Voraussetzung, die Momente der Trägheit Ma^2, Mb^2 und Mc^2 sind. Obgleich wir aber später je zwei oder alle drei Momente einander gleich setzen, wird es doch angemessen sein, solche drei feste Punkte auf der Oberfläche zu bezeichnen, damit man durch ihre Beziehung zum absoluten Raume leichter die Bewegung der Kugel bestimmen kann. Nachdem diese drei Punkte A, B und C aber auf der Kugel angenommen sind, müssen wir, weil die drehende Bewegung um O unserer Annahme zufolge in der Richtung Tt, also in dem, dem früher angenommenen, entgegengesetzten Sinne CBA erfolgt, in der Anwendung der allgemeinen Formeln auf diesen Fall die Winkelgeschwindigkeit Ω als negativ ansehen.

Aufgabe 15.

§. 1181. Eine Kugel bewegt sich über einer horizontalen Ebene auf beliebige Weise; man soll die Kräfte, durch welche sie angetrieben wird und deren Momente in Bezug auf die drei Hauptaxen der Kugel bestimmen.

Auflösung.

(Figur 159.) Man denke sich die Kugel in eine andere, entweder feste oder gleiche fortschreitende Bewegung mit ihr habende, Kugel eingeschlossen, auf welcher Z der Scheitelpunkt und der ihm entgegengesetzte T der Berührungspunkt ist, DE sei ein horizontaler nach einer bestimmten Weltgegend gerichteter Durchmesser und $DPQE$ ein horizontaler grösster Kreis. Jetzt aber nach Verlauf der Zeit t gehe die Kugel mit fortschreitender Bewegung nach der Richtung PI und mit der Ge-

schwindigkeit $=v$ fort, und man setze den Bogen DP oder den Winkel $DZP=\varphi$, die Hauptaxen liegen aber jetzt in A, B und C. Hierauf drehe sich die Kugel um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit $=\Omega$ im Sinne ACB, und es sei zur Bestimmung der Lage des Punktes O der Winkel PTO oder $PZO=\theta$ und der Bogen $ZO=s$. Wenn wir auch vorher den Bogen $TO=s$ gesetzt haben, so ist diess gleichgültig, weil nur der Sinus desselben in die Rechnung eintritt. Es wird demnach der Winkel $DZO=\theta+\varphi$ und $EZO=180^0-\theta-\varphi$. Denken wir uns ferner von den Punkten A, B und C sowohl nach O, als auch nach Z Bogen grösster Kreise gezogen, so seien wie bisher die Bogen $AO=\alpha$, $BO=\beta$, $CO=\gamma$, $ZA=l$, $ZB=m$, $ZC=n$ und die Winkel $EZA=\lambda$, $EZB=\mu$ und $EZC=\nu$. In der vorhergehenden Aufgabe haben wir aber gezeigt, dass der Berührungspunkt T die darunter liegende Ebene, nach einer dem Radius IQ parallelen Richtung, mit der Geschwindigkeit $=\sqrt{v^2-2f\Omega v\sin s\sin\theta+f^2\Omega^2\sin s^2}$ streift, und dass

$$\operatorname{tg} PTQ=\operatorname{tg} PZQ=\frac{f\Omega\sin s\cos\theta}{v-f\Omega\sin s\sin\theta}$$

ist, wobei f den Radius der Kugel bezeichnet. Da also der Druck in $T=M$ ist, so wird die Reibung $=\delta M$, und zwar ist dieselbe im Punkte T nach der QI parallelen Richtung angebracht. Zerlegt man diese Kraft nach den Richtungen der Hauptaxen IA, IB und IC, so ergeben sich die Seitenkräfte:

längs $IA=-\delta M\cos AQ$,
längs $IB=-\delta M\cos BQ$
und längs $IC=-\delta M\cos CQ$,

welche drei Kräfte man sich im Punkte T angebracht zu denken hat. Hieraus schliesst man auf die Momente:

in Bezug auf die Axe IA im Sinne BC
$$=-\delta Mf\cos CQ\cos BT+\delta Mf\cos BQ\cos CT=P,$$
in Bezug auf die Axe IB im Sinne CA
$$=-\delta Mf\cos AQ\cos CT+\delta Mf\cos CQ\cos AT=Q,$$
in Bezug auf die Axe IC im Sinne AB
$$=-\delta Mf\cos BQ\cos AT+\delta Mf\cos AQ\cos BT=R;$$
es wird daher
$$P=\delta Mf[\cos m\cos CQ-\cos n\cos BQ]$$
$$Q=\delta Mf[\cos n\cos AQ-\cos l\cos CQ]$$
$$R=\delta Mf[\cos l\cos BQ-\cos m\cos AQ].$$

Setzen wir aber für den Punkt Q den Winkel $PZQ=\xi$, so dass

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{f\Omega \sin s \cos \theta}{v - f\Omega \sin s \sin \theta}$$

ist und die streifende Geschwindigkeit

$\sqrt{v^2 - 2f\Omega v \sin s \sin \theta + f^2 \Omega^2 \sin s^2} = u$, so wird

$$\sin \xi = -\frac{f\Omega \sin s \cos \theta}{u} \text{ und } \cos \xi = \frac{f\Omega \sin s \sin \theta - v}{u} \quad (§. 1175.).$$

Es wird demnach $DZQ = \varphi + \xi$, $EZQ = 180^0 - \varphi - \xi$, also

$$AZQ = 180^0 - \xi - \varphi - \lambda,$$
$$BZQ = \mu + \xi + \varphi - 180^0,$$
$$CZQ = 180^0 - \xi - \varphi - \nu,$$

und so $\cos AQ = -\cos(\xi + \varphi + \lambda) \sin l,$

$$\cos BQ = -\cos(\xi + \varphi + \mu) \sin m$$

und $\cos CQ = -\cos(\xi + \varphi + \nu) \sin n.$

Aus der Relation, welche zwischen den Winkeln λ, μ und ν eintritt, schliessen wir auf die Momente der Kräfte:

$$P = \delta M f \sin l \sin(\lambda + \varphi + \xi),$$
$$Q = \delta M f \sin m \sin(\mu + \varphi + \xi)$$

und $R = \delta M f \sin n \sin(\nu + \varphi + \xi).$

Aufgabe 16.

§. 1182. Wir betrachten die drehende Bewegung zu jeder Zeit als gegeben und sollen die fortschreitende Bewegung der Kugel bestimmen.

Auflösung.

(Figur 161.) Weil der Mittelpunkt der Kugel sich in einer horizontalen Ebene bewegt, so habe er in der Zeit t die Linie GI beschrieben, welche man auf die der obigen festen Richtung DE parallele Abscissenaxe GX bezieht und indem man IX auf GX normal zieht, seien die Coordinaten $GX = X$ und $XI = Y$. Durch I ziehe man parallel GX die gerade Linie DE, welche der Durchmesser DE in der Figur 159. sein wird. Nun ziehe man IP, so dass $DIP = EIR = \varphi$ wird, alsdann wird der Mittelpunkt I nach der Voraussetzung in der Richtung IR mit der Geschwindigkeit $= v$ fortschreiten, so dass seine Geschwindigkeit längs $GX = v \cos \varphi$ und längs $XI = v \sin \varphi$, also

$$dX = v \cos \varphi \, dt \text{ und } dY = v \sin \varphi \, dt$$

sein wird. Ferner ziehe man die gerade Linie QIS, so dass IQ der Richtung, in welcher der Berührungspunkt die Ebene streift, parallel wird; alsdann wird der Winkel

$$EIQ = DIS = 180^0 - \xi - \varphi,$$

indem derselbe dem Winkel EZQ in Figur 159. gleich ist. Man hat daher anzunehmen, dass die Kugel durch eine Kraft $=\delta M$ in der Richtung IS angetrieben werde. Hieraus entspringt demnach die Kraft längs $ID=-\delta M\cos(\xi+\varphi)$ und längs XI $=\delta M\sin(\xi+\varphi)$, und es wird

$$\frac{d.v\cos\varphi}{2gdt}=\frac{\cos\varphi\, dv-v\sin\varphi\, d\varphi}{2gdt}=\delta\cos(\xi+\varphi)$$

und
$$\frac{d.v\sin\varphi}{2gdt}=\frac{\sin\varphi\, dv+v\cos\varphi\, d\varphi}{2gdt}=\delta\sin(\xi+\varphi).$$

Ferner erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\frac{dv}{2gdt}=\delta\cos\xi,\quad \frac{vd\varphi}{2gdt}=\delta\sin\xi$$

und
$$\frac{vd\varphi}{dv}=\operatorname{tg}\xi=\frac{f\Omega\sin s\cos\theta}{v-f\Omega\sin s\sin\theta}.$$

Aufgabe 17.

§. 1183. Nachdem die fortschreitende Bewegung der Kugel bestimmt worden ist, soll man ihre drehende bestimmen.

Auflösung.

(Figur 159.) Man betrachte nun den Mittelpunkt der Kugel I als ruhend, es bleiben alle in der Aufgabe 15. angewandten Bezeichnungen dieselben, ferner seien Ma^2, Mb^2 und Mc^2 die Momente der Trägheit in Bezug auf die Hauptaxen IA, IB und IC, welche wir zuerst als ungleich ansehen. Weil wir aber hier die Winkelgeschwindigkeit Ω als negativ betrachten müssen, indem sie im Sinne ACB gerichtet ist, müssen wir, wenn wir $\Omega\cos\alpha=x$, $\Omega\cos\beta=y$ und $\Omega\cos\gamma=z$ setzen, in den allgemeinen Formeln diese Buchstaben x, y und z negativ annehmen. Nach §. 809. werden wir daher die folgenden, die Bewegung bestimmenden Gleichungen haben:

$$dx+\frac{b^2-c^2}{a^2}yzdt+\frac{2\delta fg}{a^2}\sin l\sin(\lambda+\varphi+\xi)\,dt=0$$

$$dy+\frac{c^2-a^2}{b^2}xzdt+\frac{2\delta fg}{b^2}\sin m\sin(\mu+\varphi+\xi)\,dt=0$$

$$dz+\frac{a^2-b^2}{c^2}xydt+\frac{2\delta fg}{c^2}\sin n\sin(\nu+\varphi+\xi)\,dt=0$$

$$\sin l\,dl=(z\cos m-y\cos n)\,dt$$
$$\sin m\,dm=(x\cos n-z\cos l)\,dt$$
$$\sin n\,dn=(y\cos l-x\cos m)\,dt$$
$$\sin l^2 d\lambda=(y\cos m+z\cos n)\,dt$$

$$\sin m^2 d\mu = (z\cos n + x\cos l)\,dt$$
$$\sin n^2 dv = (x\cos l + y\cos m)\,dt.$$

Wir haben aber ferner nach der fortschreitenden Bewegung
$$dv = 2\delta g\cos\xi\,dt,\ v d\varphi = 2\delta g\sin\xi\,dt$$
und
$$\operatorname{tg}\xi = \frac{f\Omega\sin s\cos\theta}{v - f\Omega\sin s\sin\theta}.$$

Hier ist $PZO = \theta$ und $ZO = s$, und da demnach $EZO = 180^0 - \theta - \varphi$ ist, so haben wir
$$AZO = 180^0 - \lambda - \theta - \varphi,$$
$$BZO = \mu + \theta + \varphi - 180^0$$
und
$$CZO = \nu + \theta + \varphi - 180^0.$$

Hieraus erhalten wir
$$\cos\alpha = \cos l\cos s - \sin l\sin s\cos(\lambda+\theta+\varphi)$$
$$\cos\beta = \cos m\cos s - \sin m\sin s\cos(\mu+\theta+\varphi)$$
$$\cos\gamma = \cos n\cos s - \sin n\sin s\cos(\nu+\theta+\varphi),$$
wobei $\cos s = \cos l\cos\alpha + \cos m\cos\beta + \cos n\cos\gamma$ ist (§. 937.); wesshalb also sein wird
$$\sin l\cos l\cos(\lambda+\theta+\varphi) + \sin m\cos m\cos(\mu+\theta+\varphi) + \sin n\cos n\cos(\nu+\theta+\varphi) = 0.$$

Setzen wir nun $\Omega\cos s = p$ und $\Omega\sin s = q$, so dass $\operatorname{tg}\xi = \frac{fq\cos\theta}{v - fq\sin\theta} = \frac{v d\varphi}{dv}$ wird, so erhalten wir
$$x = p\cos l - q\sin l\cos(\lambda+\theta+\varphi)$$
$$y = p\cos m - q\sin m\cos(\mu+\theta+\varphi)$$
$$z = p\cos n - q\sin n\cos(\nu+\theta+\varphi).$$

Aus diesen Werthen folgt
$$dl = q\sin(\lambda+\theta+\varphi)\,dt$$
$$dm = q\sin(\mu+\theta+\varphi)\,dt$$
$$dn = q\sin(\nu+\theta+\varphi)\,dt$$
$$d\lambda = pdt + q\operatorname{cotg} l\cos(\lambda+\theta+\varphi)\,dt$$
$$d\mu = pdt + q\operatorname{cotg} m\cos(\mu+\theta+\varphi)\,dt$$
$$d\nu = pdt + q\operatorname{cotg} n\cos(\nu+\theta+\varphi)\,dt,$$
und hieraus ferner
$$dx = \cos l\,dp - \sin l\cos(\lambda+\theta+\varphi)\,dq + q\sin l\sin(\lambda+\theta+\varphi)(d\theta+d\varphi)$$
$$dy = \cos m\,dp - \sin m\cos(\mu+\theta+\varphi)\,dq + q\sin m\sin(\mu+\theta+\varphi)(d\theta+d\varphi)$$
$$dz = \cos n\,dp - \sin n\cos(\nu+\theta+\varphi)\,dq + q\sin n\sin(\nu+\theta+\varphi)(d\theta+d\varphi).$$

Aber auch ohne Hülfe dieser Substitutionen erhält man, da allgemein
$$\sin l\cos l\sin(\lambda+A) + \sin m\cos m\sin(\mu+A) + \sin n\cos n\sin(\nu+A) = 0$$
(§. 1172)

ist, diese Gleichung

$$a^2\cos l dx + b^2\cos m dy + c^2\cos n dz - a^2 x\sin l dl - b^2 y\sin m dm - c^2 z\sin n dn = 0,$$

deren Integral ist

$$a^2 x\cos l + b^2 y\cos m + c^2 z\cos n = \text{Const.}$$

Diese geht, wenn man die Substitutionen anwendet, in die folgende über:

$$p[a^2\cos l^2 + b^2\cos m^2 + c^2\cos n^2] - q[a^2\sin l\cos l\cos(\lambda+\theta+\varphi) + b^2\sin m\cos m\cos(\mu+\theta+\varphi) + c^2\sin n\cos n\cos(\nu+\theta+\varphi)] = \text{Const.}$$

Ferner erhält man auch, durch die im §. 935. gegebenen Reductionen, für die lebendige Kraft die Differentialgleichung

$$a^2 x dx + b^2 y dy + c^2 z dz = 2\delta f g q\sin(\xi-\theta)\, dt.$$

Anmerkung.

§. 1184. Um die hier angestellten Reductionen mittelst der oben (§. 1172) gegebenen Formeln, wo wir die Winkel μ und ν durch λ, l, m und n ausgedrückt haben, zu verstehen, wird es angemessen sein zu bemerken, dass

$$\cos(\mu+\theta+\varphi) = \frac{-\cos l\cos m\cos(\lambda+\theta+\varphi) + \cos n\sin(\lambda+\theta+\varphi)}{\sin l\sin m}$$

$$\cos(\nu+\theta+\varphi) = \frac{-\cos l\cos n\cos(\lambda+\theta+\varphi) - \cos m\sin(\lambda+\theta+\varphi)}{\sin l\sin n}$$

$$\sin(\mu+\theta+\varphi) = \frac{-\cos l\cos m\sin(\lambda+\theta+\varphi) - \cos n\cos(\lambda+\theta+\varphi)}{\sin l\sin m}$$

$$\sin(\nu+\theta+\varphi) = \frac{-\cos l\cos n\sin(\lambda+\theta+\varphi) + \cos m\cos(\lambda+\theta+\varphi)}{\sin l\sin n}$$

wird. Auf ähnliche Weise kann man die Winkel $\mu+\varphi+\xi$ und $\nu+\varphi+\xi$ auf den $\lambda+\varphi+\xi$ zurückführen.

Ferner ist auch für die folgenden Reductionen diese Form besonders zu bemerken:

$$\sin(\mu+B)\cos(\nu+C) - \sin(\nu+B)\cos(\mu+C),$$

welche wegen

$$\sin M\cos N = \tfrac{1}{2}\sin(M+N) + \tfrac{1}{2}\sin(M-N)$$

auf $\sin(\mu-\nu)\cos(B-C)$ reducirt wird. Stellen wir auf diese Weise die Reduction auch für andere Formeln an, so finden wir:

$$\sin(\mu+B)\cos(\nu+C) - \sin(\nu+B)\cos(\mu+C) = \sin(\mu-\nu)\cos(B-C)$$
$$\sin(\mu+B)\sin(\nu+C) - \sin(\nu+B)\sin(\mu+C) = -\sin(\mu-\nu)\sin(B-C)$$
$$\cos(\mu+B)\cos(\nu+C) - \cos(\nu+B)\cos(\mu+C) = -\sin(\mu-\nu)\sin(B-C),$$

wo $\sin(\mu-\nu)$ durch die angenommenen Formeln gegeben wird, indem man

$$\sin(\mu-\nu) = \frac{\cos l}{\sin m\sin n}$$

erhält.

Aufgabe 18.

§. 1185. Eine Kugel besteht aus gleichartiger Materie oder ist wenigstens so beschaffen, dass alle ihre Momente der Trägheit einander gleich sind, ferner ist ihr im Anfange eine beliebige Bewegung beigebracht worden; man soll deren Fortsetzung *bestimmen.*

Auflösung.

Da hier $a^2 = b^2 = c^2$, oder das Moment der Trägheit in Bezug auf jeden Durchmesser $= Ma^2$ ist, so ergibt die erste integrirte Gleichung $a^2 p = \text{Const.}$;
es ist also p eine constante Grösse. Man setze demnach $p = h$, und es nehmen alsdann die drei ersten Differentialgleichungen die folgenden Formen an:

$$\text{I.}\quad -\cos(\lambda+\theta+\varphi)\,dq + q\sin(\lambda+\theta+\varphi)(d\theta+d\varphi) + \frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\lambda+\varphi+\xi)\,dt = 0$$

$$\text{II.}\quad -\cos(\mu+\theta+\varphi)\,dq + q\sin(\mu+\theta+\varphi)(d\theta+d\varphi) + \frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\mu+\varphi+\xi)\,dt = 0$$

$$\text{III.}\quad -\cos(\nu+\theta+\varphi)\,dq + q\sin(\nu+\theta+\varphi)(d\theta+d\varphi) + \frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\nu+\varphi+\xi)\,dt = 0,$$

von denen man aber nur je zwei in Betracht zu ziehen braucht, weil aus ihnen schon der Schluss, dass $p = h$ sei, hervorgegangen ist. Nun combinire man mittelst der obigen Reductionen die zwei letzten Gleichungen folgendermaassen:

$$\text{II.}\times\cos(\nu+\theta+\varphi) - \text{III.}\times\cos(\mu+\theta+\varphi);$$

alsdann erhält man

$$q\sin(\mu-\nu)(d\theta+d\varphi) + \frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\mu-\nu)\cos(\xi-\theta)\,dt = 0$$

oder

$$q(d\theta+d\varphi) + \frac{2\delta fg}{a^2}\cos(\xi-\theta)\,dt = 0.$$

Hierauf ergibt die Combination

$$\text{II.}\times\sin(\nu+\theta+\varphi) - \text{III.}\times\sin(\mu+\theta+\varphi)$$

die Gleichung

$$\sin(\mu-\nu)\,dq - \frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\mu-\nu)\sin(\xi-\theta)\,dt = 0$$

oder

$$dq = \frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\xi-\theta)\,dt.$$

Substituirt man diesen Werth in die letzte Gleichung für die lebendigen Kräfte, so erhält man

$$xdx+ydy+zdz=qdq$$

also $\quad x^2+y^2+z^2=\Omega^2=\text{Const.}+q^2=\text{Const.}+\Omega^2\sin s^2,$

so dass $\quad \Omega^2\cos s^2=\text{Const.}$

wird, wie wir schon aus $\Omega\cos s=p=h$ gefunden haben. Wir haben demnach die folgenden, von den Buchstaben l, m, n, λ, μ und ν freien Gleichungen:

$$\text{I.}\quad q\,(d\theta+d\varphi)+\frac{2\delta fg}{a^2}\cos(\xi-\theta)\,dt=0$$

$$\text{II.}\quad dq=\frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\xi-\theta)\,dt$$

$$\text{III.}\quad dv=2\delta g\cos\xi dt$$

$$\text{IV.}\quad vd\varphi=2\delta g\sin\xi dt.$$

Diesen füge man die endliche Gleichung $\operatorname{tg}\xi=\dfrac{fq\cos\theta}{v-fq\sin\theta}$ hinzu und forme diese um in

$$v\sin\xi-fq\cos(\xi-\theta)=0.$$

Differentiirt man nun die letztere, so erhält man

$$\sin\xi dv+v\cos\xi d\xi-f\cos(\xi-\theta)dq+fq\sin(\xi-\theta)d\xi-fq\sin(\xi-\theta)d\theta=0.$$

Hierauf bilde man

$$\text{I.}\times\sin(\xi-\theta)+\text{II.}\times\cos(\xi-\theta),$$

wodurch man erhält

$$q\sin(\xi-\theta)\,d\theta+q\sin(\xi-\theta)\,d\varphi+\cos(\xi-\theta)\,dq=0,$$

und nachdem man diese mit f multiplicirt hat, addire man sie zur vorhergehenden Gleichung; alsdann erhält man

$$\sin\xi dv+v\cos\xi d\xi+fq\sin(\xi-\theta)\,(d\xi+d\varphi)=0.$$

Weil ferner $\dfrac{dv}{vd\varphi}=\dfrac{\cos\xi}{\sin\xi}$ ist, so geht die vorstehende Gleichung über in

$$v\cos\xi\,(d\varphi+d\xi)+fq\sin(\xi-\theta)\,(d\xi+d\varphi)=0$$

oder $\quad [v\cos\xi+fq\sin(\xi-\theta)]\,(d\xi+d\varphi)=0.$

Hier kann nicht

$$v\cos\xi+fq\sin(\xi-\theta)=0$$

sein, denn da $\quad v\sin\xi-fq\cos(\xi-\theta)=0$

ist, so würde aus diesen beiden folgen

$$v\cos\theta=0 \text{ und } fq\cos\theta=0,$$

was nur stattfinden kann, wenn $\theta=90^0$ ist. Es bleibt daher nur übrig, dass

$$d\varphi+d\xi=0,\ \text{also}\ \varphi+\xi=\text{Const.}$$

sei. Nachdem wir diess erlangt haben, wird das Uebrige ohne Schwierigkeit abgemacht. Um aber die Integrationen zu bestimmen, setzen wir voraus, dass für den anfänglichen Zustand oder

$t=0$ die fortschreitende Geschwindigkeit $v=e$, der Winkel $\varphi=0$, $PZO=\theta=\mathfrak{h}$, $ZO=s=\mathfrak{f}$ und die Winkelgeschwindigkeit im Sinne ACB oder $\Omega=\varepsilon$ gewesen sei. Hiernach ist für dieselbe Zeit:

$$p=h=\Omega\cos s=\varepsilon\cos\mathfrak{f},\ q=\varepsilon\sin\mathfrak{f}\ \text{ und }\ \operatorname{tg}\xi=\frac{\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}{e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}}.$$

Man setze nun $\dfrac{\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}{e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}}=\operatorname{tg}\zeta$, so dass im Anfange $\xi=\zeta$ gewesen sei, alsdann wird beständig

$$\xi+\varphi=\zeta$$

sein und daher der Winkel $DZQ=\zeta$ constant bleiben. Da nun $\xi=\zeta-\varphi$ ist, so wird

$$v\sin(\zeta-\varphi)=fq\cos(\zeta-\theta-\varphi).$$

Oben (§. 1182.) haben wir aber gefunden

$$\frac{d.v\cos\varphi}{2gdt}=\delta\cos(\xi+\varphi)=\delta\cos\zeta$$

und

$$\frac{d.v\sin\varphi}{2gdt}=\delta\sin(\xi+\varphi)=\delta\sin\zeta,$$

woraus wir durch Integration erhalten:

$$v\cos\varphi=e+2\delta gt\cos\zeta\ \text{ und }\ v\sin\varphi=2\delta gt\sin\zeta.$$

Wir haben demnach

$$v=\sqrt{e^2+4\delta egt\cos\zeta+4\delta^2g^2t^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\delta gt\sin\zeta}{e+2\delta gt\cos\zeta}$$

und

$$\operatorname{tg}(\zeta-\varphi)=\frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta+2\delta gt}=\frac{fq\cos\theta}{v-fq\sin\theta}=\operatorname{tg}\xi.$$

Ferner gehen, weil $d\varphi=-d\xi$ ist, die zwei ersten Gleichungen über in

$$\text{I. } q(d\xi-d\theta)=\frac{2\delta fg}{a^2}\cos(\xi-\theta)\,dt$$

$$\text{II. } dq=\frac{2\delta fg}{a^2}\sin(\xi-\theta)\,dt.$$

Dividirt man die zweite durch die erste, so erhält man

$$\frac{dq}{q(d\xi-d\theta)}=\frac{\sin(\xi-\theta)}{\cos(\xi-\theta)},$$

und wenn man integrirt

$$q\cos(\xi-\theta)=\text{Const.}=\varepsilon\sin\mathfrak{f}\cos(\zeta-\mathfrak{h}).$$

Substituirt man den hieraus sich ergebenden Werth von q in die erste Gleichung, so erhält man

$$\frac{\varepsilon\sin\mathfrak{f}\cos(\zeta-\mathfrak{h})(d\xi-d\theta)}{\cos(\xi-\theta)^2}=\frac{2\delta fg}{a^2}dt$$

und wenn man integrirt

$$\varepsilon \sin \mathfrak{f} \cos(\zeta - \mathfrak{h}) \operatorname{tg}(\xi - \theta) = \text{Const.} + \frac{2\delta f g t}{a^2},$$

wobei Const. $= \varepsilon \sin \mathfrak{f} \sin(\zeta - \mathfrak{h})$ ist. Es ist aber

$$\operatorname{tg}(\xi - \theta) = \operatorname{tg}(\zeta - \varphi - \theta) = \frac{\operatorname{tg}(\zeta - \varphi) - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}(\zeta - \varphi)}$$

und

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}[\xi - (\xi - \theta)] = \frac{\operatorname{tg}\xi - \operatorname{tg}(\xi - \theta)}{1 + \operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}(\xi - \theta)},$$

ferner nach der Voraussetzung

$$\varepsilon \sin \mathfrak{f} = \frac{e \sin \zeta}{f \cos(\zeta - \mathfrak{h})};$$

also

$$\operatorname{tg}(\xi - \theta) = \operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f^2 g t}{e a^2 \sin \zeta}$$

und

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{e \sin \zeta}{e \cos \zeta + 2\delta g t}.$$

Hierdurch wird der Winkel θ leicht bestimmt, und es ergibt sich hierauf

$$q = \frac{e \sin \zeta}{f \cos(\xi - \theta)}.$$

Es muss hier ader bemerkt werden, dass, weil

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h}}$$

ist, wie wir oben (§. 1181.) hinsichtlich des Winkels ξ gezeigt haben,

$$\sin \zeta = \frac{-\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h}}{\sqrt{e^2 - 2e\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin \mathfrak{f}^2}}$$

und

$$\cos \zeta = \frac{-e + \varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h}}{\sqrt{e^2 - 2e\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin \mathfrak{f}^2}}$$

sein wird, woraus folgt:

$$\cos(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e \cos \mathfrak{h}}{\sqrt{e^2 - 2e\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin \mathfrak{f}^2}}.$$

Nachdem wir diess gefunden haben, folgt aus $\Omega \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}$ und $\Omega \sin s = q$

$$\Omega = \sqrt{q^2 + \varepsilon^2 \cos \mathfrak{f}^2} \text{ und } \operatorname{tg} s = \frac{q}{\varepsilon \cos \mathfrak{f}}.$$

Auf diese Weise wird sowohl die fortschreitende Bewegung als auch zu jeder Zeit die Drehungsaxe *O* nebst der Winkelgeschwindigkeit Ω angegeben werden können, was zur Erkenntniss der Bewegung hinreicht. Die Bestimmung der Lage der Punkte *A*, *B* und *C* zu jeder Zeit ist aber zu schwierig, als dass man sie durchführen könnte.

Zusatz 1.

§. 1186. Da die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{\varepsilon \cos \mathfrak{f}}{\cos s}$ oder $\cos ZO$ umgekehrt proportional ist, so folgt hieraus, dass, wenn der Drehungspol O sich anfangs in der obern Halbkugel DZE befunden hat, er niemals in die untere gelangen kann. Beim Uebergange desselben durch den horizontalen Kreis DE würde sich nämlich die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \infty$ ergeben.

Zusatz 2.

§. 1187. Aus demselben Grunde wird der Drehungspol O, wenn er sich anfangs in der untern Halbkugel DTE befunden hat, niemals in die obere gelangen. Hat er sich aber anfangs auf dem horizontalen Kreise DE selbst befunden, so wird er beständig auf demselben bleiben. Ist nämlich im Anfange die Drehungsaxe horizontal gewesen, so wird sie es beständig bleiben.

Zusatz 3.

§. 1188. Ist im Anfange der Winkel $DZO = \mathfrak{h} = 90^0$ gewesen, so wird $\sin \zeta = 0$ und da wir erhalten

$$\operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e \sin \mathfrak{h}}{e \cos \mathfrak{h}},$$

so wird auch $\xi - \theta = 90^0$. Weil aber

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{e \sin \zeta}{e \cos \zeta + 2\delta g t},$$

so wird $\xi = 0$ und so $\theta = PZO = 90^0$. Sobald daher der Winkel PZO diese Grösse erreicht, wird er sie beständig beibehalten.

Zusatz 4.

§. 1189. Bemerkenswerth ist auch die Eigenschaft, dass der Winkel $\xi + \varphi$ oder DZQ in der Figur 159., so wie DIQ in der Figur 161. constant ist. Die gerade Linie QIS bleibt nämlich beständig sich selbst parallel, und weil die Kugel bei ihrer fortschreitenden Bewegung durch die constante Kraft δM nach derselben Richtung IS angetrieben wird, so muss die von ihr beschriebene Curve GI nothwendig eine Parabel sein.

Anmerkung 1.

§. 1190. Diese Bewegung der Kugel, wie sie durch unsere Formeln bestimmt ist, dauert aber nicht länger, als in Wirklichkeit die Reibung stattfindet oder die horizontale Ebene im Berührungspunkte T gestreift wird. Trifft es sich nämlich, dass

die Kugel nicht mehr die Ebene streift, oder die streifende Geschwindigkeit in T verschwindet, so verschwindet auch plötzlich die Reibung und es finden die erhaltenen Formeln nicht mehr statt. Alsdann wird daher die Kugel sowohl mit fortschreitender, als mit drehender Bewegung gleichförmig in gerader Linie vorwärts gehen und die Drehungsaxe keine Aenderung mehr erleiden. Ist aber sogleich im Anfange die der Kugel beigebrachte Bewegung so beschaffen, dass die Reibung Null ist, was geschieht, wenn

$$\varepsilon f \sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h} = 0 \text{ und } e = \varepsilon f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}$$

ist, so wird hierauf die Kugel keine Reibung erleiden und sogleich von Anfang an die fortschreitende Bewegung gleichförmig in gerader Linie erfolgen und jene sich zugleich gleichförmig um dieselbe Axe drehen. Ist aber dem Körper von Anfang an eine andere beliebige Bewegung beigebracht worden, so wird es immer nach Verlauf einiger Zeit dahin kommen, dass die Reibung verschwindet und er seine Bewegung gleichförmig fortsetzt; diesen merkwürdigen Zeitpunkt werden wir in der folgenden Aufgabe erforschen.

Anmerkung 2.

§. 1191. (Fig. 159.) Dasjenige, was wir aus der Auflösung der Aufgabe hergeleitet haben, kommt auf das Folgende hinaus. Aus der zuerst beigebrachten Bewegung haben wir die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung $= e$ nach der Richtung DI, und wenn sich der Körper um die Axe IO mit der Winkelgeschwindigkeit ε im Sinne ACB oder $ZETD$, welchen man den vorwärts gerichteten Sinn zu nennen pflegt, dreht; so sei der Bogen $ZO = \mathfrak{f}$ und der Winkel $DZO = \mathfrak{h}$. Ferner sei der Radius der Kugel $= f$ und ihr Moment der Trägheit in Bezug auf alle Durchmesser $= Ma^2$, wo M ihre Masse ist. Aus diesen gegebenen Grössen findet man die streifende Geschwindigkeit im Berührungspunkte

$$= \sqrt{e^2 - 2\varepsilon e f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin\mathfrak{f}^2};$$

wir setzen dieselbe $= k$. Nun suche man einen Winkel ζ, so dass

$$\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f \sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}{k} \text{ und } \cos\zeta = \frac{\varepsilon f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} - e}{k}$$

werde und es sei $DZQ = \zeta$, alsdann wird IQ die Richtung der streifenden Bewegung sein. Geht nun nach Verlauf der Zeit t der Mittelpunkt der Kugel mit der Geschwindigkeit v nach der Richtung PI vorwärts und dreht sie sich mit der Winkelgeschwin-

digkeit $=\Omega$ im Sinne $ZETD$ um den Pol O, setzt man ferner $DZP=\varphi$, $PZO=\theta$ und $ZO=s$; so haben wir erstens gefunden

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\delta gt\sin\zeta}{e+2\delta gt\cos\zeta}$$

und die Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$=\sqrt{e^2+4\delta egt\cos\zeta+4\delta^2g^2t^2}.$$

Es wird aber die streifende Geschwindigkeit auch jetzt in der Richtung IQ stattfinden, wobei $DZQ=\zeta$ ist, und setzt man $PZQ=\xi$, so wird

$$\operatorname{tg}\xi=\frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta+2\delta gt}.$$

Zweitens ist

$$\operatorname{tg}(\xi-\theta)=\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h})+\frac{2\delta f^2gt}{ea^2\sin\zeta},$$

wobei

$$\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h})=\frac{\varepsilon f\sin\mathfrak{f}-e\sin\mathfrak{h}}{e\cos\mathfrak{h}}$$

ist; hierdurch wird der Winkel θ bekannt und dann, weil $DZO=\varphi+\theta=\zeta-\xi+\theta$ ist,

$$\operatorname{tg}DZO=\operatorname{tg}(\varphi+\theta)=\frac{\varepsilon a^2k\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}+2\delta fgt(e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h})}{\varepsilon a^2k\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}-2\delta\varepsilon f^2gt\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}.$$

Hieraus haben wir endlich erhalten

$$\Omega\cos s=\varepsilon\cos\mathfrak{f}\ \text{ und }\ \Omega\sin s=\frac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi-\theta)}.$$

Zuletzt haben wir die streifende Geschwindigkeit längs IQ

$$=\sqrt{v^2-2\Omega fv\sin s\sin\theta+\Omega^2f^2\sin s^2}\quad(\S.\ 1181.)$$

gefunden, und wenn man dieselbe $=w$ setzt, so haben wir oben gezeigt, dass

$$\sin\xi=\frac{-\Omega f\sin s\cos\theta}{w}\ \text{ und }\ \cos\xi=\frac{\Omega f\sin s\sin\theta-v}{w}$$

ist, wodurch Ω und s bestimmt werden.

Zur Bestimmung der Lage der auf der Kugel festen Punkte A, B und C für jede Zeit sind aber die Formeln so verwickelt, dass man nichts daraus schliessen kann. Setzt man inzwischen, um den Punkt A zu bestimmen, $ZA=l$ und $EZA=\lambda$, so wird die ganze Arbeit auf die folgenden zwei Gleichungen reducirt:

$$\text{I.}\quad dl=dt\left[\varepsilon\sin\mathfrak{f}\sin(\mathfrak{h}+\lambda)-\frac{2\delta fgt}{a^2}\cos(\zeta+\lambda)\right]$$

$$\text{II.}\quad \sin l\,d\lambda=\varepsilon\cos\mathfrak{f}\sin l\,dt$$
$$+\cos l\left[\varepsilon\sin\mathfrak{f}\cos(\mathfrak{h}+\lambda)+\frac{2\delta fgt}{a^2}\sin(\zeta+\lambda)\right]dt,$$

deren Auflösung, wie ich fürchte, fruchtlos unternommen wird.

Da wir nun für jede Zeit die Drehungsaxe nebst der Winkelgeschwindigkeit anzugeben vermögen, was zur Kenntniss der Bewegung, wie man sie gewöhnlich verlangt, hinreichen kann; so erscheint es um so wunderbarer, dass die Bestimmung der Bewegung einzelner Punkte in der Kugel gleichsam über die Kräfte der Analysis geht. Noch weit weniger wird man daher über die Bewegung solcher Kugeln, in welchen die Momente der Trägheit nicht einander gleich sind, etwas zu bestimmen im Stande sein.

Aufgabe 19.

§. 1192. Einer Kugel, deren Momente der Trägheit alle einander gleich sind, ist eine beliebige Bewegung beigebracht worden; man soll den Zeitpunkt angeben, um welchen die streifende Geschwindigkeit und daher auch die Reibung verschwindet, die Kugel also mit gleichförmiger Geschwindigkeit beständig fortschreitet.

Auflösung.

Oben im §. 1176. haben wir gesehen, dass für den Fall, wo die streifende Bewegung verschwinden soll,

$$\Omega \sin s \cos\theta = 0 \quad \text{und} \quad v = f\Omega \sin s \sin\theta$$

sein oder in dem Ausdruck

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{f\Omega \sin s \cos\theta}{v - f\Omega \sin s \sin\theta}$$

Zähler und Nenner zugleich verschwinden müssen. Da wir nun aber

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{e \sin\zeta}{e\cos\zeta + \varepsilon\delta g t}$$

gefunden haben, wo der Zähler $e\sin\zeta$ constant ist; so muss, wenn in jener Formel der Zähler verschwindet, nothwendig zugleich der Nenner verschwinden, weil sonst die Gleichheit dieser Brüche nicht bestehen kann. Die Annahme, dass $\cos\theta = 0$ sei, wird daher die gesuchte Zeit ergeben.

Wir werden aber dasselbe ausführlicher bestimmen, wenn wir für die beliebige Zeit t die streifende Geschwindigkeit w aufsuchen. Da nun

$$\sin\xi = -\frac{\Omega f \sin s \cos\theta}{w} \quad \text{also} \quad w = -\frac{\Omega f \sin s \cos\theta}{\sin\xi}$$

ist, so wird zunächst, weil $\Omega \sin s = \dfrac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi-\theta)}$ ist,

$$w = -\frac{e\sin\zeta\cos\theta}{\sin\xi\cos(\xi-\theta)}.$$

Weil aber $\theta=\xi-(\xi-\theta)$ ist, so erhalten wir

$$w=-e\sin\zeta[\operatorname{cotg}\xi+\operatorname{tg}(\xi-\theta)],$$

und wenn wir statt $\operatorname{tg}\xi$ und $\operatorname{tg}(\xi-\theta)$ die oben gefundenen Werthe substituiren,

$$w=-\left[e\cos\zeta+2\delta gt+e\sin\zeta\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h})+\frac{2\delta f^2gt}{a^2}\right].$$

Es ist aber

$$\cos\zeta+\sin\zeta\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h})=\frac{\cos\mathfrak{h}}{\cos(\zeta-\mathfrak{h})} \text{ und } \cos(\zeta-\mathfrak{h})=-\frac{e\cos\mathfrak{h}}{k} \text{ (§. 1185.)},$$

mithin

$$e\cos\zeta+e\sin\zeta\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h})=-k,$$

wo k die anfängliche streifende Geschwindigkeit bezeichnet. Nach Verlauf der Zeit t haben wir daher diese Geschwindigkeit

$$w=k-2\delta g\left(1+\frac{f^2}{a^2}\right)t,$$

so dass dieselbe im Verlauf der Zeit gleichförmig abnimmt. Sie wird demnach endlich gewiss verschwinden, und zwar wird diess geschehen nach Verlauf der Zeit

$$t=\frac{a^2k}{2\delta g(a^2+f^2)};$$

es wird alsdann ferner $\cos\theta=0$ und $\theta=PZO=90^0$ sein. Ist diess nun eingetreten, so wollen wir sehen, wie die übrigen Bestimmungen der Bewegung sich alsdann verhalten werden. Da nun $2\delta gt=\frac{a^2k}{a^2+f^2}$ ist, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a^2k\sin\zeta}{e(a^2+f^2)+a^2k\cos\zeta} \text{ und } \operatorname{tg}\xi=\frac{e(a^2+f^2)\sin\zeta}{e(a^2+f^2)\cos\zeta+a^2k},$$

so wie, weil $\theta=90^0$,

$$\Omega\sin s=\frac{e\sin\zeta}{f\sin\xi}.$$

Da aber

$$v=\sqrt{e^2+\frac{2a^2ek\cos\zeta}{a^2+f^2}+\frac{a^4k^2}{(a^2+f^2)^2}}$$

wird, so erhalten wir

$$\sin\varphi=\frac{a^2k\sin\zeta}{(a^2+f^2)v},\quad \cos\varphi=\frac{e(a^2+f^2)+a^2k\cos\zeta}{(a^2+f^2)v},$$

$$\sin\xi=\frac{e\sin\zeta}{v} \text{ und so } \Omega\sin s=\frac{v}{f}.$$

Weil ferner $\Omega\cos s=\varepsilon\cos\mathfrak{f}$ ist, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}s=\frac{v}{\varepsilon f\cos\mathfrak{f}}$$

und $\Omega = \sqrt{\frac{v^2}{f^2} + \varepsilon^2 \cos \mathfrak{f}^2}$

$$= \frac{\sqrt{e^2 f^2 + 2\varepsilon e a^2 f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + \varepsilon^2 (a^2 + f^2)^2 \cos \mathfrak{f}^2}}{a^2 + f^2},$$

weil $k^2 = e^2 - 2\varepsilon e f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin \mathfrak{f}^2$ ist.

Zusatz 1.

§. 1193. Je grösser demnach im Anfange die streifende Geschwindigkeit k war, desto länger dauert die Bewegung, ehe sie mit dem Aufhören der Reibung zur Gleichförmigkeit gelangt. Besteht aber die Kugel aus gleichartiger Materie, so wird $a^2 = \frac{2}{5} f^2$ (§. 506.), und es wird daher die Gleichförmigkeit der Bewegung beginnen nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{k}{7\delta g} \text{ Secunden};$$

es wird hieraus unter der Voraussetzung, dass $\delta = \frac{1}{3}$ sei, $t = \frac{3k}{7g}$, wobei $g = 15\frac{5}{8}$ Fuss ist.

Zusatz 2.

§. 1194. Damit der Mittelpunkt der Kugel um dieselbe Zeit zur Ruhe gelange, muss der Anfangszustand so beschaffen sein, dass

$$\cos \zeta = -1 \text{ und } e = \frac{a^2 k}{a^2 + f^2}$$

sei. Es wird demnach $k = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h}$ und $\sin \mathfrak{h} = 1$, oder $\mathfrak{h} = 90^0$ und $k = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, also

$$\varepsilon \sin \mathfrak{f} = -\frac{ef}{a^2}.$$

Ferner wird, weil $v = 0$ ist,

$$s = 0 \text{ und } \Omega = \varepsilon \cos \mathfrak{f},$$

mit welcher Winkelgeschwindigkeit die Kugel sich jetzt um die ruhende vertikale Axe drehen wird, nachdem von Anfang an die Zeit

$$t = \frac{e}{2\delta g} \text{ Secunden}$$

verflossen ist.

Zusatz 3.

§. 1195. In diesem Falle, wo im Anfange $\mathfrak{h} = 90^0$ und $\varepsilon = -\frac{ef}{a^2 \sin \mathfrak{f}}$ ist, wird $\zeta = 180^0$, $\varphi = 0$, $\xi = 180^0$, $\theta = 90^0$ und $v = e - 2\delta g t$. Ferner erhalten wir

$$\Omega \cos s = -\frac{ef \cos \mathfrak{f}}{a^2 \sin \mathfrak{f}} \text{ und } \Omega \sin s = -\frac{ef}{a^2}\left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right),$$

also

$$\operatorname{tg} s = \left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right) \operatorname{tg} \mathfrak{f}$$

und

$$\Omega = -\frac{ef}{a^2 \sin \mathfrak{f}} \sqrt{1 - \frac{4\delta g t}{e} \sin \mathfrak{f}^2 + \frac{4\delta^2 g^2 t^2}{e^2} \sin \mathfrak{f}^2}\,.$$

Im Anfange war aber die streifende Geschwindigkeit

$$k = e\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right),$$

und es ist dieselbe nach Verlauf der Zeit t

$$w = \left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)(e - 2\delta g t).$$

Wir sehen daher, dass, wenn man $t = \frac{e}{2\delta g}$ setzt, zugleich $w = 0$, $v = 0$ und $s = 0$ wird, wie vorhin.

Zusatz 4.

§. 1196. Damit der Werth $\Omega \sin s = \frac{e \sin \zeta}{f \cos(\xi - \theta)}$ nicht unbestimmt erscheine, was geschieht, wenn der Zähler und Nenner zugleich verschwinden oder $\zeta = 0$ ist, wird es angemessen sein, statt $\sin \zeta$ und $\cos(\xi - \theta)$ die Werthe aus dem Obigen zu substituiren. Auf diese Weise wird man finden

$$\Omega \sin s = \sqrt{\varepsilon^2 \sin \mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}(\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e \sin \mathfrak{h})}{a^2 k} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}},$$

woraus, weil $\Omega \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}$ ist, hervorgeht

$$\Omega^2 = \varepsilon^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}(\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e \sin \mathfrak{h})}{a^2 k} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^2}.$$

Zusatz 5.

§. 1197. Da die lebendige Kraft der Kugel $= M(v^2 + a^2 \Omega^2)$ ist (§. 746.), so war dieselbe im Anfange $= M(e^2 + \varepsilon^2 a^2)$; nach Verlauf der Zeit t wird sie aber

$$= M\left[e^2 + \varepsilon^2 a^2 - 4\delta g k t + 4\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)\delta^2 g^2 t^2\right].$$

Demnach wird nach Verlauf der Zeit $t = \frac{a^2 k}{2\delta g(a^2 + f^2)}$ die lebendige Kraft der Kugel

$$= \frac{M[e^2 f^2 + 2\varepsilon e a^2 f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 a^2 (a^2 + f^2 \cos \mathfrak{f}^2)]}{a^2 + f^2}$$

und der Unterschied zwischen der anfänglichen und dieser letztern

$$= \frac{Ma^2[e^2 - 2\varepsilon ef \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin \mathfrak{f}^2]}{a^2+f^2} = \frac{Ma^2 k^2}{a^2+f^2};$$

mithin die lebendige Kraft zur erwähnten Zeit

$$= M\left[e^2 + \varepsilon^2 a^2 - \frac{a^2 k^2}{a^2+f^2}\right].$$

Anmerkung.

§. 1198. Nach diesen Formeln kann man die ganze Bewegung der Kugel angeben, was für eine Bewegung ihr auch immer im Anfange beigebracht sein mag; indessen sind diese Formeln nicht wenig verwickelt, wesshalb es zur deutlichern Darstellung nicht zwecklos sein wird, einige merkwürdigere Fälle zu entwickeln. Solcher gibt es, wie wir oben angedeutet haben, besonders zwei, nämlich den einen, in welchem der Bogen ZO anfangs ein Quadrat, und den andern, in welchem der Winkel $DZO = \mathfrak{h}$ anfangs ein rechter war; beide Fälle wollen wir hier getrennt entwickeln.

Aufgabe 20.

§. 1199. Einer Kugel, in welcher alle Momente der Trägheit einander gleich sind, ist im Anfange eine drehende Bewegung um eine horizontale Axe ausser der fortschreitenden beigebracht worden; man soll die Fortsetzung der Bewegung bestimmen.

Auflösung.

(Fig. 159.) Da im Anfange die Drehungsaxe horizontal war, so wird $\mathfrak{f} = ZO = 90^0$. Wenn demnach e die fortschreitende Geschwindigkeit nach der Richtung DIE und ε die Winkelgeschwindigkeit um die Axe IO im Sinne $ZETD$ bezeichnet, so sei zur Bestimmung des Punktes O der Winkel $DZO = \mathfrak{h}$, wobei f der Radius der Kugel und Ma^2 ihr Moment der Trägheit bleibt. Es war daher im Anfange die streifende Geschwindigkeit

$$k = \sqrt{e^2 - 2\varepsilon ef \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2}$$

und zur Bestimmung ihrer Richtung IQ der Winkel $DZQ = \zeta$, so dass

$$\sin\zeta = -\frac{\varepsilon f \cos\mathfrak{h}}{k} \text{ und } \cos\zeta = \frac{\varepsilon f \sin\mathfrak{h} - e}{k}$$

ist (§. 1191.). (Figur 161.) Nachdem wir diess für den Anfangszustand aufgestellt haben, so habe im Verlauf der Zeit t der Mittelpunkt der Kugel den Weg GI beschrieben, er befinde sich daher jetzt in I; alsdann wird seine Geschwindigkeit längs IR

$$= v = \sqrt{e^2 + \frac{4\delta egt(\varepsilon f \sin\mathfrak{h} - e)}{k} + 4\delta^2 g^2 t^2}.$$

Setzen wir daher die Coordinaten $GX = X$ und $XI = Y$, so wird, weil

$$\operatorname{tg} EIR = \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\delta\varepsilon fgt\cos\mathfrak{h}}{ek + 2\delta gt(\varepsilon f\sin\mathfrak{h} - e)}$$

ist,

$$dX = edt + \frac{2\delta gtdt}{k}(\varepsilon f\sin\mathfrak{h} - e)$$

und

$$dY = -\frac{2\delta\varepsilon fg\cos\mathfrak{h}\,tdt}{k};$$

mithin

$$GX = X = et + \frac{\delta gt^2}{k}(\varepsilon f\sin\mathfrak{h} - e)$$

und

$$XI = Y = -\frac{\delta\varepsilon fgt^2}{k}\cos\mathfrak{h}.$$

(Fig. 159.) Die drehende Bewegung erfolge nun im Sinne $ZETD$ mit der Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ um den Pol O, wobei $ZO = s$, $PZO = \theta$ und $DZQ = \varphi + \xi$ ist und IQ die Richtung der streifenden Geschwindigkeit darstellt. Da nun beständig $\varphi + \xi = \zeta$ oder die Richtung IQ constant ist, so wird nach §. 1188.

$$\operatorname{tg}\xi = -\frac{\varepsilon ef\cos\mathfrak{h}}{\varepsilon ef\sin\mathfrak{h} - e^2 + 2\delta gkt}$$

und nach §. 1191.

$$\operatorname{tg}(\xi - \theta) = \frac{\varepsilon f - e\sin\mathfrak{h}}{e\cos\mathfrak{h}} - \frac{2\delta fgkt}{\varepsilon ea^2\cos\mathfrak{h}};$$

hierdurch werden beide Winkel ξ und θ bestimmt und nach §. 1191.

$$\operatorname{tg}(\varphi + \theta) = \frac{\varepsilon a^2 k\sin\mathfrak{h} + 2\delta fgt(e - \varepsilon f\sin\mathfrak{h})}{\varepsilon a^2 k\cos\mathfrak{h} - 2\delta\varepsilon f^2 gt\cos\mathfrak{h}}$$

sein. Die streifende Geschwindigkeit nach der Richtung IQ wird

$$w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)t,$$

ferner, weil $\Omega\cos s = \varepsilon\cos\mathfrak{f} = 0$ ist, $ZO = s = 90^\circ$ und

$$\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{4\delta\varepsilon fgt(\varepsilon f - e\sin\mathfrak{h})}{a^2 k} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}}.$$

Diese ungleichförmige Bewegung wird aber nur während der Zeit

$$t = \frac{a^2 k}{2\delta g(a^2 + f^2)}$$

dauern, und es wird nach Verlauf derselben

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\varepsilon a^2 f\cos\mathfrak{h}}{e(a^2 + f^2) + a^2(\varepsilon f\sin\mathfrak{h} - e)} = -\frac{\varepsilon a^2\cos\mathfrak{h}}{ef + \varepsilon a^2\sin\mathfrak{h}},$$

$$v = \sqrt{e^2 + \frac{2a^2 e(\varepsilon f\sin\mathfrak{h} - e)}{a^2 + f^2} + \frac{a^4 k^2}{(a^2 + f^2)^2}},$$

$$s = 90^\circ,$$

und wenn man den Werth von k^2 substituirt,

$$\Omega = \frac{v}{f} = \frac{\sqrt{e^2f^2 + 2\varepsilon e a^2 f \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 a^4}}{a^2 + f^2}.$$

Ferner wird nach §. 1192.

$$\theta = 90^0 \text{ und } \sin\xi = \frac{e \sin\zeta}{v}.$$

Zusatz 1.

§. 1200. War im Anfange der Winkel $DZO = \mathfrak{h} = 0$, so wird

$$k = \sqrt{e^2 + \varepsilon^2 f^2},$$

und zur Bestimmung des Winkels $DZQ = \zeta$,

$$\sin\zeta = -\frac{\varepsilon f}{k} \text{ und } \cos\zeta = -\frac{e}{k}.$$

Hierauf ergibt sich nach Verlauf der Zeit t

$$v = \sqrt{e^2 - \frac{4\delta e^2 g t}{k} + 4\delta^2 g^2 t^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\delta\varepsilon f g t}{e(k - 2\delta g t)},$$

$$X = et\left(1 - \frac{\delta g t}{k}\right) \text{ und } Y = -\frac{\delta\varepsilon f g t^2}{k}.$$

Ferner haben wir

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\varepsilon e f}{e^2 - 2\delta g k t},$$

$$\operatorname{tg}(\xi - \theta) = \frac{\varepsilon f}{e} - \frac{2\delta f g k t}{\varepsilon e a^2},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \theta) = \frac{2\delta e f g t}{\varepsilon a^2 k - 2\delta\varepsilon f^2 g t},$$

$$\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{4\delta\varepsilon^2 f^2 g t}{a^2 k} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}}$$

und

$$w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)t.$$

Nach Verlauf der Zeit $t = \frac{a^2 k}{2\delta g(a^2 + f^2)}$ wird aber

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\varepsilon a^2}{ef}, \quad v = \frac{f\sqrt{e^2f^2 + \varepsilon^2 a^4}}{a^2 + f^2} = f\Omega,$$

$$\theta = 90^0 \text{ und } \operatorname{tg}\xi = \frac{\varepsilon e f(a^2 + f^2)}{e^2(a^2 + f^2) - a^2 k^2} = \frac{\varepsilon e(a^2 + f^2)}{f(e^2 - \varepsilon^2 a^2)}.$$

Zusatz 2.

§. 1201. Wenn aber der Winkel $DZO = \mathfrak{h} = 180^0$ war, so werden dieselben Formeln die Bewegung angeben, wenn man

die Winkelgeschwindigkeit ε negativ oder im entgegengesetzten Sinne gerichtet annimmt. Ist aber $\varepsilon=0$, oder der Kugel nur eine fortschreitende Bewegung beigebracht worden, so wird nach §. 1185.

$$k=e,\ \zeta=180^0,\ v=e-2\delta gt,\ \varphi=0,$$
$$X=t(e-\delta gt),\ Y=0,\ \xi=180^0,\ \theta=90^0$$

und

$$\Omega=\frac{2\delta fgt}{a^2}.$$

Ferner wird nach Verlauf der Zeit $t=\frac{a^2e}{2\delta g(a^2+f^2)}$,

$$v=\frac{ef^2}{a^2+f^2},\ \Omega=\frac{ef}{a^2+f^2}$$

und

$$X=\frac{et(a^2+2f^2)}{2(a^2+f^2)}=\frac{a^2e^2(a^2+2f^2)}{4\delta g(a^2+f^2)^2}.$$

Anmerkung.

§. 1202. Dieser Fall, in welchem die Kugel anfangs keine drehende Bewegung empfangen hat, gilt allgemein und ist an keine Voraussetzung der Winkel $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{h}$ gebunden. Alsdann geht daher die Kugel geradlinig mit verzögerter fortschreitender Bewegung vorwärts und wird allmählig eine drehende Bewegung annehmen, bis sie nach Verlauf der Zeit $t=\frac{a^2e}{2\delta g(a^2+f^2)}$ eine gleichförmige Bewegung erlangt, mit welcher sie hierauf beständig fortschreitet. Hierdurch werden wir zu dem Falle geführt, in welchem die Kugel im Anfange nur eine drehende Bewegung ohne irgend eine fortschreitende empfangen hat und dessen Entwickelung leicht ist. Setzt man nämlich $e=0$, so wird nach §. 1191.

$k=\varepsilon f\sin\mathfrak{f}$, also $\sin\zeta=-\cos\mathfrak{h}$, $\cos\zeta=\sin\mathfrak{h}$ und $\zeta=\mathfrak{h}-90^0$.

Hierbei ist zur Bestimmung der Axe IO, um welche anfangs die drehende Bewegung beigebracht worden ist, $ZO=\mathfrak{f}$, $DZO=\mathfrak{h}$ und die Winkelgeschwindigkeit im Sinne $ZETD=\varepsilon$. Nach Verlauf der Zeit t wird $\varphi=\zeta$, indem man nämlich den Winkel $DZO=\mathfrak{h}$ um $PZO=90^0$ vermindert, ist PI die Richtung der fortschreitenden Bewegung, welche die Kugel erlangen wird, und deren Geschwindigkeit

$$v=2\delta gt,$$

also der Zeit proportional ist. Ferner wird aber $\operatorname{tg}\xi=0$ und $\operatorname{tg}(\xi-\theta)=\infty$, demnach, weil $\varphi+\xi=\zeta=\mathfrak{h}-90^0$ ist,

$$\xi=0 \text{ und } \theta=90^0, \text{ also } DZO=\zeta+90^0=\mathfrak{h},$$

so dass der Drehungspol O sich beständig auf demselben Vertikalkreise befinden wird. Endlich ist nach §. 1196.

$$\Omega \sin s = \sqrt{\varepsilon^2 \sin \mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin \mathfrak{f}}{a^2} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}} = \varepsilon \sin \mathfrak{f} - \frac{2\delta fgt}{a^2}$$

und

$$\Omega \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}, \text{ also } \operatorname{tg} s = \operatorname{tg} \mathfrak{f} - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon a^2 \cos \mathfrak{f}},$$

so dass der Bogen ZO kleiner wird, ausgenommen wenn er $= 90^0$ oder $> 90^0$ ist; auch haben wir

$$\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin \mathfrak{f}}{a^2} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}}.$$

Die Bewegung wird aber eine gleichförmige werden nach Verlauf der Zeit $t = \frac{\varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f}}{2\delta g(a^2 + f^2)}$ (§. 1191.), und zwar wird alsdann

$$\Omega = \frac{\varepsilon \sqrt{a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + (a^2 + f^2)^2 \cos \mathfrak{f}^2}}{a^2 + f^2},$$

$$v = \frac{\varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f}}{a^2 + f^2} \text{ und } \operatorname{tg} s = \frac{a^2 \operatorname{tg} \mathfrak{f}}{a^2 + f^2}.$$

Wenn demnach $\mathfrak{f} = 0$, oder der Kugel eine drehende Bewegung um eine vertikale Axe, ohne irgend eine fortschreitende, beigebracht wäre, so würde sie dieselbe Bewegung unverändert beibehalten.

Aufgabe 21.

§. 1203. Einer Kugel, in welcher alle Momente der Trägheit einander gleich sind, ist eine drehende Bewegung um eine auf die Richtung der fortschreitenden Bewegung normale Axe beigebracht worden; man soll die Fortsetzung der Bewegung bestimmen.

Auflösung.

(Figur 159.) Da DIE die Richtung der im Anfange beigebrachten fortschreitenden Bewegung und e ihre Geschwindigkeit ist, so wird der Winkel $DZO = \mathfrak{h} = 90^0$, und wenn man $ZO = \mathfrak{f}$ annimmt, so war O der Pol, um welchen im Anfange die Kugel die Winkelgeschwindigkeit $= \varepsilon$ im Sinne $ZETD$ empfangen hat. Wir haben demnach

$$k = \pm (e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f}),$$

wo man den positiven Werth für k annehmen muss, so dass sich hier zwei getrennt zu behandelnde Fälle ergeben.

Fall I. Es sei $e > \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, alsdann wird die streifende Geschwindigkeit im Anfange oder

$$k = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$$

und ihre Richtung ist IQ, so dass $\sin DQ = 0$ und $\cos DQ = -1$ (§. 1199.), also $DQ = \zeta = 180^0$ wird und Q auf E fällt. Die Kugel wird durch die Reibung δM längs ID beständig zurückgezogen, woraus man sogleich schliesst, dass der Mittelpunkt I auf derselben geraden Linie DE fortgehen wird. Nach Verlauf der Zeit t wird demnach, weil $\cos\zeta = -1$ ist, die Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$v = e - 2\delta gt \text{ (§. 1191.)}$$

und die streifende Geschwindigkeit

$$w = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - 2\delta g\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)t \text{ (§. 1192.)};$$

ausserdem haben wir

$$\varphi = 0,\ \xi = \zeta - \varphi = 180^0 \text{ und } \theta = 0.$$

Zur Bestimmung der Lage der gegenwärtigen Axe IO haben wir $DIO = 90^0$, und wenn wir den Bogen $ZO = s$ und die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ setzen, so wird

$$\Omega \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f} \text{ und } \Omega \sin s = \varepsilon \sin \mathfrak{f} + \frac{2\delta fgt}{a^2},$$

woraus man erhält

$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} \mathfrak{f} + \frac{2\delta fgt}{\varepsilon a^2 \cos \mathfrak{f}},$$

und

$$\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin \mathfrak{f}}{a^2} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}}.$$

(Figur 161.) In dieser Zeit t durchläuft der Mittelpunkt I die gerade Linie

$$GX = X = t(e - \delta gt).$$

Diese ungleichförmige Bewegung wird aber während der Zeit

$$t = \frac{a^2(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})}{2\delta g(a^2 + f^2)}$$

dauern, und nach Verlauf derselben wird der Weg

$$X = \frac{a^2(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})[e(a^2 + 2f^2) + \varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f}]}{2\delta g(a^2 + f^2)^2}$$

und die Geschwindigkeit

$$v = \frac{f(ef + \varepsilon a^2 \sin \mathfrak{f})}{a^2 + f^2}.$$

Zur Bestimmung der drehenden Bewegung haben wir aber

$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} ZO = \operatorname{tg} \mathfrak{f} + \frac{f(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})}{\varepsilon(a^2 + f^2)\cos \mathfrak{f}} = \frac{ef + \varepsilon a^2 \sin \mathfrak{f}}{\varepsilon(a^2 + f^2)\cos \mathfrak{f}},$$

wobei beständig $DIO = 90^0$ ist und die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\sqrt{e^2 f^2 + 2\varepsilon e a^2 f \sin \mathfrak{f} + \varepsilon^2 a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + \varepsilon^2 (a^2 + f^2)^2 \cos \mathfrak{f}^2}}{a^2 + f^2}.$$

Fall II. Es sei $e < \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$ oder die streifende Geschwindigkeit im Anfange

$$k = \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e,$$

alsdann ist ihre Richtung IQ so beschaffen, dass $\sin DQ = 0$ $\cos DQ = 1$, mithin $DQ = \zeta = 0$ wird und Q auf D fällt. Die Kugel wird demnach durch die Reibung δM beständig nach der Richtung IE beschleunigt, ihr Mittelpunkt I schreitet auf derselben geraden Linie IE fort und nach Verlauf der Zeit t wird ihre Geschwindigkeit

$$v = e + 2\delta g t,$$

so wie ihre streifende Geschwindigkeit

$$w = \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e - 2\delta g t\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right).$$

Ferner wird $\varphi = 0$, $\xi = 0$ und $\theta = 90^0$. Zur Bestimmung der gegenwärtigen Drehungsaxe IO ist daher $DIO = 90^0$, und wenn man den Bogen $ZO = s$ und die Winkelgeschwindigkeit $= \Omega$ setzt,

$$\Omega \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}, \quad \Omega \sin s = \varepsilon \sin \mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{a^2},$$

also

$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} \mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a^2 \cos \mathfrak{f}}$$

und

$$\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{4\delta \varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}}{a^2} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}}.$$

In dieser Zeit wird der Mittelpunkt der Kugel die Linie

$$GX = X = t(e + \delta g t)$$

durchlaufen. Diese ungleichförmige Bewegung wird aber nur während der Zeit $t = \frac{a^2(\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e)}{2\delta g(a^2 + f^2)}$ anhalten, und es wird nach Verlauf der letztern die Geschwindigkeit

$$v = \frac{f(ef - \varepsilon a^2 \sin \mathfrak{f})}{a^2 + f^2}$$

und der Weg

$$X = \frac{a^2(\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e)\,[e(a^2 + 2f^2) + \varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f}]}{2\delta g (a^2 + f^2)^2}.$$

Zur Bestimmung der drehenden Bewegung findet man aber

$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} ZO = \frac{ef + \varepsilon a^2 \sin \mathfrak{f}}{\varepsilon(a^2 + f^2)\cos \mathfrak{f}},$$

wobei beständig $DIO = 90^0$ ist und die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\sqrt{e^2 f^2 + 2\varepsilon e a^2 f \sin \mathfrak{f} + \varepsilon^2 a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + \varepsilon^2 (a^2 + f^2)^2 \cos \mathfrak{f}^2}}{a^2 + f^2}.$$

Zusatz 1.

§. 1204. Ist $e = \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, so wird die Kugel sogleich von

Anfang an eine gleichförmige, sowohl fortschreitende als drehende Bewegung verfolgen und es bildet dieser Fall die Grenze zwischen den zwei behandelten.

Zusatz 2.

§. 1205. Zum erstern Falle, wo $e > \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$ ist, sind diejenigen Fälle zu zählen, in welchen ε einen negativen Werth hat, oder der Kugel anfangs eine drehende Bewegung im Sinne *ZDTE* beigebracht worden ist. Setzt man aber $-\varepsilon$ statt ε, so kann die Kugel zurückkehren, ehe sie zur gleichförmigen Bewegung gelangt, nämlich wenn $\varepsilon > \frac{ef}{a^2 \sin \mathfrak{f}}$ ist.

Zusatz 3.

§. 1206. In diesem Falle, wo ε negativ genommen wird, haben wir zur Zeit t

$$\varphi = 0, \ \theta = 90^0, \ \xi = 180^0, \ v = e - 2\delta g t,$$

$$w = e + \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - 2\delta g \left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right) t,$$

$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} \mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a^2 \cos \mathfrak{f}}$$

und

$$\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{4\delta \varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}}{a^2} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}}.$$

Nach Verlauf der Zeit $t = \frac{a^2(e + \varepsilon f \sin \mathfrak{f})}{2\delta g (a^2 + f^2)}$ ist der Weg

$$X = \frac{a^2 (e + \varepsilon f \sin \mathfrak{f}) [e(a^2 + 2f^2) - \varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f}]}{2\delta g (a^2 + f^2)^2}$$

zurückgelegt, es wird eine gleichförmige Bewegung eintreten und

$$v = \frac{f(ef - \varepsilon a^2 \sin \mathfrak{f})}{a^2 + f^2}, \quad \operatorname{tg} s = \frac{\varepsilon a^2 \sin f - ef}{\varepsilon (a^2 + f^2) \cos \mathfrak{f}}$$

und

$$\Omega = \frac{\sqrt{e^2 f^2 - 2\varepsilon e a^2 f \sin \mathfrak{f} + \varepsilon^2 a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + \varepsilon^2 (a^2 + f^2)^2 \cos \mathfrak{f}^2}}{a^2 + f^2}$$

werden.

Anmerkung.

§. 1207. Dieser Fall ist vorzüglich merkwürdig, indem man der Kugel eine solche Bewegung beibringen kann, dass sie zuerst sich entfernt, bald aber wieder umkehrt. Man pflegt diess durch einen Versuch zu zeigen, indem man mittelst des um *D* herum angebrachten und abwärts drückenden Fingers der Kugel eine doppelte Bewegung beibringt, eine fortschreitende im Sinne *DIE* und eine drehende im Sinne *ZDTE*. Damit aber

die Erscheinung gelinge, muss die Winkelgeschwindigkeit im Vergleich mit der fortschreitenden eine gewisse bestimmte Grenze überschreiten; um diese leichter zu erkennen, wollen wir die Rechnung dem Falle anpassen, in welchem der Kugel eine drehende Bewegung um eine horizontale und auf die Richtung der fortschreitenden Bewegung normale Axe beigebracht wird. Es bezeichne demnach e die fortschreitende Geschwindigkeit nach der Richtung DIE und ε die im Sinne $ZDTE$ rückwärts drehende Winkelgeschwindigkeit, wobei f der Radius der Kugel, Ma^2 ihr Moment der Trägheit und δM die Reibung ist. Zuerst wird die Kugel in der Richtung DIE fortgehen und es wird nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit

$$v = e - 2\delta g t$$

und der zurückgelegte Weg

$$X = t(e - \delta g t);$$

aber auch jetzt noch wird sie sich um dieselbe Axe rückwärts drehen mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \varepsilon - \frac{2\delta f g t}{a^2}.$$

Die Bewegung wird nun gleichförmig nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{a^2(e + \varepsilon f)}{2\delta g(a^2 + f^2)},$$

es wird alsdann ihre fortschreitende Geschwindigkeit

$$v = \frac{f(ef - \varepsilon a^2)}{a^2 + f^2}$$

und ihre Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\varepsilon a^2 - ef}{a^2 + f^2}.$$

Wenn daher $\varepsilon > \frac{ef}{a^2}$ ist, so wird sich die Kugel jetzt rückwärts bewegen, wobei auch die drehende Bewegung nach rückwärts geneigt ist; ist aber $\varepsilon < \frac{ef}{a^2}$, so geht die Kugel nach vorwärts, die Drehung hat alsdann eine entgegengesetzte Richtung.

In jenem Falle fing die Kugel an rückwärts zu gehen nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{e}{2\delta g},$$

und nach Zurücklegung des Weges

$$X = \frac{e^2}{4\delta g}.$$

Ist die Kugel gleichartig, so wird $a^2 = \frac{2}{5}f^2$ und es drückt

εf die Drehungsgeschwindigkeit im Berührungspunkte aus, diese setze man $= h$. Nach Verlauf der Zeit t wird die fortschreitende Geschwindigkeit

$$v = e - 2\delta g t,$$

die drehende im Berührungspunkte

$$f\Omega = u = h - 5\delta g t$$

und der durchlaufene Weg

$$= t(e - \delta g t).$$

Die Bewegung wird gleichförmig nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{e+h}{7\delta g}$$

und nachdem der Weg

$$= \frac{(6e-h)(e+h)}{49\delta g}$$

zurückgelegt ist. Alsdann wird

$$v = \frac{5e-2h}{7} \text{ und } u = \frac{2h-5e}{7};$$

damit nun die erwähnte Erscheinung eintrete, muss im Anfange $h > \frac{5}{2}e$ sein. Ist aber $h = \frac{5}{2}e$, so werden beide Bewegungen zugleich aufhören nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{e}{2\delta g} \text{ Secunden},$$

und nach Zurücklegung des Weges

$$= \frac{e^2}{4\delta g}.$$

Bemerkung des Herausgebers.

Der neuern Ausgabe dieses Originalwerkes vom Jahre 1790 ist eine Abhandlung angehängt, deren Titel ist: Von der Bewegung einer Kugel, welche sich um eine beliebige schiefe Axe dreht und über einer horizontalen Ebene einhergeht. Diese Abhandlung ist, die Einleitung und den Schluss abgerechnet, mit dem eben beendeten Kapitel identisch, auch sollte sie, wie die Einleitung besagt, von diesem Werke getrennt bleiben. Um hier nun eine Wiederholung zu vermeiden, lasse ich als Anhang dieses Kapitels nur die Einleitung und den Schluss jener Abhandlung folgen.

Einleitung.

In allen bisher über die Bewegung von Kugeln über einer horizontalenEbene vorgetragenen Lehren haben wir keine andere

Bewegung betrachtet, als solche, welche um eine auf die Richtung der Bewegung normale Axe erfolgt. Es bleibt die höchst schwierige Frage übrig, auf welche Weise eine Kugel, der um eine beliebige schiefe Axe eine drehende Bewegung beigebracht worden ist, oberhalb einer horizontalen Ebene fortschreiten wird. Die Principien, nach welchen man eine solche Bewegung bestimmen muss, sind nämlich noch nicht genügend entwickelt, um dieselben allen etwa vorkommenden Fällen anpassen zu können. Ich selbst habe diese Principien in meinem Werke über die Bewegung fester und starrer Körper zuerst bekannt gemacht und dadurch sehr viele Erscheinungen erklärt, welche in den gewöhnlichen Principien der Mechanik gar nicht angegriffen werden. Im letzten Kapitel dieses Werkes habe ich eben diesen Gegenstand über eine Kugel, welche über einer horizontalen Ebene fortgeht, während sie sich inzwischen um eine beliebige schiefe Axe dreht, mit allem Eifer untersucht. Da aber dieses Buch sich nur in den Händen Weniger befindet und diese Abhandlung auch jetzt den meisten Geometern noch unbekannt zu sein scheint; so halte ich es nicht für unangemessen, diesen Gegenstand hier aufs Neue an das Licht zu ziehen, wie er am erwähnten Orte behandelt worden ist. Ich werde hierbei, wenn es nöthig erscheint, einige Erläuterungen hinzufügen, wodurch die allgemeine Theorie der über einer horizontalen Ebene beliebig fortgetriebenen Kugeln vervollständigt werden wird. Bei dieser Untersuchung hat man aber hauptsächlich die Reibung zu berücksichtigen, weil, wenn diese beseitigt wäre, die Kugel beständig dieselbe fortschreitende und drehende Bewegung, ohne irgend eine Aenderung, beibehalten würde. Ich werde aber die Reibung auf dieselbe Weise in die Rechnung einführen, wie bisher die Geometer sie zu behandeln pflegten. Obgleich man nämlich alle Symptome der Reibung vielleicht noch nicht vollkommen kennt, so scheint es doch, als ob jene Behandlung keine Aenderung erleiden dürfe, weil die Hauptarbeit hier in der Entwickelung der schwierigsten Principien der höhern Mechanik und der Integration mehrerer, sonst sehr schwieriger Differentialformeln besteht.

Schlussfolgen
zur Bestimmung der Bewegung, mit welcher eine auf beliebige Weise angetriebene Kugel über einer horizontalen Ebene fortschreitet.

I. Stand der Frage. Wir setzen eine solche Beschaffen-

heit der Kugel voraus, dass nicht nur ihr Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Figur fällt, sondern auch alle Momente der Trägheit in Bezug auf jeden Durchmesser einander gleich sind. Der Radius einer solchen Kugel wird $=f$, ihre Masse oder Gewicht $=M$ und das Moment der Trägheit in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gehende Axe $=Ma^2$ gesetzt, so dass, wenn die Kugel aus gleichartiger Materie besteht, $a^2=\frac{2}{5}f^2$ sein wird. Ausserdem nehmen wir sowohl die horizontale Ebene, als auch die ganze Oberfläche der Kugel so gleichmässig glatt an, dass sie, während sie über der horizontalen Ebene streifend fortgeht, überall dieselbe Reibung erleidet, und da diese dem Druck oder dem Gewicht der Kugel proportional ist, setzen wir sie hier $=\delta M$.

II. Anfangszustand. (Figur 162.) Wir setzen voraus, dass die Kugel anfangs im Punkte D auf der Ebene stehe und ihr eine fortschreitende Bewegung nach der Richtung DO und mit einer solchen Geschwindigkeit beigebracht worden sei, dass sie in Einer Secunde einen Weg $=e$ durchlaufen würde; diese Geschwindigkeit hat man sich nicht sowohl dem Berührungspunkte D, als vielmehr dem Mittelpunkte der Kugel beigebracht zu denken. Hierauf stelle aber der Kreis $ABCD$ einen vertikalen, nach der Richtung DO ausgeführten Schnitt der Kugel vor, zugleich stelle aber auch derselbe Kreis die uns zugewandte convexe Halbkugel dar, auf welcher E der Pol ist, um den der Kugel anfangs eine drehende Bewegung beigebracht worden ist, deren Winkelgeschwindigkeit im Sinne $ABCD=\varepsilon$ sei, so dass ε den in Einer Secunde zu beschreibenden Winkel bezeichnet. Zur Bestimmung der Lage dieses Punktes E sei B der höchste Punkt der Kugel, welcher zugleich dem Berührungspunkte D diametral gegenüberliegt; indem man nun durch E den grössten Kreis BE zieht, setze man $BE=\mathfrak{f}$ und $ABE=\mathfrak{h}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die ganze der Kugel im Anfange beigebrachte lebendige Kraft

$$=M[e^2+\varepsilon^2a^2].$$

Nachdem daher der Kugel eine solche doppelte Bewegung beigebracht worden ist, fragt es sich, auf welche Weise sie hierauf fortschreiten wird. Zuerst wird es nun angemessen sein, zwei Fälle zu bemerken, in welchen die Kugel die ihr beigebrachte Bewegung beständig beibehalten würde. Der eine Fall findet nämlich statt, wenn die fortschreitende Bewegung $e=0$ ist und die Kugel sich zugleich um die vertikale Axe BD dreht; so dass in diesem Falle $BE=\mathfrak{f}=0$ ist und, weil keine Reibung

stattfindet, die Kugel beständig an derselben Stelle sich zu drehen fortfahren wird. Der zweite Fall findet statt, wenn die Drehungsaxe horizontal und daher $\mathfrak{h}=90^0$, ausserdem aber $e=\varepsilon f \sin\mathfrak{f}$ ist, in welchem Falle die Reibung gleichfalls aufhört. In allen übrigen Fällen aber wird die Kugel von Anfang an einige Zeit hindurch mit ungleichförmiger Bewegung fortgeführt, während sowohl die fortschreitende, als auch die drehende Bewegung sich beständig verändert und man findet diese in Secunden ausgedrückte Zeit

$$t=\frac{a^2\sqrt{e^2-2\varepsilon ef\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}+\varepsilon^2f^2\sin\mathfrak{f}^2}}{2\delta g(a^2+f^2)}.$$

Hier bezeichnet g die Höhe, aus welcher ein schwerer Körper in Einer Secunde herabsteigt. Die ganze Bewegung der Kugel wird daher von selbst in zwei Theile unterschieden, in deren ersten die Bewegung ungleichförmig, in deren zweiten sie gleichförmig ist.

III. Bestimmung des ersten Theiles. Es sei jetzt seit dem Anfange eine beliebige unbestimmte und in Secunden ausgedrückte Zeit $=t$ verflossen, die aber kleiner als die eben angegebene Grenze sein muss, und es berühre um diese Zeit die Kugel die horizontale Ebene im Punkte T. Aus diesem ziehe man normal auf die feste gerade Linie DO die Linie TX, setze zur Bestimmung der Curve DT, durch welche der Berührungspunkt bis hier fortgeschritten ist, die Coordinaten $DX=X$ und $XT=Y$, so dass man annehmen muss, es habe der Schwerpunkt der Kugel einen ähnlichen Weg beschrieben. Nun setze man aber den Winkel, unter welchem das Element Tt gegen die Richtung DO geneigt ist, $=\varphi$, so dass

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dY}{dX}$$

ist, die Geschwindigkeit aber, mit welcher die Kugel längs Tt fortgeht, setze man $=v$; alsdann wird

$$\frac{dX}{dt}=v\cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{dY}{dt}=v\sin\varphi.$$

Diese Werthe müssen erst aus der drehenden Bewegung, welche jetzt der Kugel zukommt, bestimmt werden und wir werden sie bald darstellen, nachdem wir nämlich die drehende Bewegung betrachtet haben werden. (Fig. 163.) Zu diesem Ende schneide man wieder die Kugel, welche jetzt in T auf der Ebene steht, durch die vertikale Ebene $MZNT$, welche der im Anfange betrachteten parallel ist, so dass der Kreis $MZNT$ wie-

der die uns zugewandte Halbkugel darstellt, auf welcher O der Pol ist, um den sich jetzt die Kugel im Sinne *MZNT* und mit der Winkelgeschwindigkeit Ω drehet. Unter diesen Voraussetzungen wird man diese Bestimmung der Bewegung folgendermaassen kurz darstellen können.

Aus den dem Anfangszustande angehörenden Elementen bestimme man den Winkel ζ, so dass

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h}}$$

sei, alsdann erhalten wir für die fortschreitende Bewegung sogleich (Figur 162.)

$$DX = X = et + \delta g t^2 \cos\zeta \text{ und } TX = Y = \delta g t^2 \sin\zeta$$

und hieraus die Geschwindigkeit

längs DX: $\qquad = \frac{dX}{dt} = e + 2\delta g t \cos\zeta$

und längs XT: $\qquad = \frac{dY}{dt} = 2\delta g t \sin\zeta.$

Hiernach wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta g t \sin\zeta}{e + 2\delta g t \cos\zeta}$$

und die fortschreitende Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{e^2 + 4\delta e g t \cos\zeta + 4\delta^2 g^2 t^2}.$$

Zur Bestimmung der drehenden Bewegung um den Pol O suche man den Winkel η der Gleichung

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f^2 g t}{e a^2 \sin\zeta}$$

entsprechend und hieraus die Grösse

$$q = \frac{e \sin\zeta}{f \cos\eta};$$

alsdann wird für den Abstand dieses Poles O vom höchsten Punkte Z der Kugel $\qquad \operatorname{tg} ZO = \frac{q}{\varepsilon \cos \mathfrak{f}},$

die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \sqrt{q^2 + \varepsilon^2 \cos \mathfrak{f}^2}$$

und endlich der Winkel

$$MZO = \zeta - \eta.$$

Auf diese Weise haben wir alles bestimmt, was für die Bewegung erforderlich ist.

IV. Bestimmung des zweiten Theiles. Wir haben schon bemerkt, dass die gleichförmige Bewegung nach Verlauf der Zeit

$$t = \frac{a^2\sqrt{e^2 - 2e\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin \mathfrak{f}^2}}{2\delta g(a^2+f^2)}$$

ihren Anfang nimmt. Wenn wir daher diesen Werth statt t substituiren, so werden die Coordinaten X und Y den Punkt auf der Curve angeben, in welchem die gleichförmige Bewegung beginnt; es sei K derselbe. Führt man aber den Winkel ζ ein, so wird

$$t = -\frac{\varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h}}{2\delta g(a^2+f^2)\sin\zeta},$$

wobei man zu bemerken hat, dass $\sin\zeta$ negativ ist. Ist daher der Körper bis zum Punkte K gelangt, so wird seine fortschreitende Geschwindigkeit in der Richtung DT

$$= e - \frac{a^2\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h} \cos\zeta}{(a^2+f^2)\sin\zeta} = \frac{ef^2 - a^2\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h}}{a^2+f^2}$$

und die Geschwindigkeit in der Richtung LK

$$= -\frac{a^2\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - ef^2 \cos \mathfrak{h}}{a^2+f^2}.$$

Für die hierauf folgende drehende Bewegung haben wir aber

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h}) - \frac{f^3\varepsilon \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h}}{e(a^2+f^2)\sin\zeta^2}$$

$$= -\frac{e(a^2+f^2) - a^2 k}{e(a^2+f^2)\operatorname{tg}\zeta},$$

woraus man für eben diese Zeit den Winkel $MZO = \zeta - \eta$ erkennt. Ferner wird ebenfalls für dieselbe Zeit, wo die Berührung im Punkte K stattfindet, die Geschwindigkeit des Mittelpunktes

$$v = \sqrt{e^2 + \frac{2a^2 ek\cos\zeta}{a^2+f^2} + \frac{a^4k^2}{(a^2+f^2)^2}},$$

die Neigung der Richtung der Bewegung in K gegen die feste gerade Linie DO, welche wir allgemein durch φ bezeichnet haben, wird nun durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2k\sin\zeta}{e(a^2+f^2) + a^2k\cos\zeta}$$

bestimmt; hiernach kennt man die fortschreitende Bewegung, mit welcher nach dieser Zeit die Kugel gleichförmig weiter geht. Zur Bestimmung des Drehungspoles O ist aber, wie wir gesehen haben, $MZO = \zeta - \eta$, ausserdem haben wir

$$\operatorname{tg} ZO = \frac{v}{\varepsilon f \cos \mathfrak{f}}$$

und die drehende Geschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\sqrt{e^2f^2 + 2e\varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + \varepsilon^2 (a^2+f^2)^2 \cos \mathfrak{f}^2}}{a^2+f^2}$$

gefunden, und es wird demnach die Kugel diese drehende Bewegung beständig beibehalten. Ist aber die Kugel zu dieser gleichförmigen Bewegung gelangt, so wird ihre lebendige Kraft

$$= \frac{M[e^2f^2 + 2\varepsilon ea^2 f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 a^2 (a^2+f^2) \cos \mathfrak{f}^2]}{a^2+f^2},$$

welche von der anfänglichen abweicht um

$$\frac{Ma^2[e^2 - 2\varepsilon ef \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin \mathfrak{f}^2]}{a^2+f^2} = \frac{Ma^2k^2}{a^2+f^2}.$$

Es wird aber in Betreff dieser gleichförmigen Bewegung angenehm sein zu bemerken, dass $MZO = \zeta - \eta = 90^0 + \varphi$ und hierauf

$$v = f\Omega \sin s$$

ist, welche Formeln demnach die Bedingung der gleichförmigen Bewegung enthalten.

Zugabe.

Ausserdem scheint vorzüglich der Fall bemerkenswerth zu sein, in welchem der Kugel anfangs durchaus keine fortschreitende Bewegung beigebracht worden, also $e = 0$ ist. Alsdann wird nämlich

$$\operatorname{tg} \zeta = -\operatorname{cotg} \mathfrak{h}, \text{ also } \zeta = 90^0 + \mathfrak{h} \text{ und } k = \varepsilon f \sin \mathfrak{f},$$

so wie zur Bestimmung des zurückgelegten Weges

$$X = \delta g t^2 \cos \zeta \text{ und } Y = \delta g t^2 \sin \zeta.$$

Hieraus ersieht man, dass dieser Weg eine, unter dem Winkel ζ gegen die Axe DO geneigte gerade Linie ist. Ausserdem wird aber

$$v \cos \varphi = 2\delta g t \cos \zeta \text{ und } v \sin \varphi = 2\delta g t \sin \zeta,$$

mithin

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \zeta \text{ und } \varphi = \zeta = 90^0 + \mathfrak{h},$$

so wie die Geschwindigkeit

$$v = 2\delta g t.$$

Ferner erhalten wir zur Bestimmung der drehenden Bewegung

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f^2 g t}{ea^2 \sin \zeta},$$

und weil $\zeta - \mathfrak{h} = 90^0$ ist, $\operatorname{tg} \eta = \infty$ und $\eta = 90^0$, $MZO = \zeta - \eta = \mathfrak{h}$; es wird also der Drehungspol O immer auf demselben Vertikalkreise bleiben. Da nun

$$\Omega \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f} \text{ und } \Omega \sin s = \frac{2\delta g t}{f},$$

so wird

$$\operatorname{tg} s = \frac{2\delta g t}{\varepsilon f \cos \mathfrak{f}} \text{ und } \Omega = \sqrt{\varepsilon^2 \cos \mathfrak{f}^2 + \frac{4\delta^2 g^2 t^2}{f^2}}.$$

Hiernach wird die ungleichförmige Bewegung während des Zeitraumes

$$t = \frac{\varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f}}{2\delta g(a^2 + f^2)}$$

dauern und nach Verlauf desselben

$$v = \frac{\varepsilon a^2 f \sin \mathfrak{f}}{a^2 + f^2}$$

sein, wobei $\varphi = \zeta = 90^\circ + \mathfrak{h}$ bleibt. Ferner wird auch jetzt

$$MZO = \mathfrak{h},\ \operatorname{tg} s = \frac{a^2 \operatorname{tg} \mathfrak{f}}{a^2 + f^2}$$

und

$$\Omega = \frac{\varepsilon \sqrt{a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + (a^2 + f^2)^2 \cos \mathfrak{f}^2}}{a^2 + f^2}.$$

Kapitel VI.

Von der Bewegung einer ungleichartigen Kugel über einer horizontalen Ebene und den nothwendigen Erläuterungen zur schwankenden Bewegung.

---

§. 1208. Ich habe mir hier die Aufgabe gestellt, die Bewegungen einer ungleichartigen Kugel, deren Schwerpunkt ausserhalb des Mittelpunktes ihrer Figur liegt, zu untersuchen; und da diess wegen der grössten Schwierigkeiten der Rechnung nicht ganz allgemein ausgeführt werden kann, werde ich die Bewegung solcher Kugeln auf die über einer horizontalen Ebene beschränken. Ausserdem werde ich aber auch nur die geradlinige Bewegung betrachten, wesshalb alle drehenden Bewegungen hier ausgeschlossen werden, diejenigen ausgenommen, welche um eine horizontale und auf die Richtung der fortschreitenden Bewegung normale Axe vor sich gehen. Die Analysis ist nämlich noch nicht so weit fortgeschritten, dass man auch andere Bewegungen um schiefe Axen entwickeln könnte.

§. 1209. (Figur 164.) Es sei demnach in der horizontalen Ebene IO die gerade Linie, längs welcher die Kugel fortschreitet und welche die letztere anfangs im Punkte I berührt hat; nach Verlauf der Zeit t berühre sie aber die Linie im Punkte S, und man setze den durchlaufenen Weg $IS = s$. Ferner befinde sich der Mittelpunkt der Kugel in C, es sei ihr Radius $CA = CS = a$, der Kreis SAB stelle einen auf die Richtung der Bewegung IO vertikalen Schnitt der Kugel vor, der Schwerpunkt der letztern befinde sich in G, vom Mittelpunkte um $CG = c$ entfernt. Hätte daher die Kugel eine drehende Bewegung,

so würde diese immer um eine horizontale, durch den Schwerpunkt G gehende und auf den Schnitt SAB normale Axe erfolgen. In Bezug auf diese Axe setze man das Moment der Trägheit der Kugel $=Pk^2$, wo P das Gewicht oder die Masse der letztern bezeichnet. Fällt man nun auch aus G auf die gerade Linie IO das Perpendikel GP, so setze man die zur Bestimmung des gegenwärtigen Ortes des Schwerpunktes dienenden Coordinaten $IP=x$ und $PG=y$, so dass $\frac{dx}{dt}$ die horizontale und $\frac{dy}{dt}$ die vertikale Geschwindigkeit, mit welcher dieser sich aufwärts bewegt, bezeichnen. Ausserdem setze man den Winkel $AGP=ACS=\varphi$, wir stellen uns denselben als im Sinne SAB wachsend vor, so dass $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Kugel in demselben Sinne bezeichnet. Hierbei muss ich daran erinnern, dass die Zeit beständig in Secunden, die Geschwindigkeiten aber durch die Wege dargestellt werden, welche in 1 Secunde zurückgelegt werden. Zu diesem Ende führen wir den Buchstaben g, welcher die in 1 Secunde zurückgelegte Fallhöhe bezeichnet, in die Rechnung ein.

§. 1210. Unter diesen Voraussetzungen können die Coordinaten x und y durch die zwei Veränderlichen $IS=s$ und $ACS=\varphi$ ausgedrückt werden; zieht man nämlich die Horizontale GQ, so wird, weil $GQ=c\sin\varphi$ und $CQ=c\cos\varphi$ ist,

$$x=s-c\sin\varphi \quad \text{und} \quad y=a-c\cos\varphi.$$

Hiernach erhalten wir

$$dx=ds-c\cos\varphi d\varphi \quad \text{und} \quad dy=c\sin\varphi d\varphi.$$

ferner $$ddx=dds-c\cos\varphi dd\varphi+c\sin\varphi d\varphi^2$$

und $$ddy=c\sin\varphi dd\varphi+c\cos\varphi d\varphi^2,$$

welcher Formeln man sich bedienen muss, um die Bewegung zu bestimmen. Wollen wir aber bei dieser Arbeit auf die Reibung Rücksicht nehmen, so müssen wir vor allem danach sehen, auf welche Weise der Punkt S der Kugel sich über der geraden Linie IO vorwärts bewegt. Hier ist es nun zuerst einleuchtend, dass, wenn gar keine drehende Bewegung da wäre, die Geschwindigkeit dieses Punktes längs $SO=\frac{ds}{dt}$ sein würde. Wegen der drehenden Bewegung aber, in Folge deren der Winkel $ACS=\varphi$ und sein Differential $d\varphi$ zunimmt, wird derselbe

Punkt S mit der Geschwindigkeit $= \frac{ad\varphi}{dt}$ rückwärts getrieben. Wäre nun

$$ds = ad\varphi,$$

so würde, wie man hieraus ersieht, die Fortwälzung der Kugel eine vollkommene sein; wenn aber

$$ds > ad\varphi$$

ist, so wird die Kugel die horizontale Ebene in der Richtung SO streifen, und in diesem Falle die Reibung ihre Wirkung in der entgegengesetzten Richtung ausüben. Ist dagegen

$$ds < ad\varphi,$$

so geschieht das Streifen längs SI und es wirkt die Kraft der Reibung nach der Richtung SO.

§. 1211. Nun wollen wir die Kräfte betrachten, durch welche diese Kugel angetrieben wird. Erstens stösst uns hier das Gewicht der Kugel auf, woraus eine den Schwerpunkt G abwärts längs GP treibende Kraft $= P$ entspringt; zweitens wird die Kugel, weil sie in S auf der Ebene liegt, hier einen gewissen Druck ausüben und, in Folge der Gegenwirkung, von der Ebene durch eine gleiche Kraft in der Richtung SC zurückgestossen. Diese Kraft, welche uns jetzt noch unbekannt ist, bezeichnen wir mit dem Buchstaben Π. Fügen wir endlich die Reibung hinzu, so ist diese immer eben diesem Drucke Π proportional, und wir bezeichnen sie demnach durch $\lambda\Pi$; sie wird, wie wir schon bemerkt haben, ihre Wirkung nach der Richtung SI oder SO ausüben, je nachdem $ds > ad\varphi$ oder $ds < ad\varphi$ ist. Wir setzen ferner voraus, dass in diesen Fällen, wo wir ein wirkliches Streifen zugeben, $\lambda = \frac{1}{3}$ sei; diesen Werth pflegt man gewöhnlich anzunehmen, und man kann leicht jeden andern Bruch an seine Stelle substituiren. Für den Fall, dass

$$ds = ad\varphi$$

ist und keine Anreibung stattfindet, hat man besonders zu bemerken, dass entweder $\lambda = 0$ sein oder einen gewissen Werth $< \frac{1}{3}$ haben wird, so gross als derselbe nämlich erforderlich ist, um die Anreibung zu verhindern.

§. 1212. Um nun hiernach die Bewegung der Kugel selbst zu bestimmen, muss man sich aus den Principien der Mechanik erinnern, erstens dass die antreibenden Kräfte so auf die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes wirken, als ob die ganze Masse in diesem Punkte vereinigt und zugleich alle Kräfte an demselben angebracht wären; zweitens aber, dass man für die drehende Bewegung den Schwerpunkt G als unbewegt be-

trachten kann. Es müssen desshalb die Momente der antreibenden Kräfte in Bezug auf die durch eben diesen Punkt gehende Drehungsaxe berechnet werden, damit durch sie die Beschleunigung der drehenden Bewegung bestimmt werde.

§. 1213. Denken wir uns daher alle antreibenden Kräfte im Schwerpunkte G angebracht, derselbe wird alsdann die Kraft P in der Richtung GP und die Kraft Π in der entgegengesetzten Richtung auszuhalten haben. Ausserdem wird er nach der horizontalen Richtung durch die Kraft der Reibung $=\lambda\Pi$ angetrieben, entweder längs PI oder längs PO, wie wir vorher erklärt haben. Um hierbei aber jede Zweideutigkeit zu vermeiden, nehmen wir an, dass die Kraft $\lambda\Pi$ ihn rückwärts längs PI antreibe, indem man nämlich für andere Fälle das Zeichen leicht ändert. Zerlegen wir nun die Bewegung des Schwerpunktes nach denselben Richtungen IP und PG, so ergeben die Principien der Mechanik die folgenden Gleichungen:

$$\text{I. } \frac{Pddx}{2gdt^2}=-\lambda\Pi, \quad \text{II. } \frac{Pddy}{2gdt^2}=\Pi-P,$$

in welchen wir das Element der Zeit dt constant genommen haben.

§. 1214. Für die drehende Bewegung ergibt aber die Kraft der Schwere P kein Moment in Bezug auf die Axe G, weil sie durch dieselbe geht. Aus der in der Richtung SC wirkenden Kraft Π entspringt aber in Bezug auf den Punkt G das Moment $=\Pi.GQ=\Pi c\sin\varphi$, wodurch die drehende Bewegung verzögert wird. Drittens wird die nach der Richtung PI wirkende Kraft der Reibung $\lambda\Pi$ das Moment $=\lambda\Pi.PG=\lambda\Pi(a-c\cos\varphi)$ erzeugen, welches die drehende Bewegung beschleunigt. Zur Bestimmung der letztern ergeben die Principien der Bewegung die Gleichung

$$\text{III. } \frac{Pk^2dd\varphi}{2gdt^2}=\lambda\Pi(a-c\cos\varphi)-\Pi c\sin\varphi.$$

Wir haben so drei Gleichungen erlangt, durch welche die ganze Bewegung bestimmt werden muss, so vieler Gleichungen bedarf man aber auch, indem wir zu jeder Zeit drei Unbekannte zu bestimmen haben, nämlich den Abstand s, den Winkel φ und den Druck Π.

§. 1215. Zuerst müssen wir aus unsern Gleichungen den Druck Π eliminiren, und da sich dessen Werth aus der zweiten Gleichung $=P+\frac{Pddy}{2gdt^2}$ ergibt, so substituiren wir denselben in die zwei übrigen Gleichungen und erhalten so:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{2gdt^2} = -\lambda - \frac{\lambda ddy}{2gdt^2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{k^2 dd\varphi}{2gdt^2} = [a\lambda - \lambda c\cos\varphi - c\sin\varphi]\left[1 + \frac{ddy}{2gdt^2}\right].$$

Substituiren wir hierauf in diese die oben gegebenen Werthe von x und y, so werden sie auf die folgenden reducirt:

$$\text{I.}\quad \frac{dds - c\cos\varphi dd\varphi + c\sin\varphi d\varphi^2 + \lambda c\sin\varphi dd\varphi + \lambda c\cos\varphi d\varphi^2}{2gdt^2} = -\lambda$$

$$\text{II.}\quad dd\varphi . \frac{k^2 - \lambda ac\sin\varphi + \lambda c^2 \sin\varphi\cos\varphi + c^2\sin\varphi^2}{2gdt^2}$$

$$+ d\varphi^2 . \frac{\lambda c^2 \cos\varphi^2 + c^2\sin\varphi\cos\varphi - \lambda ac\cos\varphi}{2gdt^2}$$

$$= \lambda a - \lambda c\cos\varphi - c\sin\varphi,$$

in welchen sich ausser der Zeit t nur die zwei Veränderlichen s und φ befinden. Ausserdem kann man aber durchaus nichts hieraus schliessen, wenn nicht aus den Umständen der Bewegung schon vorher bekannt ist, welchen Werth man für den Buchstaben λ anwenden muss.

§. 1216. Wenn man jedoch λ aus diesen zwei Gleichungen eliminirte, so würde sich eine einzige Gleichung ergeben, welche durchaus allen Fällen auf gleiche Weise angepasst wäre; diese Elimination kann man aber weit bequemer auf folgende Weise bei den drei Hauptgleichungen anstellen. Man multiplicire nämlich die erste durch $y = a - c\cos\varphi$, die zweite durch $c\sin\varphi$ und addire beide Produkte zur dritten; alsdann werden beide Grössen λ und Π zugleich aus der Rechnung ausgeschlossen. Wir erhalten auf diese Weise die Gleichung

$$\frac{yddx + c\sin\varphi\, ddy + k^2 dd\varphi}{2gdt^2} = -c\sin\varphi,$$

und wenn wir statt x und y die oben gegebenen Werthe schreiben,

$$(a - c\cos\varphi)\, dds + (c^2 - ac\cos\varphi + k^2)\, dd\varphi + ac\sin\varphi d\varphi^2$$
$$= -2gc\sin\varphi dt^2.$$

Weil sich aber hierin drei Veränderliche befinden, können wir daraus auf durchaus nichts für unsern Zweck schliessen; wir wollen desshalb eine vollständigere Auflösung für besondere Fälle versuchen.

I. Von der Bewegung unserer Kugel, unter Beseitigung aller Reibung.

§. 1217. Da hier überall $\lambda = 0$ ist, so ergibt die erste im Anfang gefundene Gleichung sogleich

$$\frac{ddx}{2gdt^2}=0,$$

woraus durch Integration $\frac{dx}{dt}=C$ folgt; diese Gleichung gibt an, dass der Schwerpunkt der Kugel G gleichförmig längs einer horizontalen Linie fortschreitet. Ist seine Geschwindigkeit im Anfange $=f$ gewesen, so wird

$$\frac{dx}{dt}=f \text{ und } x=ft,$$

wenn wir nämlich annehmen, dass im Anfange $x=0$ gewesen ist, was geschieht, wenn auch der Winkel φ im Anfange $=0$, also die gerade Linie CGA vertikal war. Hiernach erhalten wir

$$s=ft+c\sin\varphi.$$

Aus der zweiten Gleichung haben wir ferner

$$\Pi=P+\frac{Pddy}{2gdt^2}$$

und aus der dritten

$$\frac{Pk^2dd\varphi}{2gdt^2}=-\Pi c\sin\varphi;$$

es ergibt sich daher hieraus

$$\frac{k^2dd\varphi}{2gdt^2}=-c\sin\varphi\left(1+\frac{ddy}{2gdt^2}\right)$$

oder $$k^2dd\varphi+c\sin\varphi ddy=-2gc\sin\varphi dt^2,$$

und es geht die letztere, wenn man statt ddy wieder seinen Werth setzt, über in die folgende

$$k^2dd\varphi+c^2\sin\varphi^2dd\varphi+c^2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi^2=-2gc\sin\varphi dt^2.$$

Diese enthält nur zwei veränderliche Grössen, nämlich φ und t.

§. 1218. Die letzte Gleichung hat den Vortheil, dass sie, wenn man sie mit $2d\varphi$ multiplicirt, integrabel wird. Man findet aber ihr Integral:

$$k^2d\varphi^2+c^2\sin\varphi^2d\varphi^2=4gdt^2(c\cos\varphi+\Gamma)$$

und hieraus $$\frac{d\varphi^2}{dt^2}=\frac{4g(c\cos\varphi+\Gamma)}{k^2+c^2\sin\varphi^2},$$

welche Formel demnach das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ausdrückt. Setzt man nun die der Kugel anfangs im Sinne SAB beigebrachte Winkelgeschwindigkeit $=\zeta$, so erhalten wir, weil wir für den Anfang $\varphi=0$ angenommen haben, zur Bestimmung der Constanten Γ die Gleichung

$$\zeta^2=\frac{4g(c+\Gamma)}{k^2}, \text{ also } 4g\Gamma=\zeta^2k^2-4gc.$$

Substituiren wir diesen Werth, so wird unsere Gleichung

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{4gc\cos\varphi + \zeta^2k^2 - 4gc}{k^2 + c^2\sin\varphi^2}.$$

§. 1219. Nun wollen wir die lebendige Kraft betrachten, welche unsere Kugel in S haben wird. Der Theil derselben, welcher aus der drehenden Bewegung entspringt, ist

$$\frac{Pk^2d\varphi^2}{dt^2} = \frac{Pk^2[4gc\cos\varphi + \zeta^2k^2 - 4gc]}{k^2 + c^2\sin\varphi^2},$$

der Theil aber, welcher aus der fortschreitenden Bewegung hervorgeht,

$$= P\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right].$$

Wir haben nun gesehen, dass $\frac{dx}{dt} = f$, $dy = c\sin\varphi d\varphi$ oder

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{c^2\sin\varphi^2\,d\varphi^2}{dt^2} = \frac{[4gc\cos\varphi + \zeta^2k^2 - 4gc]\,c^2\sin\varphi^2}{k^2 + c^2\sin\varphi^2}$$

war; mithin wird die ganze lebendige Kraft

$$P\left[f^2 + (k^2 + c^2\sin\varphi^2)\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right] = P[f^2 + 4gc\cos\varphi + \zeta^2k^2 - 4gc].$$

Den letzten Ausdruck können wir auch setzen $= P[f^2 + \zeta^2k^2 - 4gc(1 - \cos\varphi)]$, wo $P[f^2 + \zeta^2k^2]$ die der Kugel im Anfange beigebrachte lebendige Kraft bezeichnet, die demnach kleiner wird, so wie der Schwerpunkt P aufsteigt. Es ist nämlich $c(1 - \cos\varphi)$ der Weg, welchen der Schwerpunkt bis jetzt aufwärts zurückgelegt hat, in so fern wir annehmen, dass er sich im Anfange in der tiefsten Stelle befunden habe.

§. 1220. Um aber die ganze Bewegung der Kugel kennen zu lernen, muss man die entwickelte Differentialgleichung aufs Neue integriren. Da nun

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2}(k^2 + c^2\sin\varphi^2) = \zeta^2k^2 - 4gc(1 - \cos\varphi)$$

ist, so erhalten wir aus derselben

$$dt = \frac{d\varphi\sqrt{k^2 + c^2\sin\varphi^2}}{\sqrt{\zeta^2k^2 - 4gc(1 - \cos\varphi)}},$$

welche Formel aber so beschaffen ist, dass sie im allgemeinen durchaus keine Integration zulässt und nur durch Näherungen bestimmt werden kann. Ihre Auflösung würde aber sehr leicht sein, wenn $c = 0$ wäre, indem alsdann der Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Kugel fallen würde. Alsdann hätten wir nämlich

$$dt = \frac{d\varphi}{\zeta} \text{ oder } d\varphi = \zeta dt \text{ und } \varphi = \zeta t;$$

die Bewegung der Kugel würde alsdann gleichförmig sein, sowohl in Bezug auf Fortschreiten als Drehung.

Fall I.

§. 1221. Für unsern Fall gibt es aber eine einzige Bedingung, unter welcher man die letzte Formel nach gewöhnlicher Weise behandeln kann, nämlich wenn die beigebrachte Bewegung so beschaffen ist, dass der Winkel φ beständig so klein als möglich bleibt, zu welchem Ende nothwendig auch die anfängliche Winkelgeschwindigkeit gleichsam unendlich klein sein muss. Weil alsdann $\sin\varphi = \varphi$ und $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ sein wird, so nimmt unsere letzte Gleichung die Form an:

$$dt = \frac{d\varphi\sqrt{k^2 + c^2\varphi^2}}{\sqrt{\zeta^2 k^2 - 2gc\varphi^2}},$$

in deren Zähler man das Theilchen $c^2\varphi^2$ gegen k^2 sicher vernachlässigen kann. Wir haben daher

$$dt = \frac{k d\varphi}{\sqrt{\zeta^2 k^2 - 2gc\varphi^2}},$$

oder wenn man $2gc = n^2 k^2$ setzt,

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\zeta^2 - n^2\varphi^2}}.$$

Das Integral der letzten Gleichung ist

$$t = \frac{1}{n}\,\text{arc. sin}\,\frac{n\varphi}{\zeta} \quad \text{oder} \quad \frac{n\varphi}{\zeta} = \sin nt,$$

d. h. $$\frac{\varphi\sqrt{2gc}}{\zeta k} = \sin\frac{t\sqrt{2gc}}{k} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}\sin\frac{t\sqrt{2gc}}{k}.$$

§. 1222. Dieses Integral ist nämlich so genommen, dass im Anfange, wo $t = 0$ war, auch der Winkel φ verschwand; in diesem Falle kann also, weil die Sinusse der Winkel nicht über ± 1 wachsen können, der Winkel φ höchstens $= \pm\frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}$ werden. Da nun nach der Voraussetzung ζ gleichsam unendlich klein ist, so wird die Kugel diess- und jenseits der anfänglichen Lage sehr kleine Ausweichungen ausführen, welche Bewegung ich früher eine schwankende genannt und bestimmt habe. Da nun im Anfange $\varphi = 0$ war, so ergibt sich aus unserer Formel, dass φ so oft zu demselben Werthe zurückkehren wird, als

$$\sin\frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 0$$

wird. Setzen wir daher $\frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 180^0 = \pi$, so erhalten wir

$$t = \frac{k\pi}{\sqrt{2gc}},$$

und es werden in dieser Zeit die einzelnen Schwingungen oder Schwankungen ausgeführt. Die fortschreitende Bewegung, mit welcher nach unserer Annahme der Schwerpunkt G fortgeht, stört aber durchaus nicht diese schwankende Bewegung.

Fall II.

§. 1223. Es gibt ausserdem noch einen andern Fall, in welchem man die Rechnung entwickeln kann und es findet dieser statt, wenn der Zwischenraum c so klein als möglich oder der Schwerpunkt G sehr wenig vom Mittelpunkte der Kugel C entfernt ist. Alsdann darf man nämlich

$$\sqrt{k^2 + c^2 \sin\varphi^2} = k + \frac{c^2}{2k}\sin\varphi^2$$

setzen, so dass wir

$$dt = \frac{\left[k + \frac{c^2}{2k}\sin\varphi^2\right] d\varphi}{\sqrt{\zeta^2 k^2 - 4gc[1 - \cos\varphi]}}$$

erhalten. Damit nun auch der Nenner behandelt werden könne, nehme man ζ so an, dass $\zeta^2 k^2 = 8gc$ oder die der Kugel im Anfange beigebrachte Geschwindigkeit $\zeta = \frac{\sqrt{8gc}}{k}$ werde; alsdann wird

$$\sqrt{\zeta^2 k^2 - 4gc(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{4gc(1 + \cos\varphi)} = \cos{}^1\!/_2\varphi \sqrt{8gc}$$

und unsere Gleichung

$$dt\sqrt{8gc} = \frac{d\varphi}{\cos{}^1\!/_2\varphi}\left[k + \frac{c^2}{2k}\sin\varphi^2\right]$$

frei von jeder Irrationalität.

§. 1224. Um diese Gleichung bequemer zu behandeln, setze man $^1\!/_2\varphi = 90^0 - \omega$, so dass $\varphi = 180^0 - 2\omega$ und $\sin\varphi = \sin 2\omega = 2\sin\omega\cos\omega$ wird; alsdann nimmt unsere zu integrirende Formel folgende Gestalt an

$$dt.\sqrt{8gc} = -\frac{2d\omega}{\sin\omega}\left[k + \frac{2c^2}{k}\sin\omega^2\cos\omega^2\right]$$

oder

$$dt\sqrt{2gc} = -\frac{kd\omega}{\sin\omega} - \frac{2c^2}{k}\sin\omega\cos\omega^2 d\omega\,.$$

Das Integral der letztern ist

$$t\sqrt{2gc} = C - k \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega + \frac{2c^2}{3k} \cos \omega^3,$$

wobei man sich, um die Constante C zu bestimmen, erinnern muss, dass im Anfange für $t = 0$, $\varphi = 0$ und daher $\omega = 90^0$ gewesen ist, woraus $C = 0$ folgt. Unsere Endgleichung ist demnach

$$t\sqrt{2gc} = \frac{2c^2}{3k} \cos \omega^3 - k \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega,$$

mittelst welcher wir für jeden Winkel $\omega = 90^0 - \tfrac{1}{2}\varphi$ leicht die Zeit t angeben können, während deren Verlauf die Kugel sich durch diesen Winkel φ dreht.

§. 1225. Hiernach kann der Winkel ω nie so gross werden, dass $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega$ negativ ausfalle, weil sonst der ganze Ausdruck imaginär werden würde. Da nun im Anfange $\varphi = 0$ und $\omega = 90^0$ war, hierauf aber φ nach der Voraussetzung wächst, so wird der Winkel ω beständig kleiner werden. Setzen wir daher, dass $\omega = 0$ oder $\varphi = 180^0$ sei, so wird die hierzu erforderliche Zeit $= \infty$ werden; hieraus lernen wir, dass der Winkel φ niemals bis 180^0 zunehmen oder die Kugel sich niemals so weit herumdrehen kann, dass der Schwerpunkt G vertikal über dem Mittelpunkte der Kugel zu stehen komme; er wird aber beständig mehr gegen diesen Endpunkt hin steigen. Wir wollen z. B. die Zeit suchen, in welcher der Schwerpunkt G durch einen rechten Winkel aufsteigt, es sei also $\varphi = 90^0$, $\omega = 45^0$, $\tfrac{1}{2}\omega = 22^0 30'$ und $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2} - 1$. Hiernach wird

$$t\sqrt{2gc} = \frac{c^2}{3k\sqrt{2}} - k \log (1 + \sqrt{2}),$$

mittelst welcher Formel die Zeit t, in Secunden ausgedrückt, bekannt wird.

§. 1226. Dieser durchaus besondere Fall kann daher unter folgenden Bedingungen stattfinden:

1) wenn der Zwischenraum $CG = c$ so klein ist, dass c^2 gegen k^2 verschwindet;
2) wenn die der Kugel im Anfange, wo die gerade Linie CGA vertikal war, beigebrachte Geschwindigkeit $= \frac{\sqrt{8gc}}{k} = \frac{2\sqrt{2gc}}{k}$ gewesen ist.

Alsdann werden wir nämlich, wenn der in der Zeit t ver-

möge der drehenden Bewegung beschriebene Winkel $ACS = \varphi$ ist, weil $\omega = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$, die Gleichung

$$t\sqrt{2gc} = \frac{2c^2}{3k}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3 - k\log\operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

oder

$$t\sqrt{2gc} = k\log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) + \frac{2c^2}{3k}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3$$

haben. In Folge dieser Bewegung wird zwar der Winkel φ beständig grösser werden, aber erst nach einer unendlich grossen Zeit bis 180^0 anwachsen können. Während indessen die Kugel durch diese drehende Bewegung angetrieben wird, kann sie zugleich durch eine beliebige fortschreitende Bewegung weiter geführt werden, wobei nämlich der Mittelpunkt C gleichförmig in horizontaler Richtung fortschreitet, indem wir

$$\frac{dx}{dt} = f$$

gefunden haben. Es wird aber desshalb der Schwerpunkt G nicht auf einer geraden Linie fortgehen, sondern in Folge der drehenden Bewegung beständig aufsteigen, aber niemals zur Höhe $a + c$ gelangen.

§. 1227. In diesem Falle haben wir angenommen, dass im Anfange die Winkelgeschwindigkeit

$$\zeta = \frac{2\sqrt{2gc}}{k}$$

gewesen sei, als hinreichend klein, weil c im Vergleich mit k sehr klein ist. Nimmt man aber diese Geschwindigkeit weit grösser an, so dass die Grösse $4gc$ gleichsam gegen $\zeta^2 k^2$ verschwindet; so wird sich auch alsdann eine analytische Auflösung ergeben.

Fall III.

§. 1228. Es sei demnach $\zeta^2 k^2 = n^2 . 4gc$, wo n eine sehr grosse Zahl bezeichnet; alsdann wird der Nenner unserer Hauptformel

$$\sqrt{\zeta^2 k^2 - 4gc(1-\cos\varphi)} = 2\sqrt{gc[n^2 - (1-\cos\varphi)]}$$
$$= 2\sqrt{gc(n^2 - 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)},$$

wobei man bemerke, dass $\zeta = \frac{2n}{k}\sqrt{gc}$ ist. Hiernach wird also unsere Gleichung

$$2dt\sqrt{gc} = \frac{d\varphi}{\sqrt{n^2 - 2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}}\left(k + \frac{c^2}{2k}\sin\varphi^2\right),$$

indem wir nämlich noch voraussetzen, dass c^2 im Vergleich mit

k unendlich klein sei. Weil nun n eine übergrosse Zahl ist, so erhalten wir mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 2\sin \frac{1}{2}\varphi^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi^2}{n^3},$$

und wenn wir diesen Werth anwenden,

$$2ndt\sqrt{gc} = d\varphi\left(k + \frac{c^2}{2k}\sin\varphi^2\right)\left(1 + \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi^2}{n^2}\right)$$
$$= d\varphi\left(k + \frac{c^2}{2k}\sin\varphi^2 + \frac{k}{n^2}\sin \frac{1}{2}\varphi^2\right),$$

indem wir das Glied $\frac{c^2}{2kn^2}\sin \frac{1}{2}\varphi^2 \sin\varphi^2$ wegen seiner zweifachen Kleinheit vernachlässigen.

§. 1229. Nachdem wir daher unsere Formel so entwickelt haben, ist die Integration keiner Schwierigkeit mehr unterworfen. Da wir wissen, dass

$$\int \sin\varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi$$

und ähnlich

$$\int \sin \frac{1}{2}\varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int(1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi$$

ist, so erhalten wir durch Integration

$$2nt\sqrt{gc} = k\varphi + \frac{c^2}{2k}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right) + \frac{k}{n^2}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$$
$$= \varphi\left[k + \frac{c^2}{4k} + \frac{k}{2n^2}\right] - \frac{c^2}{8k}\sin 2\varphi - \frac{k}{2n^2}\sin\varphi.$$

Mittelst dieser Gleichung bestimmt man leicht die einem jeden Winkel φ entsprechende Zeit; will man aber für jede Zeit t den Winkel φ kennen lernen, so muss man sich der Reduction bedienen, durch welche man in der Theorie der Planeten die wahre Anomalie aus der mittlern herzuleiten pflegt.

Hieraus folgt demnach, dass die Kugel beliebig viele ganze Umdrehungen ausführen kann, weil nichts den Winkel φ verhindert ins Unendliche zu wachsen, zugleich aber kann mit dieser Bewegung eine beliebige horizontale und gleichförmige verbunden sein. Verlangt man etwa die Zeit zu wissen, in welcher eine ganze Umdrehung ausgeführt wird, so setze man $\varphi = 360^0 = 2\pi$ und findet alsdann

$$t = \frac{\pi}{n\sqrt{gc}}\left[k + \frac{c^2}{4k} + \frac{k}{2n^2}\right];$$

die Kugel wird daher in der Hälfte dieser Zeit eine halbe Umdrehung ausführen, weil auch für $\varphi = \pi$ die beiden letzten Glieder verschwinden.

§. 1230. Obgleich der Mittelpunkt der Kugel C immer denselben Abstand von der horizontalen Ebene behält und auf einer geraden Linie fortschreitet, wird doch seine Bewegung keine gleichförmige sein, weil die horizontale Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit immer dieselbe bleibt. Indessen wird aber der Schwerpunkt G um C auf ähnliche Weise herumlaufen, wie die Planeten in ihren Bahnen um die Sonne herumgeführt werden, wobei die tiefste Lage des Punktes G dem Perihel, die höchste aber dem Aphel entspricht. Das erste Glied unserer für die Zeit t gefundenen Formel, dasjenige nämlich, welches den Winkel φ enthält, wird die mittlere Bewegung, die beiden folgenden Glieder aber die Ungleichheiten und gleichsam die Excentricität in sich begreifen. Hiernach wird man auch den vorhergehenden Fall, in welchem die Zeit Eines Umlaufes unendlich gross war, als der Bewegung eines Kometen in einer Parabel ähnlich anzusehen haben.

II. Von der vollkommenen Fortwälzung unserer Kugel, unter dem Hinzutritt der Reibung.

§. 1231. Oben (§. 1210.) haben wir schon gesehen, dass zur vollkommenen Fortwälzung die Bedingung, dass

$$ds = ad\varphi$$

sei, erfordert wird; desshalb wollen wir in unsere Gleichungen diese Bedingung aufnehmen und man muss alsdann nach der Elimination von Π sehen, einen wie grossen Werth λ annehmen wird. So lange dieser nämlich $\frac{1}{3}$ nicht übertrifft, wird eine vollkommene Fortwälzung stattfinden können. Am bequemsten schliesst man aber auf den Werth von λ, wenn man die dritte Gleichung durch die erste dividirt, worauf man erhält

$$\frac{k^2 dd\varphi}{ddx} = -a + c\cos\varphi + \frac{c}{\lambda}\sin\varphi,$$

und wenn man hier statt ddx seinen oben angegebenen Werth substituirt, weil $dds = add\varphi$ ist,

$$\frac{k^2 dd\varphi}{add\varphi - c\cos\varphi dd\varphi + c\sin\varphi d\varphi^2} = -a + c\cos\varphi + \frac{c}{\lambda}\sin\varphi.$$

Nach dieser Gleichung wird man leicht ein Urtheil über den Werth von λ erlangen können.

§. 1232. Um aber die Bewegung selbst zu bestimmen, benutzen wir diejenige Gleichung, welche wir oben (§. 1216.) erhal-

ten haben, nachdem wir beide Grössen Π und λ zugleich eliminirt hatten. Indem wir $dds = addφ$ setzen, wird dieselbe

$$a(a - c\cos\varphi)\,dd\varphi + (c^2 - ac\cos\varphi + k^2)\,dd\varphi + ac\sin\varphi d\varphi^2 = -2cg\sin\varphi dt^2,$$

oder reducirt

$$(a^2+c^2+k^2)\,dd\varphi - 2ac\cos\varphi dd\varphi + ac\sin\varphi d\varphi^2 = -2cg\sin\varphi dt^2.$$

Multipliciren wir diese durch $2d\varphi$, so wird sie von selbst integrabel und wir erhalten als Integral

$$(a^2+c^2+k^2)\,d\varphi^2 - 2ac\cos\varphi d\varphi^2 = 4g\,(C + c\cos\varphi)\,dt^2,$$

wo wir die Constante den Umständen, welche die Reibung ergeben wird, entsprechend bestimmen.

§. 1233. Wir wollen demnach nun ein Urtheil über die Grösse λ anstellen, und vor allem statt $dd\varphi$ seinen durch Differentiale erster Ordnung ausgedrückten Werth substituiren. Aus der vorhergehenden Gleichung haben wir

$$dd\varphi = -\frac{(2gcdt^2 + acd\varphi^2)\sin\varphi}{a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi},$$

und setzen wir statt $2gdt^2$ seinen aus der letzten Integralgleichung sich ergebenden Werth, so finden wir

$$dd\varphi = -\frac{c\sin\varphi d\varphi^2}{2(C+c\cos\varphi)} - \frac{ac\sin\varphi d\varphi^2}{a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi}.$$

Hieraus folgt

$$add\varphi - c\cos\varphi dd\varphi + c\sin\varphi d\varphi^2 = \frac{c\sin\varphi\,[2C + 3c\cos\varphi - a]\,d\varphi^2}{2C + 2c\cos\varphi} - \frac{ac\,(a - c\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi^2}{a^2 + c^2 + k^2 - 2ac\cos\varphi}$$

und es nimmt für die im §. 1231. aufgeführte Gleichung das Glied auf der linken Seite die Form an:

$$\frac{-\dfrac{ck^2\sin\varphi d\varphi^2}{2(C+c\cos\varphi)} - \dfrac{ack^2\sin\varphi d\varphi^2}{a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi}}{\dfrac{c\sin\varphi\,(2C+3c\cos\varphi-a)\,d\varphi^2}{2(C+c\cos\varphi)} - \dfrac{ac\,(a-c\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi^2}{a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi}}$$

oder

$$\frac{-ck^2\sin\varphi[a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi] - 2[C+c\cos\varphi]\,ack^2\sin\varphi}{\left\{\begin{matrix} c\sin\varphi[2C+3c\cos\varphi-a]\,[a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi] \\ -2ac\,[C+c\cos\varphi]\,[a-c\cos\varphi]\sin\varphi \end{matrix}\right\}}$$

$$= -\frac{k^2[a^2+c^2+k^2+2aC]}{\left\{\begin{matrix} k^2[3c\cos\varphi+2C-a]+2Cc[c-a\cos\varphi]-a^3+3a^2c\cos\varphi \\ -ac^2(1+4\cos\varphi^2)+3c^3\cos\varphi \end{matrix}\right\}},$$

welchem Bruche das Glied auf der rechten Seite

$$-a+c\cos\varphi+\frac{c}{\lambda}\sin\varphi$$

gleich sein soll.

§. 1234. Setzen wir der Kürze wegen jenen Bruch $=S$, so wird die zur Beurtheilung des Werthes von λ dienende Gleichung

$$S+a-c\cos\varphi=\frac{c}{\lambda}\sin\varphi,$$

woraus

$$\lambda=\frac{c\sin\varphi}{S+a-c\cos\varphi}$$

folgt. Hieraus ersieht man, dass für $\varphi=0$ oder $=180^0$, $\lambda=0$ wird und in diesen Fällen hat man daher nicht zu befürchten, dass die Reibung genüge, um die streifende Bewegung zu verhindern. Es ist demnach angemessen, die Fälle zu untersuchen, in welchen $\varphi=90^0$ oder $=270^0$ ist. Es sei daher $\varphi=90^0$, alsdann wird

$$S=-\frac{k^2(a^2+c^2+k^2+2aC)}{k^2(2C-a)+2Cc^2-a^3-ac^2} \text{ und } \lambda=\frac{c}{S+a}.$$

Im zweiten Falle, wo $\varphi=270^0$ ist, wird

$$S=-\frac{k^2(a^2+c^2+k^2+2aC)}{k^2(2C-a)+2Cc^2-a^3-ac^2} \text{ und } \lambda=-\frac{c}{S+a}.$$

Wenn demnach die Constante C nur so beschaffen ist, dass

$$S+a>3c$$

wird, so kann eine vollkommene Fortwälzung stattfinden (§. 1231.). Weil man aber kaum andere Fälle entwickeln kann, als solche, in welchen c möglichst klein im Vergleich mit a und k ist; so werden wir, indem wir die höhern Potenzen von c vernachlässigen, für die letztern Fälle

$$S=-\frac{k^2(a^2+k^2+2aC)}{k^2(2C-a)-a^3}$$

und hieraus

$$S+a=\frac{(a^2+k^2)^2}{a^3-k^2(2C-a)}$$

erhalten. Setzt man diesen Ausdruck $=mc$, wo $m>3$ sein muss, so wird

$$C=\frac{mca^3+mack^2-(a^2+k^2)^2}{2mck^2}.$$

Man kann sich aber auch bequem der Formel

$$\lambda=\frac{c[a^3+ak^2-2Ck^2]}{(a^2+k^2)^2}$$

bedienen, woraus man ersieht, dass dieser Werth nur dann die Grenze $1/3$ überschreiten kann, wenn die Constante C sehr gross ist, weil man nämlich c als möglichst klein voraussetzt.

§. 1235. Ist demnach die Reibung ausreichend, um eine vollkommene Fortwälzung hervorzubringen, so wird die Relation zwischen dem Winkel φ und der Zeit t ausgedrückt durch die Gleichung:

$$(a^2+c^2+k^2)\,d\varphi^2-2ac\cos\varphi d\varphi^2=4g\,(c\cos\varphi+C)\,dt^2,$$

woraus folgt:

$$2dt\sqrt{g}=\frac{d\varphi\sqrt{a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi}}{\sqrt{C+c\cos\varphi}}.$$

Diese Gleichung ist durchaus von derjenigen verschieden, welche wir für den Fall (§. 1220.) gefunden haben, wo keine Reibung da war, und es ergibt sich hieraus, dass die Reibung, wenn sie auch sehr klein ist, die Natur der Bewegung gänzlich verändert. Man kann aber diese Gleichung nur in denjenigen Fällen, welche wir im vorhergehenden Abschnitt behandelt haben, auflösen.

§. 1236. Damit wir nun diese zwei Fälle leichter mit einander vergleichen können, setzen wir wie oben voraus, dass im ersten Anfange der Bewegung, wo $t=0$ war, auch $\varphi=0$ und ferner die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}=\zeta$ gewesen sei. Da nun die vollkommene Fortwälzung erfordert, dass

$$\frac{ds}{dt}=\frac{a d\varphi}{dt}$$

sei, so wird nothwendig $\frac{ds}{dt}=\zeta a$. Um nun hierdurch die Constante C zu bestimmen, setzen wir $\frac{d\varphi}{dt}=\zeta$ und $\varphi=0$, wodurch unsere Gleichung wird

$$\zeta^2(a^2+c^2+k^2-2ac)=\zeta^2[(a-c)^2+k^2]=4g(c+C),$$

mithin $$4gC=\zeta^2[(a-c)^2+k^2]-4gc.$$

Substituiren wir diesen Werth, so wird im allgemeinen

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2}[a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi]=\zeta^2[(a-c)^2+k^2]-4gc\,(1-\cos\varphi)$$

und hieraus

$$dt=\frac{d\varphi\sqrt{a^2+c^2+k^2-2ac\cos\varphi}}{\sqrt{\zeta^2[(a-c)^2+k^2]-4gc\,(1-\cos\varphi)}};$$

hierbei hat man zu bemerken, dass $a-c$ den Abstand des Schwerpunktes von der Oberfläche der Kugel bezeichnet.

Von der schwankenden Bewegung.

§. 1237. Aus dieser Gleichung wollen wir zuerst die wackelnde oder schwankende Bewegung ableiten, mit welcher eine Kugel über einer horizontalen Ebene sich drehen wird, nachdem ihr eine sehr geringe Neigung beigebracht worden ist, so dass im Anfange die Winkelgeschwindigkeit ζ, wie auch der Winkel φ möglichst klein gewesen ist, woraus $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ folgt. Um unsere Formel mehr zusammenzuziehen, setzen wir der Kürze wegen $(a-c)^2 + k^2 = h^2$, wonach $a^2 + c^2 + k^2 = h^2 + 2ac$ wird und unsere Gleichung die Form annimmt:

$$dt = \frac{d\varphi\sqrt{h^2 + ac\varphi^2}}{\sqrt{\zeta^2 h^2 - 2gc\varphi^2}}.$$

Wir verwerfen nun im Zähler das Glied $ac\varphi^2$ und setzen im Nenner $2gc = n^2h^2$, wodurch wir erhalten:

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\zeta^2 - n^2\varphi^2}}.$$

Integriren wir, so wird

$$t = \frac{1}{n}\text{arc.}\sin\frac{n\varphi}{\zeta} = \frac{h}{\sqrt{2gc}}\text{arc.}\sin\frac{\varphi\sqrt{2gc}}{\zeta h},$$

also

$$\varphi = \frac{\zeta h}{\sqrt{2gc}}\sin\frac{t\sqrt{2gc}}{h}.$$

Hieraus ersehen wir, dass eine Kugel auf einer horizontalen Ebene ihre Schwankungen ganz ähnlich ausführt, wie die Pendel zu schwingen pflegen und man findet die Zeit Einer Schwankung, indem man den Winkel $\frac{t\sqrt{2gc}}{h} = \pi$ setzt und wonach

$$t = \frac{\pi h}{\sqrt{2gc}}$$

wird. Da nun die Schwingungszeit eines einfachen Pendels von der Länge l

$$= \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

ist, so wird die Länge eines mit unsern Schwankungen isochronen Pendels oder

$$l = \frac{h^2}{c} = \frac{(a-c)^2 + k^2}{c}.$$

Oben (§. 1222.), wo die Reibunng nicht stattfand, würden wir erhalten haben

$$l = \frac{k^2}{c}.$$

§. 1238. Aus dieser Vergleichung ergibt sich offenbar, dass in Folge der Reibung die schwankende Bewegung nicht wenig vermindert wird, und zwar in dem Verhältniss

$$k : \sqrt{(a-c)^2+k^2}.$$

Wenn daher nicht $a-c=0$ ist, in welchem Falle der Schwerpunkt auf die Oberfläche fallen würde, wird die schwingende Bewegung in Folge der Reibung immer verzögert. Ausserdem werden aber in beiden Fällen die Schwankungen desto langsamer sein, je näher der Schwerpunkt G dem Mittelpunkte der Kugel rückt; wird nämlich der Zwischenraum $CG=c=0$, so ergibt sich in beiden Fällen die Länge des isochronen einfachen Pendels $=\infty$.

§. 1239. Diese Bestimmungen sind aber nicht auf Kugeln allein beschränkt, sondern können auch auf alle Körper, welche über einer horizontalen Ebene eine schwankende Bewegung anzunehmen vermögen, ausgedehnt werden. (Figur 165.) Es sei nämlich PRQ ein beliebiger Körper, welcher über der horizontalen Ebene IO ähnlich wie die Wiegen eine wechselnde Bewegung anzunehmen vermag, indem seine Grundfläche im Berührungspunkte R gekrümmt ist; ferner befinde sich der Mittelpunkt dieser Krümmung in C und man setze die Höhe $CR=a$. Es sei aber G der Schwerpunkt des ganzen Körpers, während dieser sich in Ruhe befindet und man setze den Zwischenraum $GC=c$, so dass $GR=a-c$ wird. Indem wir ausserdem das Gewicht dieses Körpers $=P$ setzen, sei sein Moment der Trägheit in Bezug auf eine durch G gehende Axe $=Pk^2$, um welche Axe man sich nämlich den Körper als während der Schwankung sich drehend zu denken hat. Unter diesen Voraussetzungen würde, wenn gar keine Reibung stattfände, die Zeit einer jeden Schwankung

$$=\frac{\pi k}{\sqrt{2gc}} \text{ Secunden}$$

sein; tritt aber eine wenn auch noch so kleine Reibung hinzu, so wird diese Zeit plötzlich

$$=\frac{\pi\sqrt{(a-c)^2+k^2}}{\sqrt{2gc}}.$$

Hieraus erlangt dasjenige, was ich früher über eine solche Bewegung angeführt habe, die erforderliche Erläuterung. Hierbei hat man vorzüglich zu bemerken, dass die Grösse der

Reibung selbst hier nicht in die Rechnung eintritt und dass sich dieselbe Wirkung ergeben wird, wenn nur die Reibung nicht ganz verschwindet.

§. 1240. In Betreff der zwei Fälle, welche wir oben unter Beiseitesetzung der Reibung entwickelt haben und wobei der Zwischenraum c so klein als möglich angenommen wurde, werden alle Erscheinungen der Bewegung auf ähnliche Weise bestimmt werden, wenn auch die Reibung hinzutritt. Die hierher gehörigen Formeln werden nämlich von den obigen darin hauptsächlich verschieden sein, dass man hier statt der Grösse k setzen muss $h = \sqrt{(a-c)^2+k^2}$, wesshalb auch diese Bewegungen langsamer werden, als in dem oben behandelten Falle. Diess ist fast alles, was man über eine solche Bewegung einer ungleichartigen Kugel durch Rechnung bestimmen kann.

§. 1241. Zum Schluss werde ich einen bemerkenswerthen Lehrsatz in Betreff der dreifachen schwingenden Bewegung, durch welche solche Körper, wie sie im §. 1239. beschrieben sind, angetrieben werden können, anführen.

Lehrsatz.

Hat man einen beliebigen Körper PRQ mit einer in R kreis- oder kugelförmigen Basis, dessen Mittelpunkt in C, Schwerpunkt in G liegt und dessen Masse oder Gewicht $= P$ ist; so kann man in ihm eine dreifache schwingende Bewegung betrachten.

I. Schwingt dieser Körper um eine horizontale durch C gehende Axe, nach Art eines Pendels frei, so wird man ein isochrones einfaches Pendel finden, indem man das Moment der Trägheit dieses Körpers in Bezug auf die Axe C dividirt durch das Produkt $P.CG$.

II. Liegt derselbe Körper auf einer höchst polirten horizontalen Ebene IO in R auf und führt er sehr kleine Schwankungen aus, so dass er durchaus keine Reibung erleidet; so findet man das isochrone einfache Pendel, indem man das Moment der Trägheit in Bezug auf die durch G gehende horizontale Axe dividirt durch dasselbe Produkt $P.CG$.

III. Liegt derselbe Körper auf der beliebig rauhen horizontalen Ebene IO in R auf, und führt er Schwankungen aus; so findet man die Länge des isochronen einfachen Pendels, wenn man das Moment der Trägheit in Bezug auf den Berührungspunkt R durch dasselbe Produkt $P.CG$ dividirt.

Die Wahrheit dieses Lehrsatzes für den ersten Theil ergibt sich aus der Bewegung der Pendel. Setzt man nämlich $CG = c$ und das Moment der Trägheit in Bezug auf den Schwerpunkt $= Pk^2$, ferner den Krümmungshalbmesser $CR = a$; so ist bekanntlich die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$l = \frac{c^2 + k^2}{c}.$$

Für den zweiten Fall ist offenbar nach dem oben Vorgetragenen

$$l = \frac{k^2}{c},$$

und für den dritten Fall

$$l = \frac{(a - c)^2 + k^2}{c}.$$

Kapitel VII.

Von der Bewegung eines Pendels um eine cylindrische Axe, welche auf einer Gabel von gegebener Form liegt, unter Berücksichtigung der Reibung.

---

§. 1242. In der frühern Abhandlung, wo wir die Bewegung eines Pendels um eine, in einer gegebenen Gabel liegende Axe bestimmten, haben wir durchaus von aller Reibung abstrahirt, so dass die Axe über der Gabel ganz frei und ohne irgend ein Hinderniss fortgehen konnte. Da diess nun in der Praxis niemals vorkommen kann, so wollen wir hier untersuchen, was für eine Wirkung bei der Bewegung solcher Pendel aus der Reibung hervorgehen muss; hierbei werden wir unsere Untersuchung nur auf möglichst kleine Schwingungen beschränken.

§. 1243. (Figur 141.) Es sei daher wie früher NAM die Figur der wenigstens in der Nähe des untersten Punktes A kreisförmigen Gabel, der Mittelpunkt dieses Kreises liege in O, und man ziehe von diesem aus die vertikale gerade Linie OAG und setze den Radius $OA = a$. Nach Verlauf der beliebigen Zeit t halte unser Pendel eine solche Lage ein, dass seine cylindrische Axe auf der Gabel im Punkte a liege, man ziehe von hier durch ihren Mittelpunkt c die gerade Linie acO, welche nämlich durch den Punkt O gehen wird und setze den Radius $ac = b$, so dass der Abstand $Oc = a - b = e$ wird. Den Winkel AOa setzen wir ferner $= \theta$, und es wird sich in dieser Stellung des Pendels sein Schwerpunkt in g befinden; von diesem ziehe man durch den Mittelpunkt c der Axe die gerade Linie gch, welche die Vertikale OA im Punkte h schneide. Es bleibe wie früher der Abstand $cg = c$, und es sei der Winkel der Schiefe $Ghg = \varphi$. Be-

zeichnet endlich M die Masse oder das Gewicht des Pendels, so drücke Mk^2 das Moment der Trägheit der ganzen Materie, welche das Pendel bildet, aus und zwar in Bezug auf eine Axe, welche durch den Punkt g der cylindrischen Axe parallel gezogen ist.

§. 1244. Diess vorausgesetzt, fälle man aus dem Punkte g auf die Vertikale OG die Normale gp, und setze die Abstände $Op = x$ und $pg = y$; alsdann werden dieselben durch die zwei Winkel $AOa = \theta$ und $Ahg = \varphi$ so ausgedrückt, dass wir

$$x = e\cos\theta + c\cos\varphi$$

und

$$y = e\sin\theta + c\sin\varphi$$

haben. Sind daher diese Winkel gleichsam unendlich klein, wie diess bei sehr kleinen Schwingungen nothwendig der Fall sein muss, so wird

$$x = e + c \text{ und } y = e\theta + c\varphi.$$

Ferner ist aus dem Vorhergehenden (§. 1050.) hinreichend klar, dass der Druck, welchen die cylindrische Axe im Punkte a gegen die Gabel ausübt, dem Gewichte des ganzen Pendels oder M gleich sein wird. Man hat daher anzunehmen, dass die Gabel in demselben Punkte mit gleicher Kraft nach der Richtung acO entgegenwirke, während man sich das ganze Gewicht des Pendels M im Schwerpunkte g und in vertikaler Richtung angebracht denken muss.

§. 1245. Diess waren die zwei Kräfte, durch welche wir unter Beseitigung der Reibung in der frühern Abhandlung das Pendel als angetrieben betrachtet und aus deren Wirksamkeit wir die ganze Bewegung bestimmt haben. Da nun aber die Reibung hinzutritt, muss man ausserdem eine bestimmte dritte Kraft hinzufügen, welche aus der Reibung entspringt und ihre Wirkung im Berührungspunkte a ausübt, wo nämlich die cylindrische Axe auf der Gabel liegt. Es ist aber bekannt, dass die Grösse der Reibung einem gewissen bestimmten Theile des ganzen Druckes, wie etwa dem dritten gleichgeschätzt werden kann. Da nun der Druck im Punkte $a = M$ ist, so setzen wir die Reibung $= \lambda M$, wo meistentheils $\lambda = 1/3$ ist, vorausgesetzt dass sie ihre ganze Wirkung ausübe, was geschieht, wenn die cylindrische Axe über der Gabel wirklich fortgeht und sie streift. Setzen wir daher voraus, dass das Letztere in der Richtung aN geschieht, so wird die Reibung nach der entgegengesetzten Richtung aA wirken, und wird daher auf die gerade Linie acO normal sein. Diess ist demnach die dritte Kraft, welche ausser

den beiden vorher beschriebenen in die Rechnung eingeführt werden muss.

§. 1246. Weil wir nun bemerkt haben, dass die Reibung erst dann ihre ganze Wirkung ausübt, wenn in Wirklichkeit eine Anreibung stattfindet oder der Punkt A sich über der Gabel fortbewegt; so müssen wir vor allem danach sehen, mit einer wie grossen Geschwindigkeit der Berührungspunkt a über der Gabel fortschreitet. Zuerst ist es klar, dass, wenn keine Winkelbewegung des Pendels existirte, d. h. wenn die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}=0$ wäre, die Bewegung des Punktes a der des Punktes c gleich sein würde und da dieser um O mit der Geschwindigkeit $=\frac{ed\theta}{dt}$ fortgeführt wird, so müsste man den Punkt a als mit derselben Geschwindigkeit gegen N hin fortgehend ansehen. In Folge der Winkelbewegung des Pendels, deren Geschwindigkeit $=\frac{d\varphi}{dt}$ ist, wird ausserdem der Punkt a um c, ebenfalls gegen N hin, mit der Geschwindigkeit $=\frac{bd\varphi}{dt}$ fortgeführt. Hiernach ist die ganze Geschwindigkeit, mit welcher im Punkte a die Anreibung geschieht,

$$=\frac{ed\theta+bd\varphi}{dt},$$

und wenn demnach dieser Ausdruck nicht verschwindet, wird die Reibung ihre ganze Wirkung $=\lambda M$ in der Richtung aA ausüben.

§. 1247. Man ersieht aber leicht, dass dieser Fall mit unserer Voraussetzung, wonach wir die Schwingungen als unendlich klein aufgestellt haben, auf keine Weise zusammen bestehen kann. Weil nämlich alle Bewegungen sehr langsam sind, würde, wenn eine solche ungefähr $\frac{1}{3}M$ grosse Kraft in der Richtung aA existirte, alle Bewegung gleichsam plötzlich aufhören und das ganze Pendel in den Zustand der Ruhe zurückgebracht werden. Damit daher eine schwingende Bewegung statfinden könne, ist es durchaus nöthig dass die Formel $\frac{ed\theta+bd\varphi}{dt}$ immer gleich Null bleibe, was nur geschehen kann, wenn die endliche Formel

$$e\theta+b\varphi=0 \text{ oder } =\text{Constans}$$

ist. Weil sie aber von selbst unendlich klein ist, können wir

$$e\theta = -b\varphi \text{ oder } \theta = -\frac{b\varphi}{e}$$

setzen, so dass der Winkel θ sich nach der entgegengesetzten Seite neigen muss.

§. 1248. (Figur 166.) Lässt man daher die Reibung zu, so kann nur eine schwingende Bewegung stattfinden, wenn die cylindrische Axe sich nach der entgegengesetzten Seite gegen M hin bewegt, während die drehende Bewegung nach der andern Seite N hin erfolgt. In diesem Falle wird nämlich die cylindrische Axe über der Gabel rollend fortgehen, so dass keine Anreibung ausgeübt werden kann. Schneidet demnach die gerade Linie cg den kleinern Kreis in α, mit welchem Punkte das Pendel im Anfange auf dem Punkte A gelegen hat, so muss offenbar der Bogen $Aa = a\alpha$ sein. Da nun diese Bogen gleichsam unendlich klein sind, so wird die gerade Linie cg stets durch den Punkt A gehen, was auch daraus folgt, dass

$$e\theta = -b\varphi$$

ist. Weil nämlich im Dreieck OAc der Winkel $AOc = -\theta$ und $OAc = \varphi$ ist, haben wir wegen der unendlich kleinen Grösse dieser Winkel $-\theta : \varphi = Ac : Oc.$

Es ist aber, weil $A\alpha$ verschwindend klein,

$$Ac = \alpha c \text{ und } Oc = e, \text{ also } -e\theta = b\varphi.$$

§. 1249. Weil daher bei dieser Bewegung alle Reibung aufhört, übt auch die letztere ihre ganze Kraft, welche wir $= \lambda M$ geschätzt haben, keineswegs aus, sondern wirkt nur in jedem Augenblick mit einer so grossen Kraft, als genau zur Verhinderung der Anreibung erforderlich ist. Hiernach wird die Kraft, welche die Reibung wirklich ausübt und die wir $= \lambda M$ gesetzt haben, eine veränderliche und äusserst kleine Grösse und sie muss durch die Bedingung bestimmt werden, dass keine Anreibung entstehe oder beständig

$$e\theta + b\varphi = 0$$

bleibe. Man hat hier nämlich wohl zu bemerken, dass zwar in Wirklichkeit keine Anreibung vorhanden, die Reibung aber nicht jeder Kraft beraubt oder ganz müssig ist, sondern dass ihre Wirkung dazu verwandt wird, damit alle Anreibung verhindert oder die Gleichung $e\theta + b\varphi = 0$ beständig erhalten werde.

§. 1250. Wir nehmen aber die vorhergehende Figur wieder vor, weil wir derselben schon oben die Bestimmung der Bewegung der Pendel angepasst haben, was auch immer geschehen darf, wenn man sich nur merkt, dass beständig

$$e\theta + b\varphi = 0 \text{ oder } \theta = -\frac{b\varphi}{e}$$

sein muss. Nun müssen wir den obigen zwei Kräften, nämlich dem Druck im Berührungspunkte a und dem Gewichte des ganzen Pendels ausserdem die dritte Kraft $= \lambda M$ hinzufügen, welche in der Richtung aA wirkt und welche zerlegt die horizontale Kraft $= \lambda M \cos\theta = \lambda M$

und die vertikale abwärts gerichtete

$$= \lambda M \sin\theta = \lambda M\theta$$

ergibt. Ausserdem ist das Moment dieser Kraft in Bezug auf den Punkt g $= \lambda M(c-b)$,

und es hat dasselbe das Bestreben, die Winkelbewegung zu vermehren. Uebertragen wir daher zuerst alle diese Kräfte nach dem Punkte g, so werden die vertikalen Kräfte sich gegenseitig aufheben müssen, weil

$$Op = x = e + c$$

also constant ist; es folgt diess auch daraus, dass die abwärts gerichtete Schwerkraft $= M$ und der aufwärts treibende Druck auch $= M$ ist. Aus der Reibung entspringt aber die vertikale Kraft $= \lambda M\theta$, welche, weil λ unendlich klein ist, vernachlässigt werden kann. Die horizontalen hieraus entspringenden und der Bewegung entgegengesetzten Kräfte werden aber $= -M\theta - \lambda M$ sein, und wir erhalten so die Gleichung

$$\frac{Mddy}{2gdt^2} = -M\theta - \lambda M \text{ oder } \frac{edd\theta + cdd\varphi}{2gdt^2} = -\theta - \lambda.$$

§. 1251. Für die drehende Bewegung aber hat der Druck in $a = M$ das der Bewegung entgegengesetzte Moment $M(\varphi - \theta)c$ ergeben, die Reibung ergibt jetzt das beschleunigende Moment $= \lambda M(c-b)$ und wir erhalten daher aus den Principien der Bewegung die Gleichung

$$\frac{Mk^2dd\varphi}{2dgt^2} = \lambda(c-b)M - M(\varphi - \theta)c$$

oder

$$\frac{k^2dd\varphi}{2gdt^2} = \lambda(c-b) - c(\varphi - \theta).$$

Dividirt man dieselbe durch $(c-b)$, so erhält man

$$\frac{k^2dd\varphi}{2g(c-b)dt^2} = \lambda - \frac{c(\varphi - \theta)}{c-b},$$

und addirt man diese Gleichung zu der im vorhergehenden §. gefundenen, so tritt die Unbekannte λ ganz aus der Rechnung und es wird die ganze Bewegung durch die einzige Gleichung

$$\frac{edd\theta + cdd\varphi}{2gdt^2} + \frac{k^2 dd\varphi}{2g(c-b)dt^2} = -\theta - \frac{c\varphi + c\theta}{c-b} = \frac{b\theta - c\varphi}{c-b}$$

ausgedrückt werden.

§. 1252. Mit dieser Gleichung muss man die vorher beschriebene Hauptbedingung, dass $\theta = -\frac{b\varphi}{e}$ ist, verbinden, wonach

$$dd\theta = -\frac{bdd\varphi}{e}$$

sein wird. Substituirt man diese Werthe, so geht die vorher gefundene Gleichung über in

$$\frac{(c-b)dd\varphi}{2gdt^2} + \frac{k^2 dd\varphi}{2g(c-b)dt^2} = -\frac{\varphi(b^2 + ce)}{e(c-b)},$$

oder wenn man mit $c-b$ multiplicirt,

$$\frac{[(c-b)^2 + k^2]dd\varphi}{2gdt^2} = -\frac{\varphi(b^2 + ce)}{e},$$

welche ausser der Zeit t die einzige Veränderliche φ enthält und offenbar eine reguläre schwingende Bewegung angibt. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\frac{ek^2 + e(c-b)^2}{b^2 + ce} = h,$$

so ergibt sich die einfache Gleichung

$$\frac{hdd\varphi}{2gdt^2} = -\varphi,$$

deren Integral ist

$$\varphi = \alpha \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right).$$

Hieraus folgt, dass die Bewegung dieses Pendels vollständig mit den Schwingungen eines einfachen Pendels, dessen Länge

$$h = \frac{e[k^2 + (c-b)^2]}{b^2 + ce}$$

ist, übereinstimmen wird, und es werden die einzelnen Schwingungen in der Zeit

$$t = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}} \text{ Secunden}$$

ausgeführt.

§. 1253. Da nun, wenn die Reibung beseitigt ist, solche Pendel auf unendlich viele verschiedene Weisen zu schwingenden Bewegungen, sowohl regelmässigen als unregelmässigen angetrieben werden können; so ist es höchst bemerkenswerth, dass in Folge der Reibung alle diese verschiedenen Arten der Bewegung auf eine einzige, und zwar regelmässige zurückgebracht

werden. Die hieraus entspringenden Schwingungen stimmen nämlich durchaus mit denen eines einfachen Pendels, dessen Länge

$$h = \frac{e[k^2 + (c-b)^2]}{b^2 + ce}$$

ist, überein; es wird nun sehr angenehm sein, genauer zu erwägen, wie diese Grösse aus den Elementen, welche das Pendel bilden, zusammengesetzt ist.

§. 1254. (Figur 167.) Wir betrachten daher unser Pendel im Zustande der Ruhe, weil es nur zu einer einzigen schwingenden Bewegung angetrieben werden kann. Es sei O der Krümmungsmittelpunkt der Gabel MAN und man habe von hier die Vertikale OAG gezogen, ferner haben wir den Krümmungshalbmesser der Gabel $OA = a$ gesetzt. Die cylindrische Axe des Pendels liege auf der Gabel im Punkte A, ihr Radius CA ist $= b$ gesetzt, ferner sei wie oben der Zwischenraum $OC = a - b$ $= e$, der Schwerpunkt des ganzen Pendels befinde sich in G, wobei der Abstand $CG = c$ ist. Setzt man ausserdem das Gewicht des ganzen Pendels $= M$, so haben wir sein Moment der Trägheit in Bezug auf den Punkt $G = Mk^2$ gesetzt. Diess sind die Elemente, welche den Zustand des vorausgesetzten Pendels bilden und aus ihnen wird, wie wir gesehen haben, die Länge des isochronen einfachen Pendels so hergeleitet, dass wir

$$h = \frac{e[k^2 + (c-b)^2]}{b^2 + ce}$$

haben; die Natur dieses Ausdrucks wollen wir näher prüfen.

§. 1255. Da das Moment der Trägheit des ganzen Pendels in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt G gezogene Axe $= Mk^2$ ist, so wird, weil $AG = c - b$ ist, das Moment der Trägheit in Bezug auf eine durch den Punkt A gezogene Axe

$$= Mk^2 + M(c-b)^2 \ (\S.430);$$

das letztere wollen wir der Kürze wegen $= Mf^2$ setzen. Es ist demnach $f^2 = k^2 + (c-b)^2$ und die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$h = \frac{ef^2}{b^2 + ce}.$$

Um diesen Ausdruck weiter zu entwickeln, ziehen wir aus dem Punkte O die Tangente OT an die cylindrische Axe und aus T normal auf die Vertikale die Linie TP. Weil nun das Dreieck OCT bei T rechtwinklig und daher $\sim CTP$ ist, haben wir

$$OC : CT = CT : CP \text{ oder } e : b = b : CP$$

also

$$CP = \frac{b^2}{e}.$$

Da ferner $CG=c$ ist, so wird der Abstand

$$GP=\frac{b^2+ce}{e}$$

und wenn man diesen letztern einführt,

$$h=\frac{f^2}{GP},$$

welcher ziemlich einfache Ausdruck die Länge des isochronen einfachen Pendels darstellt.

§. 1256. (Figur 168.) Wir haben hier angenommen, dass der Krümmungsmittelpunkt O der Gabel oberhalb des Kreises, welcher die Basis der cylindrischen Axe bildet, falle. Es liege jetzt dieser Punkt innerhalb des letztern Kreises, jedoch höher als sein Mittelpunkt C, so dass $CO=e$ ist; alsdann ziehe man aus O die Ordinate OT und aus T die Tangente TP an diesen Kreis, welche die Vertikale in P schneidet. Weil nun auf's neue $OCT \backsim CTP$ ist, haben wir

$$CO:CT=CT:CP, \text{ d. h. } e:b=b:CP$$

und

$$CP=\frac{b^2}{e};$$

es wird daher in diesem Falle die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$h=\frac{f^2}{GP},$$

wie vorhin. Hieraus ersieht man, dass die Punkte O und P unter sich vertauscht werden können und zugleich sieht man ein, dass in diesem Falle, wo GP einen grössern Werth erhält, die Schwingungen schneller als im vorhergehenden Falle sein werden.

§. 1257. Fällt der Punkt O in den Mittelpunkt C, so entfernt sich der Punkt P in's Unendliche und es wird

$$h=0,$$

was sich auch daraus ergibt, dass $e=0$ ist. Offenbar wird in diesem Falle die Höhlung der Gabel genau die cylindrische Axe aufnehmen und diese daher unbewegt festhalten, so dass durchaus keine Schwingungen erfolgen können. Fällt aber O unterhalb des Mittelpunktes C gegen A hin, so dass die Krümmung der Gabel kleiner als die der cylindrischen Axe ist, so wird diese gar nicht auf jener liegen können und daher jede schwingende Bewegung gänzlich aufgehoben werden.

§. 1258. Fällt aber der Punkt O unterhalb A, so wird die Gabel oben convex sein und die Grösse e sich negativ ergeben. Man setze daher in diesem Falle $e=-i$, und es wird alsdann

$$h = -i\frac{k^2+(c-b)^2}{b^2-ci} = i\frac{k^2+(c-b)^2}{ci-b^2}.$$

Dieser Werth wird daher, so oft als

$$b^2 > ci$$

ist, negativ und es wird alsdann gar keine schwingende Bewegung erfolgen können, vielmehr würde die cylindrische Axe über einer solchen Gabel, sobald ihr die kleinste Bewegung ertheilt wäre, herabsinken.

§. 1259. (Figur 169.) Wir wollen daher den Fall betrachten, in welchem die Gabel nach oben zu convex ist; ihr Krümmungsmittelpunkt liege in O, so dass jetzt $CO = i$ und $CG = c$ ist. Aus O ziehe man die Tangente OT an die cylindrische Axe und aus T die horizontale Linie TP; alsdann ist offenbar

$$CP = \frac{b^2}{i} \text{ und } c - \frac{b^2}{i} = GP.$$

Da nun auch jetzt $f^2 = k^2 + (c-b)^2$ ist, so wird die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$h = \frac{f^2}{GP}$$

und es wird dieselbe immer positiv sein, wenn nur der Schwerpunkt G nicht höher als P liegt, was bei der wackelnden oder schwankenden Bewegung geschehen könnte. Da wir hier aber ein Pendel, also den Schwerpunkt als unter der Gabel liegend betrachten, so wird sich eine wirkliche schwingende Bewegung ergeben und eine desto geschwindere, je grösser der Abstand GP wird.

§. 1260. Nachdem wir diess im Allgemeinen bemerkt haben, wird es der Mühe werth sein, den Fall zu betrachten, in welchem die cylindrische Axe jeder Dicke entbehrt, also

$$b = 0$$

ist. Alsdann wird die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$h = \frac{k^2+c^2}{c},$$

wo wegen $CA = 0$, $AG = c$ sein wird. Dieser Fall stimmt offenbar mit der Bewegung eines gewöhnlichen Pendels überein, welches im Punkte A aufgehängt ist. Es ist nämlich das Moment der Trägheit in Bezug auf den Punkt $A = M(k^2+c^2)$, und wenn man dieses durch $M.AG$ dividirt; so ergibt sich nach den Lehren, welche ich über die Bewegung der Pendel vorgetragen habe, immer die Länge des isochronen einfachen Pendels.

§. 1261. Ich halte es nicht für angemessen, hier bei dem

Falle zu verweilen, in welchem der ganze Körper des Pendels und daher auch der Schwerpunkt G sich über einem Aestrich befindet. In Folge der Reibung entsteht nämlich in diesem Falle jene wackelnde Bewegung, welche ich früher ausführlich untersucht habe, deren Schwingungen nämlich durch die Reibung selbst regelmässig werden. Die gegenwärtige Untersuchung erstreckt sich aber viel weiter, da sie sich auch auf concave und convexe Aestriche ausdehnt. Alle Veränderungen, welche hier vorkommen können, werden durch die vorher gegebenen Auseinandersetzungen überflüssig deutlich, wenn nur der Schwerpunkt G über A gelegt wird. Es würde daher überflüssig sein, länger bei diesem Gegenstand zu verweilen, man halte nur die folgende Regel gehörig fest. So lange der Schwerpunkt G des ganzen Pendels unterhalb des oben bestimmten Punktes P liegt, kann immer eine schwingende Bewegung entstehen und es wird die Länge des isochronen einfachen Pendels

$$h = \frac{f^2}{GP}$$

sein. Hier ist Mf^2 das Moment der Trägheit der ganzen Masse des Pendels in Bezug auf eine Axe, welche durch den Berührungspunkt A gezogen ist. Liegt aber der Schwerpunkt G oberhalb des Punktes P, so kann das Pendel gar keine schwingende Bewegung annehmen, sondern wird bei der geringsten Neigung herabstürzen.

Inhalts-Verzeichniss der Kapitel.

Einleitung,

enthaltend nothwendige Erläuterungen und Zugaben
zur Bewegung von Punkten.

Abhandlung

über die Bewegung starrer Körper.

Zugabe.

Ergänzung,

die durch die Reibung gestörte Bewegung betreffend.

Inhalts-Verzeichniss der Kapitel.

Anmerkungen und Erläuterungen

zu

Leonhard Euler's

Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper.

Anmerkungen und Erläuterungen.

Zu §. 59. (Fig. 5.) Um die in diesem §. enthaltene Formel für die Diagonale eines schiefwinkligen Parallelepipedums herzuleiten, setzen wir $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $\angle AOB = \zeta$, $AOC = \eta$ und $BOC = \theta$, ferner $OV = s$ und die Diagonale im Parallelogramm $OARB$, d. h. $OR = w$. Wir haben alsdann

1) $w^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos OAR = x^2 + y^2 + 2xy \cos \zeta$

und wenn wir den Winkel $COR = W$ setzen,

2) $s^2 = z^2 + w^2 - 2zw \cos ORV = z^2 + w^2 + 2zw \cos W.$

Denken wir uns nun aus dem Mittelpunkte einer, mit einem beliebigen Halbmesser beschriebenen, Kugel gerade Linien gezogen, welche OA, OB, OC und OR parallel sind und ihre Durchschnittspunkte mit der Oberfläche der Kugel durch grösste Kreise verbunden; so erhalten wir das sphärische Dreieck BCA, (Figur 6.) welches durch CR in die zwei Dreiecke BCR und CRA getheilt ist. In demselben ist $AB = \zeta$, $AC = \eta$, $BC = \theta$, $CR = W$, ferner $AR = \varrho$, wenn wir im Dreieck AOR den Winkel $AOR = \varrho$ setzen, wo alsdann

3) $w \sin \varrho = y \sin \zeta$ und 4) $w \cos \varrho = x + y \cos \zeta.$

Ferner haben wir in den sphärischen Dreiecken BCA und CRA

5) $\cos \theta - \cos \zeta \cos \eta = \sin \zeta \sin \eta \cos A$

$\cos W = \cos \eta \cos \varrho + \sin \eta \sin \varrho \cos A$

$$= \cos \eta . \frac{x + y \cos \zeta}{w} + \sin \eta \frac{y \sin \zeta}{w} \cos A \quad (3, \text{ und } 4,)$$

$$w \cos W = x \cos \eta + y \cos \eta \cos \zeta + y \cos \theta - y \cos \zeta \cos \eta \quad (5,)$$

oder

6) $w \cos W = x \cos \eta + y \cos \theta.$

Substituirt man den Werth von w^2 aus 1) und den von $w \cos W$ aus 6) in die Gleichung 2), so erhält man sogleich

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos\zeta + 2xz \cos\eta + 2yz \cos\theta.$$

Zu §. 205. Allgemein haben wir, wenn weder dx, noch dy, noch ds constant sind, die Gleichung

$$r = \frac{ds^3}{dy\, ddx - dx\, ddy}.$$

Da aber $ds = dx\sqrt{1+p^2}$, $dy = pdx$ und $ddy = dx + dpdx$, so ergibt sich sogleich

$$r = -\frac{dx(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{dp}.$$

Zu §. 209. Aus der gefundenen Gleichung der Parabel

$$\left(\frac{c^2 \sin\zeta \cos\zeta}{2g} - x\right)^2 = \frac{c^2 \cos\zeta^2}{g}\left(\frac{c^2 \sin\zeta^2}{4g} - y\right)$$

erhält man den, der vertikalen Axe entsprechenden Werth von x, indem man $y =$ maximum zu bestimmen sucht. Es muss aber in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = 0$ sein, und es wird daher

$$x = \frac{c^2 \sin\zeta \cos\zeta}{2g}$$

der Abstand der vertikalen Axe vom Punkte O. Ferner wird der grösste Werth von y in diesem Falle

$$y = \frac{c^2 \sin\zeta^2}{4g},$$

d. h. die Erhöhung des Scheitelpunktes über OA.

Setzt man in der obigen Gleichung der Parabel $y = 0$, so erhält man

$$\frac{c^2 \sin\zeta \cos\zeta}{2g} - x = \pm \frac{c^2 \sin\zeta \cos\zeta}{2g},$$

woraus $x = 0$ und $x = \frac{c^2 \sin\zeta \cos\zeta}{g}$ folgt. Der erste Werth entspricht dem vordern, der zweite dem hintern Durchschnittspunkte der Curve mit der Axe OA und es bezeichnet daher der letztere die Weite des Wurfes.

Zu §. 220. Es ist nämlich

$$u^2 \int S u d\varphi = \int d.[u^2 \int S u d\varphi] = \int 2udu \int S u d\varphi + \int S u^3 d\varphi.$$

Zu §. 227. (Figur 23.) Wir haben unmittelbar im Dreieck NPV

$$\cos PN = \cos NV \cos PV + \sin NV \sin PV \cos NVP$$
$$= \cos NV \cos PV - \sin NV \sin PV \cos PVs.$$

Nun ist $\cos NV = \sin Vs = \sin\omega$, $\sin NV = \cos\omega$, $\cos PV$

$=\frac{P}{V}$, ferner im Dreieck PVs; $\cos PVs = \frac{\cos Ps - \cos PV \cos Vs}{\sin PV \sin Vs}$,
mithin

$$\cos PN = \frac{P}{V}\sin\omega - \frac{\cos\omega\cos Ps}{\sin Vs} + \frac{\cos PV.\cos Vs^2}{\sin Vs}$$

$$= \frac{P}{V}\sin\omega - \frac{\cos\omega\, dx}{\sin\omega\, ds} + \frac{P\cos\omega^2}{V\sin\omega},$$

weil $\cos Ps = \frac{dx}{ds}$ ist; also endlich

$$\cos PN = \frac{P}{V\sin\omega} - \frac{\cos\omega\, dx}{\sin\omega\, ds}.$$

Eben so ergeben sich die beiden andern Gleichungen.

Zu §. 366. (Figur 36.) Um die Kraft $Z\zeta = \frac{\alpha r dM}{g}$ in die zwei Kräfte längs ZV und Zz zu zerlegen, haben wir, wenn wir die Linie $Z\zeta = \varrho$ setzen, die Kraft längs $ZV = \frac{Zv'}{\varrho}.\frac{\alpha r dM}{g}$ und die längs $Zz = \frac{Zz}{\varrho}.\frac{\alpha r dM}{g}$. Da aber $\angle XZ\zeta = 90^0$ und $v'Zz = 90^0$, so wird $\angle \zeta Zv' = XZY$ und $\Delta \zeta Zv' \backsim XYZ$; also wird

$$\frac{Zv'}{\varrho} = \frac{YZ}{XZ} = \frac{z}{r} \text{ und } \frac{Zz}{\varrho} = \frac{XY}{XZ} = \frac{y}{r}$$

und so die erstere Kraft $= \frac{\alpha z dM}{g}$, die letztere $= \frac{\alpha y dM}{g}$.

Zu §. 374. (Figur 42.) In Z wirkt längs Zz die Kraft V, man soll statt ihrer die zwei, in F und G ihr parallel anzubringenden, Kräfte X und Y bestimmen, welche ihr gleichgeltend seien. Setzt man $FZ = f$ und $ZG = g$, so haben wir allgemein

$$1)\quad X + Y = V \text{ und } 2)\quad Vf = Y(f+g),$$

mithin

$$Y = \frac{Vf}{f+g} = \frac{V.\frac{f}{g}}{\frac{f}{g}+1} \text{ und } X = V - Y = \frac{V}{\frac{f}{g}+1}.$$

Für $g = \infty$, wird aber $\frac{f}{g} = 0$ und so $X = V$, $Y = 0$ und $Y(f+g) = Vf$.

Wie in dieser Anmerkung ergeben sich die Momente der verschwindenden Kräfte

$$=Rr.OR=\frac{Vf\int z^2.dM}{\int r^2.dM} \text{ und } =Ss.OS=\frac{Vf\int y^2.dM}{\int r^2.dM}.$$

Diese Kräfte wirken im entgegengesetzten Sinne der Kraft $O\theta$ und es wird die Summe dieser Momente

$$=\frac{Vf}{\int r^2.dM}\{\int z^2.dM+\int y^2.dM\}=\frac{Vf}{\int r^2.dM}\int[z^2+y^2]dM=Vf;$$

also heben sich die Momente auf.

Zu §. 377. Man vergleiche §. 305., wo $x=\frac{gVt^2}{M}$ war. Das dortige x ist hier $=Ol.d\omega$ und das dortige t hier $=dt$.

Zu §. 442. Substituirt man nämlich den Werth $\operatorname{tg}\theta=\frac{A-B}{F}\sin\eta$ oder $\sin\theta=\frac{A-B}{F}\sin\eta\cos\theta$ in die Gleichung

$[A\cos\eta^2+B\sin\eta^2]\sin\theta\cos\theta-C\sin\theta\cos\theta-F\sin\eta[\cos\theta^2-\sin\theta^2]=0$, so erhält man zuletzt die Gleichung

$$(A-B)(A-C)-F^2=0,$$

die also frei von η ist.

Zu §. 455. Aus $(a^2-b^2)\cos\alpha^2=(b^2-c^2)\cos\gamma^2$, folgt $a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2=b^2$, mithin stets $Mk^2=Mb^2$.

Zu §. 474. (Figur 55.) Setzt man den Bogen $EM=s$, $Mm=ds$ und die Linie $Pp=dx$, so hat man, weil $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{adx}{y}$ und so das Moment der Trägheit des Bogens Mm in Bezug auf $AB=y^2ds=aydx$, also

das Moment des Bogens $EA=a\int_0^a ydx$

- - - - $BEA=a\int_{-a}^{+a} ydx$

- - - - $AEBF=2a\int_{-a}^{+a} ydx=a.a^2\pi=a^3\pi$.

Das Moment desselben Bogens Mm in Bezug auf den Durchmesser EF wird

$$=x^2ds=\frac{ax^2dx}{y}=\frac{ax^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a.\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

mithin das Moment des Bogens

$$EM=a^3\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-a\int\sqrt{a^2-x^2}.dx$$

$$=\tfrac{1}{2}a^3.\text{arc.sin}\left(\frac{x}{a}\right)-\tfrac{1}{2}ax\sqrt{a^2-x^2},$$

das Moment des Bogens $EA = a^3\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$-a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}.dx = \tfrac{1}{2}a^3.\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{4}a^3\pi$$

das Moment des Bogens $BEA = \tfrac{1}{2}a^3\pi$ und

- - - - - $AEBF = a^3\pi.$

Zu §. 480. Da $\sin\theta^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta$ ist, so wird $\tfrac{1}{2}Ma^2\sin\theta^2 + \tfrac{1}{6}Mc^2\sin(\zeta-\theta)^2 = \tfrac{1}{6}M[\tfrac{3}{2}a^2 - \tfrac{3}{2}a^2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}c^2\cos 2(\zeta-\theta)]$.

Aus $\operatorname{tg} 2\zeta = \frac{\sin 2\zeta}{\cos 2\zeta}$ und $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{c^2 \sin 2\zeta}{3a^2 + c^2\cos 2\zeta}$ folgt

$$\operatorname{tg} 2(\zeta-\theta) = \frac{3a^2\sin 2\zeta}{3a^2\cos 2\zeta + c^2}, \quad \cos 2(\zeta-\theta) = \frac{3a^2\cos 2\zeta + c^2}{\sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}}$$

und

$$\cos 2\theta = \frac{3a^2 + c^2\cos 2\zeta}{\sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}},$$

und so obiges Moment

$$= \tfrac{1}{12}M[3a^2 + c^2 - \frac{9a^4 + 3a^2c^2\cos 2\zeta + 3a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}{\sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}}]$$

$$= \tfrac{1}{12}M[3a^2 + c^2 \pm \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4}].$$

Aus §. 479. folgt, wenn man $\operatorname{tg} AIG = \operatorname{tg}\theta'$ setzt:

$$\sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4} = c^2\sin 2\zeta \operatorname{tg}\theta + 3a^2 + c^2\cos 2\zeta$$

$$= -3a^2 - c^2\cos 2\zeta - c^2\sin 2\zeta \operatorname{tg}\theta',$$

mithin

$$3a^2 + c^2 \pm \sqrt{9a^4 + 6a^2c^2\cos 2\zeta + c^4} = \begin{cases} c^2[1 - \cos 2\zeta - \sin 2\zeta \operatorname{tg}\theta'] \\ c^2[1 - \cos 2\zeta - \sin 2\zeta \operatorname{tg}\theta] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2c^2\sin\zeta\sin(\zeta-\theta')}{\cos\theta'} \\ \dfrac{2c^2\sin\zeta\sin(\zeta-\theta)}{\cos\theta} \end{cases}$$

und so obiges Moment

$$= \frac{Mc^2\sin\zeta\sin(\zeta-\theta)}{6\cos\theta}.$$

Zu §. 487. Aus $\operatorname{tg} AIB = \frac{b\sin\zeta}{a + b\cos\zeta}$ folgt

$$\operatorname{tg} 2AIB = \frac{2b\sin\zeta(a + b\cos\zeta)}{a^2 + 2ab\cos\zeta + b^2\cos 2\zeta},$$

ferner ist nach §. 484.

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{b^2\sin 2\zeta}{a^2 + b^2\cos 2\zeta} = \frac{2b^2\sin\zeta\cos\zeta}{a^2 + b^2\cos 2\zeta}.$$

Da nun $BIF = AIB - \theta$ ist, so folgt aus diesen Werthen

$$\operatorname{tg} 2BIF = \frac{2ab\sin\zeta(a^2 - b^2)}{a^4 + 2a^3b\cos\zeta + 2a^2b^2\cos 2\zeta + 2ab^3\cos\zeta + b^4}.$$

Im Rhombus ist $a=b$, $\operatorname{tg} 2BIF=0$ und $BIF=0$ oder $BIF=90^0$.

(Figur 58.) Im Rechteck ist $\zeta=90^0$, $\cos\zeta=0$, $\sin\zeta=1$, $\cos 2\zeta=-1$; also

$$\operatorname{tg} 2BIF=\frac{2ab(a^2-b^2)}{a^4-2a^2b^2+b^4}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

und

$$\operatorname{tg} BIF=\frac{b^2-a^2}{2ab}\pm\sqrt{\frac{b^4-2a^2b^2+a^4}{4a^2b^2}+1}=\frac{b^2-a^2}{2ab}\pm\frac{b^2+a^2}{2ab},$$

entweder $=\frac{b}{a}$ oder $=-\frac{a}{b}$.

Hier ist also AIC die eine und GIG' die andere Hauptaxe.

Zu §. 490. Die Worte „alle, in seiner Ebene durch den Mittelpunkt der Trägheit I gezogenen, geraden Linien" können wohl nur so verstanden werden, dass so wohl die beiden Diagonalen, als auch die durch I auf beide Seiten normal gezogenen Linien Hauptaxen sind.

Zu §. 491. Es wird $\int y^2dM=\int dy\int y^2dz=\int y^2zdy$, und wenn man z von $z=0$ bis $z=MP=\sqrt{a^2-y^2}$ nimmt,

$$\int y^2dM=\int y^2.\sqrt{a^2-y^2}\,dy=-\tfrac{1}{4}y(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{4}a^2\int\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$
$$=-\tfrac{1}{4}y(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{8}a^2y\sqrt{a^2-y^2}+\tfrac{1}{8}a^4\operatorname{arc.sin}\left(\frac{y}{a}\right).$$

Wenn man nun das Integral von $y=0$ bis $y=a$ erstreckt und dann, um alle 4 Quadranten zu umfassen, den Werth mit 4 multiplicirt; so ergibt sich das Moment

$$=\tfrac{1}{4}\pi a^4=\tfrac{1}{4}Ma^2.$$

Eben so führt $\int z^2dM=\int z^2dz\int dy=\int yz^2dz=\int z^2\sqrt{a^2-z^2}\,dz$ auf $\tfrac{1}{4}Ma^2$.

Zu §. 501. Es ist allgemein

$$\int(a+cx^2)^nx^m\,dx=\frac{1}{c(2n+m+1)}\Big\{(a+cx^2)^{n+1}x^{m-1}$$
$$-(m-1)a\int(a+cx^2)^nx^{m-2}dx\Big\},$$

mithin

$$\int y^2dy\sqrt{c^2-y^2}=-\tfrac{1}{4}\{(c^2-y^2)^{\frac{3}{2}}.y-c^2\int dy\sqrt{c^2-y^2}\}$$

und

$$\int_0^c y^2dy\sqrt{c^2-y^2}=\tfrac{1}{4}c^2.\tfrac{1}{4}c^2\pi=\tfrac{1}{16}\pi.c^4.$$

Zu §. 507. Dass $\int yzdM$ verschwinden muss, weil jedem positiven z für dasselbe y und dM ein gleich grosses negatives

z entspricht, ersieht man zwar sogleich, indessen folgt dasselbe auch leicht aus der Rechnung. Es wird nämlich

$$\int yz dM = \int r^3 dr\, dt\, d\varphi \sin\varphi \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\int r^3 dr\, dt\, d\varphi \sin 2\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{4} \cos 2\varphi \int r^3 dr\, dt.$$

Da aber so wohl für $\varphi = 0$, als auch für $\varphi = 2\pi$, $\cos 2\varphi = 1$ ist, so wird das Integral in Bezug auf φ, ausgedehnt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, verschwinden.

Zu §. 537. Wir hatten im §. 215., dem Beispiele der Bewegung eines einfachen Pendels, die Gleichung

$$vdv = -2g\, dy.$$

Setzt man nun in der dortigen Fig. 20, dem hiesigen Satze entsprechend, den Winkel $OBS = \varphi$, so haben wir die Gleichungen:

$$v = \frac{bd\varphi}{dt},\quad dv = \frac{bdd\varphi}{dt},\quad y = b - b\cos\varphi \text{ und } dy = b\sin\varphi d\varphi;$$

also, wenn man diese Werthe in die vorstehende Gleichung substituirt,

$$\frac{b^2 d\varphi dd\varphi}{dt^2} = -2gb\sin\varphi\, d\varphi \text{ oder } dd\varphi = -\frac{2g\sin\varphi\, dt^2}{b}.$$

Das dortige b ist hier l.

Zu §. 539. Damit $l = f + \frac{k^2}{f}$ ein minimum werde, haben wir

$$1)\ \frac{dl}{df} = 1 - \frac{k^2}{f^2} = 0 \text{ und } 2)\ \frac{ddl}{df^2} = +\frac{2k^2}{f^3};$$

also aus 1) $f = k$ und dann aus 2) $\frac{ddl}{df^2} = +\frac{2}{k}$.

Zu §. 546. Aus der Gleichung $f + \frac{2b^2}{5f} = \frac{2g}{\pi^2}$ folgt $OI = f = \frac{2g}{\pi^2} - \frac{2b^2}{5f}$ und, vorausgesetzt dass b sehr klein sei, also gegen g vernachlässigt werden könne; indem man im Nenner des zweiten Gliedes auf der rechten Seite statt f seinen genäherten Werth $\frac{2g}{\pi^2}$ substituirt,

$$OI = \frac{2g}{\pi^2} - \frac{\pi^2 b^2}{5g}$$

und hieraus, wenn man $OI = b$ setzt,

$$b = \frac{(\sqrt{65} - 5)g}{2\pi^2} = 0{,}155136g.$$

Hätte man hingegen nichts vernachlässigt, vielmehr in f

$=\frac{2g}{\pi^2}-\frac{2b^2}{5f}$, die Länge $f=b$ gesetzt, so würde sich ergeben haben

$$\frac{7}{5}b=\frac{2g}{\pi^2} \text{ und } b=\frac{10g}{7\pi^2}=0{,}144742g.$$

Zu §. 554. Indem man das Differential von

$$OS=\frac{B[\tfrac{2}{5}c^2+b^2]+L[\tfrac{2}{5}e^2+q^2]}{Bb+Lq},$$

in Bezug auf q genommen, $=0$ setzt, ergibt sich die Gleichung

$$2BLbq-BL[\tfrac{2}{5}c^2+b^2]-\tfrac{2}{5}L^2e^2+L^2q^2=0$$

und hieraus der zweifache Werth

$$Lq=-Bb\pm\sqrt{B^2b^2+BLb^2+\tfrac{2}{5}BLc^2+\tfrac{2}{5}L^2e^2}=-Bb\pm R.$$

Für den ersten Werth wird das zweite Differential von OS

$$=+\frac{2LR}{(Bb+Lq)^2},$$

also positiv und in diesem Falle OS ein minimum; hingegen wird für den zweiten Werth das zweite Differential von OS

$$=-\frac{2LR}{(Bb+Lq)^2},$$

also negetiv und OS ein maximum. Im letztern Falle ergibt sich aber

$$OQ=q-\frac{Bb}{L}-\frac{R}{L},$$

d. h. es muss die zweite Kugel oberhalb O in einem Abstande OQ angebracht werden.

Die Länge des isochronen einfachen Pendels wird alsdann $=\frac{\tfrac{2}{5}Bc^2+Bb^2+\tfrac{2}{5}Le^2+Lq^2}{R}$, d. h. wenn man substituirt und reducirt,

$$=-\frac{2Bb}{L}-\frac{2R}{L};$$

es müsste also ein Pendel von dieser Länge sein, dessen Linse sich aber oben befände.

Zu §. 556. Es soll sein

$$OS=b+\frac{2c^2}{5b}>\frac{2}{L}\sqrt{B^2b^2+BLb^2+\tfrac{2}{5}BLc^2+\tfrac{2}{5}L^2e^2},$$

d. h. es soll, wenn man gehörig umformt und reducirt:

$$b^2+\frac{4c^2}{5}+\frac{4c^4}{25b^2}>\frac{8e^2}{5} \text{ oder } b+\frac{2c^2}{5b}>2e\sqrt{\frac{2}{5}}$$

sein.

Zu §. 559. Die im Original aufgestellte Gleichung ergibt sich, indem man

$$OS = \frac{2\sqrt{c^6b^2 + c^3e^3b^2 + {}^2/_5 c^5e^3 + {}^2/_5 e^8} - 2c^3b}{e^3}$$

als Function von e betrachtet und ihren kleinsten Werth sucht, also $\frac{d.OS}{de} = 0$ setzt.

Zu §. 560. Aus

$$OQ = q = \frac{1}{L}\sqrt{B^2b^2 + BLb^2 + {}^2/_5 BLc^2 + {}^2/_5 L^2c^2} - \frac{Bb}{L}$$

ergibt sich bei constantem L der Werth von OQ um so kleiner, je kleiner e ist. Ist ferner e constant, so folgt aus

$$OS = \frac{B({}^2/_5 c^2 + b^2) + L({}^2/_5 e^2 + q^2)}{Bb + Lq},$$

für $L = 0$, $OS = b + \frac{2c^2}{5b}$, d. h. nach §. 556. der grösste Werth von OS. Ist ferner

$$5b^2 + 2c^2 = 2be\sqrt{10}, \text{ oder } b + \frac{2c^2}{5b} = 2be\sqrt{\frac{2}{5}}$$

und

$$e = \frac{5b^2 + 2c^2}{2b\sqrt{10}};$$

so wird aus

$$OS = \frac{2}{L}\sqrt{B^2b^2 + BLb^2 + {}^2/_5 BLc^2 + {}^2/_5 L^2e^2} - \frac{2Bb}{L}$$

$$OS = \frac{2}{L}\left(Bb + Le\sqrt{\frac{2}{5}}\right) - \frac{2Bb}{L} = 2e\sqrt{\frac{2}{5}},$$

also OS unabhängig von L und um so grösser, je grösser e ist, und die Schwingungen daher alsdann desto langsamer.

Zu §. 636. Aus den Werthen von $\int R^2dM$, $\int XYdM$ und $\int XZdM$ (§. 632.), wie auch nach §. 438. folgt unmittelbar

$$\int XYdM = -{}^1/_2 \cdot \frac{d\int R^2dM}{d\theta} \text{ und } \int XZdM = \frac{1}{2\cos\theta} \cdot \frac{d.\int R^2dM}{d\eta}$$

und wenn man diese Werthe in die Hauptbedingungen substituirt,

$$\frac{\sin\eta d.\int R^2dM}{2d\eta} = \cos\eta\int R^2dM \text{ und } -\frac{\cos\theta d.\int R^2dM}{2d\theta} = \sin\theta\int R^2dM.$$

In der ersten ist nur η, in der zweiten nur θ veränderlich, und wenn wir der Kürze wegen $\int R^2dM$ durch F bezeichnen, so haben wir

$$\frac{dF}{d\eta} = \frac{2\cos\eta}{\sin\eta}F \text{ und } \frac{dF}{d\theta} = -\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}F,$$

also das vollständige Differential

$$dF = \frac{2\cos\eta}{\sin\eta}Fd\eta - \frac{2\sin\theta}{\cos\theta}Fd\theta$$

oder
$$\frac{dF}{F} = \frac{2d\sin\eta}{\sin\eta} + \frac{2d\cos\theta}{\cos\theta};$$
mithin
$\log F = 2\log\sin\eta + 2\log\cos\theta + \text{Const}$, oder $F = \alpha\sin\eta^2\cos\theta^2$, wenn $\text{Const.} = \log\alpha$ gesetzt wird.

Soll $\frac{\sin\eta^2\cos\theta^2}{\int R^2 dM} = \frac{\sin\eta^2\cos\theta^2}{F}$ ein minimum werden, so wird
$$\frac{2\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2}{F} - \frac{\sin\eta^2\cos\theta^2\frac{dF}{d\eta}}{F^2} = 0$$
und
$$\frac{-2\sin\eta\cos\theta\sin\theta}{F} - \frac{\sin\eta^2\cos\theta^2 . \frac{dF}{d\theta}}{F^2} = 0$$
oder
$$\frac{\sin\eta d.\int R^2 dM}{2d\eta} = \cos\eta\int R^2 dM \text{ und } -\frac{\cos\theta d.\int R^2 dM}{2d\theta} = \sin\theta\int R^2 dM,$$
wie oben. Endlich ist
$$d\omega^2\int R^2 dM = V^2 g^2 h^2 dt^4 . \frac{\sin\eta^2\cos\theta^2}{\int R^2 dM},$$
welches offenbar ein minimum wird, wenn diess mit $\frac{\sin\eta^2\cos\theta^2}{\int R^2 dM}$ geschieht.

Zu §. 656. (Figur 89.) Es wird
$$\sin\alpha\sin\lambda = \sin\beta\sin OBA = \sin\beta\cos CBO = \sin\beta\cos\mu = \cos\gamma$$
$$\text{oder } \sin\lambda = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha},$$
$$\sin\beta\sin\mu = \sin\gamma\sin BCO = \sin\gamma\cos ACO = \sin\gamma\cos\nu = \cos\alpha$$
$$\text{oder } \sin\mu = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$
$$\sin\gamma\sin\nu = \sin\alpha\sin CAO = \sin\alpha\cos OAB = \sin\alpha\cos\lambda = \cos\beta$$
$$\text{oder } \sin\nu = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}.$$

Ferner ist $\sin\alpha\sin\lambda = \cos\gamma$

und $\cos\alpha = \operatorname{tg}\mu\cos\gamma$

also $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\mu}{\sin\lambda}$;

wie auch $\sin\alpha\cos\lambda = \cos\beta$

und $\cos\alpha = \frac{\cos\beta}{\operatorname{tg}\nu}$

also $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\cos\lambda}$.

Eben so findet man die Werthe von $\operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}\gamma$.

Zu §. 659. (Figur 90.) Es folgt aus den Gleichungen

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

und

$$\sin C \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos C,$$

wenn man beide differentiirt und reducirt, allgemein

$$dc = \cos B da + \cos A db + \sin b \sin A dc$$

und

$$\sin c dA = \sin B da - \sin a \cos B dC - \cos c \sin A db.$$

Setzt man nun, im Vergleich mit Figur 89.
$a = x$, $dx = Oo$, $b =$ constans, also $db = 0$, $c = \alpha$, $A = \lambda$, $B = AoO$, $C =$ constans also $dC = 0$; so erhalten wir:

$$1) \quad d\alpha = Oo . \cos AoO$$

$$2) \quad d\lambda \sin\alpha = Oo . \sin AoO,$$

also

$$Oo = \sqrt{d\alpha^2 + d\lambda^2 \sin\alpha^2} \text{ und } \operatorname{tg} AoO = \frac{d\lambda \sin\alpha}{d\alpha}.$$

Zu §. 665. Wir haben nach §. 639.

$$d\omega = \frac{Rghdt^2 \sqrt{a^4 \cos\delta^2 + b^4 \sin\delta^2}}{Ma^2 b^2 \cos\theta}$$

$$= \frac{\Omega^2 \sin n \cos n^2 (a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2 - c^2)}{2f}$$

$$\times \frac{f(a^2 - c^2)\cos m}{\cos n \cos\delta [a^2 \cos m^2 + b^2 \sin m^2 - c^2]} dt^2$$

$$\times \frac{\sqrt{a^4 (a^2 - c^2)^2 \cos m^2 + b^4 (b^2 - c^2)^2 \sin m^2}}{(a^2 - c^2)\cos m} . \cos\delta$$

oder

$$d\omega = \frac{\Omega^2 dt^2 \sin n \cos n \sqrt{a^4 (a^2 - c^2)^2 \cos m^2 + b^4 (b^2 - c^2)^2 \sin m^2}}{2a^2 b^2 \cos\theta}$$

$$= \frac{\Omega^2 dt^2 \sin n \cos n \, b^2 (b^2 - c^2) \sin m}{2a^2 b^2 \cos\theta \cos\eta} = \frac{\Omega^2 (b^2 - c^2) dt^2 \sin m \sin n \cos n}{2a^2 \cos\eta \cos\theta}$$

$$= \frac{\Omega^2 (a^2 - c^2) dt^2 \cos m \sin n \cos n}{2b^2 \sin\eta \cos\theta}.$$

Zu §. 667. Es werden hier die Werthe von $\cos\theta$ und $\sin\theta$ gebraucht, und da

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin m \cos n (a^2 - b^2) b^2 \sin\eta}{c^2 (a^2 - c^2) \sin n},$$

so wird

$$\cos\theta = \frac{c^2 (a^2 - c^2) \sin n}{\sqrt{\sin m^2 \cos n^2 (a^2 - b^2)^2 b^4 \sin\eta^2 + c^4 (a^2 - c^2)^2 \sin n^2}}.$$

Substituirt man hier den im Texte befindlichen Werth von $\sin\eta$, so erhält man

$$\cos\theta = \frac{c^2 \sin n W}{\Psi}$$

und eben so

$$\sin\theta = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2) \cos\alpha \cos\beta}{\Psi}.$$

Mit Benutzung dieser und der im Texte für $\cos\eta$ und $\sin\eta$ gegebenen Werthe erhält man die dort für $\cos\mathfrak{A}$, $\cos\mathfrak{B}$, $\cos\mathfrak{C}$ und $d\omega$ aufgeführten Werthe.

Zu §. 669. Es werden hier einige Zwischenwerthe der zum Theil weitläufigen Umformungen dieses §. aufgeführt.

Aus $\operatorname{tg}(m+\eta)$

$$= \frac{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg}\eta}{1 - \operatorname{tg} m \operatorname{tg}\eta} = \frac{\frac{\sin m}{\cos m} + \frac{a^2(a^2-c^2)\cos m}{b^2(b^2-c^2)\sin m}}{1 - \frac{a^2(a^2-c^2)}{b^2(b^2-c^2)}}$$

folgt

$$\operatorname{tg}(m+\eta) = \frac{a^2(a^2-c^2)\cos m^2 + b^2(b^2-c^2)\sin m^2}{(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)\sin m \cos m}.$$

Hieraus

$$\sin(m+\eta) = \frac{a^2(a^2-c^2)\cos m^2 + b^2(b^2-c^2)\sin m^2}{\sqrt{a^4(a^2-c^2)^2\cos m^2 + b^4(b^2-c^2)^2\sin m^2}}$$

und

$$\cos(m+\eta) = \frac{[b^2(b^2-c^2) - a^2(a^2-c^2)]\sin m \cos m}{\sqrt{a^4(a^2-c^2)^2\cos m^2 + b^4(b^2-c^2)^2\sin m^2}}.$$

Ferner folgt aus

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{a^2(a^2-c^2)\cos m}{b^2(b^2-c^2)\sin m}$$

$$\sin\eta = \frac{a^2(a^2-c^2)\cos m}{\sqrt{a^4(a^2-c^2)^2\cos m^2 + b^4(b^2-c^2)^2\sin m^2}}$$

und da

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b^2 \sin m \sin\eta (a^2-b^2)\cos n}{c^2(a^2-c^2)\sin n};$$

so ergibt sich nun leicht der Werth von $\frac{\cos n \operatorname{tg}\theta}{\sin(m+\eta)}$ und dann der von $\operatorname{cotg} COS$.

Wie im §. 666. hat man, weil $AM = m$, $OM = n$, $BM = 90^0 - m$ und $CO = 90^0 - n$ ist,

$\cos\alpha = \cos m \cos n$, $\cos\beta = \sin m \cos n$ und $\cos\gamma = \sin n$,

also $\sin m \cos m \cos n^2 \sin n = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

Mittelst dieses und des für

$$\frac{\cos s}{\sin\theta} = \frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\sin n}{a^2 b^2}$$

gefundenen Werthes, erhält man

$$d\omega = \frac{\Omega^2(a^2-b^2)dt^2\sin m\cos m\cos n^2\cos s}{c^2\sin\theta} = \frac{\Omega^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{a^2b^2c^2}dt^2.$$

Aus obigen Werthen von $\operatorname{tg}\theta$ und $\sin\eta$ erhält man

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a^2b^2(a^2-b^2)\sin m\cos m\cos n}{c^2\sin n\sqrt{a^4(a^2-c^2)^2\cos m^2+b^4(b^2-c^2)^2\sin m^2}}$$

und hieraus

$$\sin\theta = \frac{a^2b^2(a^2-b^2)\sin m\cos m\cos n}{\sqrt{a^4b^4(a^2-b^2)^2\sin m^2\cos m^2\cos n^2+c^4\sin n^2[a^4(a^2-c^2)^2\cos m^2+b^4(b^2-c^2)^2\sin m^2]}}.$$

Ferner aus $\cos s = \frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\sin n\sin\theta}{a^2b^2}$, mit Benutzung des Werthes von $\sin\theta$,

$$\sin s = \frac{\sqrt{\left\{\begin{matrix}a^4b^4(a^2-b^2)^2\sin m^2\cos m^2\cos n^2+a^4c^4(a^2-c^2)^2\cos m^2\sin n^2+b^4c^4(b^2-c^2)^2\sin m^2\sin n^2\\ -(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2(b^2-c^2)^2\sin m^2\cos m^2\cos n^2\sin n^2\end{matrix}\right\}}}{\sqrt{a^4b^4(a^2-b^2)^2\sin m^2\cos m^2\cos n^2+c^4\sin n^2[a^4(a^2-c^2)^2\cos m^2+b^4(b^2-c^2)^2\sin m^2]}}$$

und da nun

$$Oo = \frac{\Omega(a^2-b^2)dt\sin m\cos m\cos n^2\sin s}{c^2\sin\theta},$$

wenn man die Werthe von $\sin s$ und $\sin\theta$ benutzt und α, β und γ einführt, der im Text befindliche Werth von Oo.

Hat man das Perpendikel op gefällt, so wird, weil die drei Bogen Oo, Op und op elementare sind, zunächst

$$Op = Oo.\cos SOC \text{ und } op = Oo.\sin SOC.$$

Mit Benutzung des ursprünglichen Werthes von Oo wird

$$Op = \frac{\Omega(a^2-b^2)dt \sin m \cos m \cos n^2 \sin s \cos SOC}{c^2 \sin\theta}$$
$$= \frac{\Omega(a^2-b^2)\,dt \cos\alpha \cos\beta}{c^2} \cdot \frac{\sin s \cos SOC}{\sin\theta};$$

aber

$$\sin s \cos SOC = \sin\theta \cos n - \cos\theta \sin n \cos(m+\eta)$$

also

$$\frac{\sin s \cos SOC}{\sin\theta} = \cos n - \sin n \operatorname{cotg}\theta \cos(m+\eta)$$
$$= \cos n - \frac{c^2 \sin n^2[b^2(b^2-c^2)-a^2(a^2-c^2)]}{a^2b^2(a^2-b^2)\cos n}$$
$$= \frac{a^2b^2(a^2-b^2)-(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\sin n^2}{a^2b^2(a^2-b^2)\cos n};$$

mithin, weil $\sin n = \cos\gamma$ und $\cos n = \sin\gamma$,

$$Op = \frac{\Omega(a^2-b^2)dt \cos\alpha\cos\beta[a^2b^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos\gamma^2]}{a^2b^2c^2\sin\gamma}.$$

Aehnlich wird

$$op = \frac{\Omega(a^2-b^2)dt \sin m \cos m \cos n^2}{c^2} \cdot \frac{\sin s \sin SOC}{\sin\theta},$$

aber

$$\frac{\sin s \sin SOC}{\sin\theta} = \frac{\sin(m+\eta)}{\operatorname{tg}\theta}$$
$$= \frac{c^2 \sin n\,[b^2(b^2-c^2)\sin m^2 + a^2(a^2-c^2)\cos m^2]}{a^2b^2(a^2-b^2)\sin m \cos m \cos n};$$

demnach

$$op = \frac{\Omega dt \sin n[a^2(a^2-c^2)\cos m^2 \cos n^2 + b^2(b^2-c^2)\sin m^2 \cos n^2]}{a^2b^2\cos n}$$
$$= \frac{\Omega dt \cos\gamma[a^2(a^2-c^2)\cos\alpha^2 + b^2(b^2-c^2)\cos\beta^2]}{a^2b^2\sin\gamma}.$$

Zu §. 671. Der Werth von $\operatorname{tg} COS$ ergibt sich unmittelbar nach §. 669., indem man die Werthe von $\sin n = \cos\gamma$, $\cos n^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1 - \cos\gamma^2$, $\sin m \cos m = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos n^2}$, $\sin m = \frac{\cos\beta}{\cos n}$ und $\cos m = \frac{\cos\alpha}{\cos n}$ aus §. 666. einführt und eine kurze Umformung vornimmt. Ferner wird aus

$$\cos AC = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos AOC,$$

weil $AC = 90^0$,

$$\cos AOC = -\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

und da

$$\sin\alpha \sin AOC = \sin AC \sin ACO = \cos OCB,$$

wie auch

$$\sin\gamma\cos OCB = \cos OB \sin BC - \sin OB \cos BC \cos OBC,$$

wegen $BC = 90^0$,

$$\sin\gamma\cos OCB = \cos OB = \cos\beta;$$

mithin

$$\sin AOC = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} \text{ und so } \operatorname{tg} AOC = -\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}.$$

Aus den Werthen von tgCOS und tgAOC erhält man tgAOS $=$tg$(AOC - COS)$ nach bekannter Weise und einer etwas weitläufigen aber nicht schwierigen Umformung.

Zu §. 673. Im Dreieck AOR ist

$$\sin R \sin AR = \sin OA \sin AOR$$

und

$$\sin R \cos AR = \cos AOR \sin A + \sin AOR \cos A \cos OA,$$

also weil

$$OA = \alpha \text{ und } AOR = AOS,$$

$$\operatorname{tg} AR = \frac{\sin\alpha \operatorname{tg} AOS}{\sin A + \operatorname{tg} AOS \cos A \cos\alpha},$$

oder weil

$$AM = ACM = m, \quad OC = \gamma, \quad \sin A = \frac{\sin\gamma\sin m}{\sin\alpha} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

und

$$\sin\alpha\cos A = \cos\gamma, \quad \operatorname{tg} AR = \frac{\sin\alpha^2 \operatorname{tg} AOS}{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma \operatorname{tg} AOS}.$$

Hier ist der Werth von tgAOS aus §. 671. zu substituiren, um nach kurzer Umformung

$$\operatorname{tg} AR = \frac{a^2\cos\alpha[b^2(a^2-b^2)\cos\beta^2 + c^2(a^2-c^2)\cos\gamma^2]}{c^2\cos\gamma[a^2(a^2-c^2)\cos\alpha^2 + b^2(b^2-c^2)\cos\beta^2]}$$

zu erhalten. Um hieraus nach Analogie tg$BQ =$ cotgAQ herzuleiten, hat man statt a, b, c respective b, c, a und statt α, β, γ respective β, γ, α zu setzen.

Zu §. 676. Es ist unmittelbar

$$\sin OCo \sin Co = \sin po,$$

oder weil OCo und po unendlich klein, ferner nach §. 669. $\sin Co = \sin(\gamma + d\gamma) = \sin\gamma$,

$$OCo . \sin\gamma = po$$

und wenn man hier den Werth von po aus §. 669. substituirt,

$$OCo = \frac{\Omega dt \cos\gamma[a^2(a^2-c^2)\cos\alpha^2 + b^2(b^2-c^2)\cos\beta^2]}{a^2b^2\sin\gamma^2}.$$

Zu §. 678. Es ist $ZAB = ZAC - BAC = ZAC - 90^0$, also $\sin ZAB = -\cos ZAC$. Allgemein ist

$$\sin ZA \cos ZAC = \cos ZC \sin AC - \sin ZC \cos AC \cos ZCA,$$

mithin weil $AC = 90^0$,

$$\sin l \cos ZAC = \cos n \text{ und } \sin ZAB = -\frac{\cos n}{\sin l}.$$

Aus

$$\sin ZO \cos OZA = \cos OA \sin ZA - \sin OA \cos ZA \cos ZAO$$

und

$$\sin ZO \sin OZA = \sin OA \sin ZAO$$

folgt

$$\operatorname{cotg} AZO = \frac{\cos\alpha \sin l - \sin\alpha \cos l \dfrac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\sin l}}{\sin\alpha \dfrac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\sin l}},$$

woraus durch Umformung folgt:

$$\operatorname{cotg} AZO = \frac{\cos\alpha - \cos l[\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n]}{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}.$$

In Betreff der folgenden Differentiationen ist noch zu bemerken, dass

$$d.ZO = Zo - ZO \text{ und } d.AZO = OZo$$

gesetzt ist, so wie auch dass

$$\sin AZO^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} AZO^2}$$
$$= \frac{[\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n]^2}{[\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n]^2 + [\cos\alpha - \cos l \cos ZO]^2}$$
$$= \frac{[\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n]^2}{\sin l^2 [1 - (\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)^2]}$$

wird.

Zu §. 679. Nach §. 678. wird $po = oZ - OZ$,
$$Op = OZo \sin OZ$$
und $\sin OZ^2 = 1 - [\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n]^2$, woraus die Werthe im Texte folgen.

Zu §. 680. Durch Differentiation von $\sin BAO = \dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$ erhält man

$$\cos BAO d.BAO = \frac{-d\gamma\sin\gamma\sin\alpha - d\alpha\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha^2},$$

also weil
$$\cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$
$$d.BAO = OAo = \frac{-d\alpha\cos\alpha\cos\gamma - d\gamma\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Fällt man aus O auf oA das Perpendikel $O\pi$, so wird
$$O\pi = OAo.\sin OA = OAo.\sin\alpha \text{ und } o\pi = oA - OA = d\alpha,$$
also wenn man den eben gefundenen Werth von OAo substituirt,

$$Oo^2 = o\pi^2 + O\pi^2 = d\alpha^2 +$$
$$+ \frac{d\alpha^2 \cos\alpha^2 \cos\gamma^2 + d\gamma^2 \sin\alpha^2 \sin\gamma^2 + 2 d\alpha\, d\gamma \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma \cos\gamma}{\cos\beta^2},$$

d. h. weil

$$\cos\beta^2 + \cos\alpha^2 \cos\gamma^2 = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\gamma^2 + \cos\alpha^2 \cos\gamma^2$$
$$= \sin\alpha^2 - \cos\gamma^2 \sin\alpha^2 = \sin\alpha^2 \sin\gamma^2,$$

$$Oo^2 = \frac{(d\alpha^2 + d\gamma^2)\sin\alpha^2 \sin\gamma^2 + 2 d\alpha\, d\gamma \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma \cos\gamma}{\cos\beta^2}.$$

Aus $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ folgt aber

$$d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\beta \sin\beta \cos\beta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0,$$

und hieraus

$$2 d\alpha d\gamma \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma \cos\gamma$$
$$= d\beta^2 \sin\beta^2 \cos\beta^2 - d\alpha^2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2 - d\gamma^2 \sin\gamma^2 \cos\gamma^2,$$

mithin Oo^2

$$= \frac{d\alpha^2 \sin\alpha^2(\sin\gamma^2 - \cos\alpha^2) + d\beta^2 \sin\beta^2 \cos\beta^2 + d\gamma^2 \sin\gamma^2(\sin\alpha^2 - \cos\gamma^2)}{\cos\beta^2}$$
$$= d\alpha^2 \sin\alpha^2 + d\beta^2 \sin\beta^2 + d\gamma^2 \sin\gamma^2.$$

Zu §. 681. Aus

$$\operatorname{tg} AZO = \frac{\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n}{\cos\alpha - \cos l \cos v}$$

und

$$\operatorname{tg} BZO = -\frac{\cos\alpha \cos n - \cos\gamma \cos l}{\cos\beta - \cos m \cos v}$$

folgt

$$\operatorname{tg} AZB = \frac{\operatorname{tg} AZO + \operatorname{tg} OZB}{1 - \operatorname{tg} AZO . \operatorname{tg} OZB}$$

$$\mathrm{tg}AZB=\frac{\left\{\begin{matrix}\cos\beta\cos\gamma\cos m-\cos\gamma\cos v\cos m^2-\cos\beta^2\cos n+\cos\beta\cos m\cos n\cos v\\ -\cos\alpha^2\cos n+\cos\alpha\cos v\cos l\cos n+\cos\alpha\cos\gamma\cos l-\cos\gamma\cos v\cos l^2\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos m\cos v-\cos\beta\cos l\cos v+\cos l\cos m\cos v^2+\cos\alpha\cos\gamma\cos m\cos n\\ -\cos\gamma^2\cos l\cos m-\cos\alpha\cos\beta\cos n^2+\cos\beta\cos\gamma\cos l\cos n\end{matrix}\right\}}$$

$$=\frac{\left\{\begin{matrix}\cos\beta\cos\gamma\cos m-\cos\beta^2\cos n-\cos\alpha^2\cos n+\cos\alpha\cos\gamma\cos l\\ +\cos v[\cos n(\cos v-\cos\gamma\cos n)-\cos\gamma\cos m^2-\cos\gamma\cos l^2]\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma\cos m\cos n-\cos\gamma^2\cos l\cos m-\cos\alpha\cos\beta\cos n^2\\ +\cos\beta\cos\gamma\cos l\cos n-\cos v[\cos\alpha\cos m+\cos\beta\cos l]+\cos l\cos m\cos v^2\end{matrix}\right\}},$$

weil

$$\cos v=\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n,\quad \cos l^2+\cos m^2+\cos n^2=1 \text{ und } \cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1.$$

Ferner

$$\mathrm{tg}AZB=\frac{\cos\gamma[\cos v-\cos\gamma\cos n]-\cos\beta^2\cos n-\cos\alpha^2\cos n+\cos n\cos v^2-\cos\gamma\cos v}{\left\{\begin{matrix}\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos m[\cos v-\cos\alpha\cos l-\cos\beta\cos m]+\cos\beta\cos l[\cos v-\cos\alpha\cos l-\cos\beta\cos m]\\ -\cos\gamma^2\cos l\cos m-\cos\alpha\cos\beta\cos n^2-\cos v\cos\alpha\cos m-\cos v\cos\beta\cos l+\cos l\cos m\cos v^2\end{matrix}\right\}}$$

$$=\frac{-\cos n\sin v^2}{\cos\alpha\cos\beta[1-\cos m^2-\cos l^2-\cos n^2]-\cos l\cos m[\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2-\cos v^2]}=\frac{\cos n}{\cos l\cos m},$$

woraus leicht

$$\cos AZB=\pm\frac{\cos l\cos m}{\sin l\sin m}$$

folgt.

Zu §. 690. Aus

$$\sin Op \sin OpP = \sin OP \sin OPp$$

und $$\sin Op \cos OpP = \cos OP \sin Pp - \sin OP \cos Pp \cos OPp$$

folgt, weil $OPp = 90^\circ$ und Pp unendlich klein, also $\sin Pp = Pp$ und $\cos Pp = 1$ ist,

$$\operatorname{tg} OpP = \frac{\operatorname{tg} OP}{Pp} = \infty\;;$$

also auch $OpP = 90^\circ$ und nach der ersten Gleichung

$$Op = OP.$$

Da nun nach der Voraussetzung $pq = PQ$ ist, so wird auch

$$Oq = OQ.$$

Ferner aus

$$\sin Oq \sin OqQ = \sin OQ \sin OQq$$

und $$\sin Oq \cos OqQ = \cos OQ \sin Qq - \sin OQ \cos Qq \cos OQq,$$

weil Qq unendlich klein, $\sin Qq = Qq$ und $\cos Qq = 1$ ist,

$$\operatorname{tg} QqQ = \frac{\operatorname{tg} OQ . \dfrac{\sin OQq}{Qq}}{1 - \operatorname{tg} OQ \dfrac{\cos OQq}{Qq}} = \infty\;;$$

mithin $OqQ = OQq = 90^\circ$.

Zu §. 693. Soll $\sqrt{Pp^2 - 2Pp.Qq \cos PQ + Qq^2} = 0$ werden, so ist diess nur möglich, wenn Pp und Qq verschwinden; denn aus jener Gleichung würde sich

$$Pp = Qq \cos PQ \pm Qq \sin PQ . \sqrt{-1}$$

ergeben.

Zu §. 698. Aus

$$\sin OP \sin OPR = \sin OR \sin ORP$$

und

$$\sin OP \cos OPR = \cos OR \sin PR - \sin OR \cos PR \cos ORP$$

folgt, weil $OPR = 90^\circ + m$, $ORP = 90^\circ - n$ und $PR = p = 180^\circ$ ist,

$$\sin OP \cos m = \sin OR \cos n$$
$$\sin OR \sin n = - \sin OP \sin m;$$

mithin $$\cos m \sin n = - \sin m \cos n.$$

Zu §. 714. Es ist

$$\sin OA \cos BAO = \cos BO \sin BA - \sin BO \cos BA \cos AOB$$

$$\sin OA \sin BAO = \sin BO \sin OBA$$
$$= \sin BO \cos OBC,$$

weil $AC = BA = BC = 90^\circ$ und daher $CBA = 90^\circ$ ist,

$$= \cos CO \sin BC - \sin CO \cos BC \cos BCO.$$

Da nun $\sin BA = \sin BC = 1$, $\cos BA = \cos BC = 0$ und

$OA = \alpha = \mathfrak{A}$ ist, so erhalten wir

$$\sin\mathfrak{A}\cos BAO = \cos BO$$

und

$$\sin\mathfrak{A}\sin BAO = \cos CO.$$

Zu §. 723. Das am Ende dieses §. angegebene Integral

$$\lambda = E + \text{arc.sin.}\left(\frac{-D + C\cos l}{\sin l}\right)$$

scheint dem zu Grunde liegenden Differentiale nicht zu entsprechen. Differentiirt man nämlich diese Gleichung, so ergibt sich nach einiger Umformung

$$d\lambda = \frac{-dl(C - D\cos l)}{\sin l . \sqrt{1 - (1 + C^2)\cos l^2 + 2CD\cos l - D^2}},$$

welches offenbar von dem vorausgesetzten Differentiale

$$d\lambda = \frac{-dl(C - D\cos l)}{\sin l\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos l^2}}$$
$$= \frac{-dl(C - D\cos l)}{\sin l . \sqrt{\sin l^2 - (C - D\cos l)^2}}$$

verschieden ist. Ich habe das letztere auf folgende Weise integrirt.

Setzt man

$$C - D\cos l = L(D - C\cos l),$$

so erhält man hieraus

$$\cos l = \frac{C - DL}{D - CL}, \quad \sin l^2 = \frac{(D^2 - C^2)(1 - L^2)}{(D - CL)^2}$$

$$\sin l dl = \frac{(D^2 - C^2)dL}{(D - CL)^2} \text{ und } C - D\cos l = \frac{(D^2 - C^2)L}{D - CL}.$$

Substituirt man diese Werthe in den zweiten Ausdruck der vorausgesetzten Differentialgleichung, so erhält man nach einiger Umformung

$$d\lambda = -\frac{LdL\sqrt{D^2 - C^2}}{(1 - L^2)\sqrt{1 - (1 + D^2 - C^2)L^2}}.$$

Nun setze man

$$L^2 = x \text{ und } D^2 - C^2 = \alpha^2,$$

alsdann wird

$$d\lambda = -\tfrac{1}{2}\frac{\alpha dx}{(1 - x)\sqrt{1 - (1 + \alpha^2)x}}.$$

Endlich setze man

$$\sqrt{1 - (1 + \alpha^2)x} = z,$$

woraus

$$x = \frac{1 - z^2}{1 + \alpha^2}, \quad dx = -\frac{2zdz}{1 + \alpha^2}, \quad 1 - x = \frac{\alpha^2 + z^2}{1 + \alpha^2},$$

also

$$d\lambda = \frac{\alpha dz}{\alpha^2 + z^2} \text{ und } \lambda = \text{arc. tg.}\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

folgt. Geht man nun von der Hülfsgrösse z nach und nach zu den ursprünglichen Grössen zurück, so wird

$$\frac{z}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-(1+D^2-C^2)L^2}}{\sqrt{D^2-C^2}} = \frac{\sqrt{\sin l^2 - (C - D\cos l)^2}}{D - C\cos l}$$

oder

$$\lambda = E + \text{arc.tg.}\left[\frac{\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1+D^2)\cos l^2}}{D - C\cos l}\right].$$

Dass dieses Integral dem zu Grunde liegenden Differentiale entspricht, kann man leicht durch Differentiation erfahren.

Zu §. 725. Ist $C = \sqrt{1+D^2}$ und $\cos l = \frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$, so geht die in der vorigen Anmerkung am Ende erhaltene Gleichung über in

$$\lambda = E + \text{arc.tg.}\left(\frac{0}{0}\right).$$

Zu §. 737. Es wird nämlich

$$\begin{aligned} A(c^2-b^2) + B(a^2-c^2) + C(b^2-a^2) \\ = \Omega^2\{ & b^2c^2(c^2-b^2) + a^2c^2(a^2-c^2) + a^2b^2(b^2-a^2) \\ & -(b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)\cos\alpha^2 \\ & -(b^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2-a^2)\cos\beta^2 \\ & -(c^2-a^2)(c^2-b^2)(b^2-a^2)\cos\gamma^2\} \\ = \Omega^2\{ & b^2c^2(c^2-b^2) + a^2c^2(a^2-c^2) \\ & + a^2b^2(b^2-a^2) - (b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)\} = 0. \end{aligned}$$

Zu §. 743. (Figur 99.) In dem Raume αABb wird α und $\beta < 90^\circ$, γ aber $> 90^\circ$, also $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ negativ, dasselbe gilt von den Räumen βBCc und γCAa. In αAa hingegen wird $\alpha < 90^\circ$, β und $\gamma > 90^\circ$, also $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ positiv, was auch von den Räumen $bB\beta$ und $cC\gamma$ gilt.

Zu §. 744. Setzt man die Excentricität $= e$, so ist der halbe Parameter

$$= f(1-e^2) = 1,$$

also

für die Ellipse, wo $e < 1$, $f = +\frac{1}{1-e^2}$,

für die Hyperbel, wo $e > 1$, $f = -\frac{1}{e^2-1}$

und für die Parabel, wo $e = 1$, $f = \frac{1}{0} = \infty$.

Ich habe die Integralformel dieses §. folgendermaassen reducirt. Setzt man $\sqrt{b-Bv}=z\sqrt{a+Av}$, so wird

$$v=\frac{b-az^2}{B+Az^2},\quad dv=-\frac{2(Ab+Ba)zdz}{(B+Az^2)^2},$$

$$a+Av=\frac{Ab+Ba}{B+Az^2} \text{ und } c+Cv=\frac{(Bc+Cb)+(Ac-Ca)z^2}{B+Az^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die kurz durch I bezeichnete Integralformel, so wird

$$I=-2\int\frac{dz}{\sqrt{B+Az^2}.\sqrt{(Bc+Cb)+(Ac-Ca)z^2}}.$$

Nun setze man $\frac{A}{B}=p^2$ und $\frac{Ac-Ca}{Bc+Cb}=q^2$, wo also $Ac > Ca$ angenommen wird, alsdann ergibt sich

$$I=-\frac{2}{\sqrt{B}.\sqrt{Bc+Cb}}.\int\frac{dz}{\sqrt{1+p^2z^2}.\sqrt{1+q^2z^2}}.$$

Setzt man nun endlich

$$z=\frac{1}{p}\operatorname{tg}\varphi \text{ und } \frac{p^2-q^2}{p^2}=\frac{C(Ab+Ba)}{A(Bc+Cb)}=e^2,$$

so wird

$$I=-\frac{2}{\sqrt{A}.\sqrt{Bc+Cb}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{A}.\sqrt{Bc+Cb}}.\text{dig. }(e,\ \varphi).$$

Hiernach ist die Aufgabe auf die Bestimmung der, Digamma genannten, elliptischen Function zurückgeführt.

Zu §. 745. Setzt man in

$$2\varepsilon dt=\frac{dv\sqrt{B}}{v\sqrt{1-Bv}}$$

$\sqrt{1-Bv}=z$, so erhalten wir

$$\int\frac{2\varepsilon dt}{\sqrt{B}}=-2\int\frac{dz}{1-z^2}=C-\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

oder

$$\frac{2\varepsilon t}{\sqrt{B}}=C-\log\left(\frac{1+\sqrt{1-Bv}}{1-\sqrt{1-Bv}}\right)$$

und weil für $t=0$, $v=0$ wird

$$\frac{2\varepsilon t}{\sqrt{B}}=\log\left(\frac{1+1}{1-1}\right)-\log\left(\frac{1+\sqrt{1-Bv}}{1-\sqrt{1-Bv}}\right)=\infty.$$

Wird nach der letzten Annahme dieses §. $v=-u$ gesetzt, so erhalten wir

$$2\varepsilon dt = -\frac{Ddu}{\sqrt{Bu}\sqrt{(\cos\alpha^2 - Au)(\sin\alpha^2 - Cu)}}$$

und es muss $\sqrt{Bu}$ negativ sein, damit dt positiv werde.

Zu §. 748. Aus $k = k$ und $2 > 0$ folgt $k - 2 < k$ und $k - 1 < k + 1$, also auch

$$(k-1)^2 B < (k+1)^2 B,$$

um so mehr

$$(k-1)^2 B < (k+1)^2 B + 4k \text{ und } \frac{(k-1)\sqrt{B}}{\sqrt{4k + (k+1)^2 B}} < 1.$$

Zu §. 750. Da nach §. 740. $b^2 > c^2$, so wird $(a^2 - b^2)b^2 > (a^2 - b^2)c^2$, oder

$$b(a^2 - b^2 + c^2) > a^2c^2 \text{ und so } b^2 > \frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt ferner

$$b^2(k-1)^2 > \frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2}(k-1)^2,$$

oder auch, weil $(k-1)^2 = (k+1)^2 - 4k$

$$b^2(k+1)^2 > \frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2}(k-1)^2 + 4kb^2$$

wie auch

$$b^2(k+1)^2 \frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2} > \left[\frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2}(k-1)^2 + 4kb^2\right]\frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2} < \frac{b^2(k+1)^2 \frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2}}{4kb^2 + \frac{a^2c^2}{a^2 - b^2 + c^2}(k-1)^2}$$

$$< \frac{a^2b^2c^2(k+1)^2}{4k(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) + (k+1)^2 a^2c^2}$$

$$< b^2 \cdot \frac{B(k+1)^2}{4b + B(k+1)^2}$$

$$< b^2 . Bm$$

Zu §. 751. Allgemein haben wir

$$\sin AC . \cos ACO = \cos AO \sin CO - \sin AO . \cos CO \cos AOC$$

und

$$\cos AC = \cos AO \cos CO + \sin AO \sin CO \cos AOC.$$

Da aber $AC = 90^\circ$ ist, so wird

$$\cos ACO = \cos AO \sin CO + \frac{\cos CO^2 \cos AO}{\sin CO} = \frac{\cos AO}{\sin CO}$$

$$= \frac{2\sqrt{AT}}{\sqrt{B(1+T)^2 + 4T}},$$

woraus unmittelbar der Werth von $\sin ACO$ folgt, so wie man

ganz analog die für $\cos CAO$ und $\sin CAO$ angegebenen Werthe erhält. Der für $\cos bO$ gegebene Werth ergibt sich aus

$$\cos bO = \cos AO \cos Ab + \sin AO \sin Ab \cos OAb,$$

indem $Ab = 90^\circ$ und $\cos OAb = \sin OAC$ ist.

Ferner folgt aus

$$\cos AO = \cos Ab \cos bO + \sin Ab \sin bO \cos AbO,$$

weil $Ab = 90^\circ$,

$$\cos AbO = \frac{\cos AO}{\sin Ob} = \sqrt{\frac{A}{B+1}}.$$

Dass die lebendige Kraft constant ist, folgt schon aus der allgemeinen Auflösung, man kann es aber auch in diesem besondern Falle beweisen. Es ist nämlich dieselbe allgemein

$$= Mk^2\Omega^2 = M[a^2 \cos\alpha^2 + b^2 \cos\beta^2 + c^2 \cos\gamma^2]\,\Omega^2.$$

Hier ist nun $\alpha = AO$, $\beta = BO$, $\gamma = CO$,

$$\cos AO = \frac{2\sqrt{AT}}{\sqrt{B(1+T)^2 + 4T}}, \quad \cos BO = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta,$$

$$\cos CO = \frac{2\sqrt{CT}}{\sqrt{B(1+T)^2 + 4T}}, \quad \sin\theta^2 = \frac{B(T-1)^2}{(1+T)^2 + 4T},$$

$$\Omega^2 = \frac{B.\varepsilon^2}{B + \sin\theta^2} = \frac{\varepsilon^2[B(1+T)^2 + 4T]}{(1+B)(1+T)^2};$$

mithin

$$Mk^2\Omega^2 = M\varepsilon^2\left[\frac{4(Aa^2 + Cc^2)T}{(1+B)(1+T)^2} + \frac{Bb^2(T-1)^2}{(1+B)(1+T)^2}\right],$$

d. h. weil $$Aa^2 + Cc^2 = Bb^2,$$

$$Mk^2\Omega^2 = M\varepsilon^2 \frac{Bb^2}{B+1} \cdot \frac{4T + (T-1)^2}{(1+T)^2} = \frac{B\varepsilon^2}{B+1} Mb^2.$$

Zu §. 752. Für $t = 0$ wird $T = 1$ und $\operatorname{tg} EO = \operatorname{tg}\theta = 0$. So wie $t > 0$ wird, nimmt $T = e^{2\varepsilon t : \sqrt{1+B}}$ schnell an Grösse zu und weil

$$\operatorname{tg} EO = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{B+1}}\left(\sqrt{T} - \frac{1}{\sqrt{T}}\right),$$

also $\sqrt{T} - \frac{1}{\sqrt{T}}$ proportional ist, so wird diese Tangente im doppelten Maasse mit T oder $\sqrt{T}$ wachsen. Es wird aber erst dann $$\operatorname{tg} EO = \infty,$$ wann $T = \infty$ und $t = \infty$ ist.

Zu §. 755. Da

$$a\partial = \frac{4B^2Cg\cos\mathfrak{c}^2}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2]^2} = \frac{4BCg}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2]\left[1 + \frac{C\cos\mathfrak{b}^2}{B\cos\mathfrak{c}^2}\right]}$$

und

$$ab = \frac{4BCg}{\varepsilon^2[B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2]};$$

so ist nothwendig $a\partial < ab$.

Zu §§. 758. und 759. Da nach §. 740. $A - B + C = 1$ ist, so wird aus

$$\cos AP = \frac{\varepsilon}{\Omega}\sqrt{\cos\mathfrak{a}^2 - \frac{A\cos\mathfrak{c}^2}{C}} = \frac{\sqrt{C\cos\mathfrak{a}^2 - A\cos\mathfrak{c}^2}}{\sqrt{C - \cos\mathfrak{c}^2}}$$

$$\sin AP = \frac{\cos\mathfrak{c}\sqrt{C + A - 1}}{\sqrt{C - \cos\mathfrak{c}^2}} = \frac{\cos\mathfrak{c}\sqrt{B}}{\sqrt{C - \cos\mathfrak{c}^2}} = \frac{\sin\mathfrak{a}\sqrt{B}}{\sqrt{C - \sin\mathfrak{a}^2}}.$$

Ist nun $B = \infty$ und $C = \infty$, so wird

$$\sin AP = \sin\mathfrak{a} = \sin AE.$$

Aehnlich ist das letzte Raisonnement für §. 759., wenn $A = \infty$ und $B = \infty$.

Zu §. 761. Aus $\cos\beta = \sin\alpha\cos T = \sqrt{\frac{\mathfrak{B} - Bv}{1 + v}}$ und $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + Av}{1 + v}}$ folgt

$$v = \frac{\mathfrak{B} - (1 - \mathfrak{A})\cos T^2}{B + (1 - A)\cos T^2} \text{ und } \tfrac{1}{2}dv = \frac{B(1 - \mathfrak{A}) + \mathfrak{B}(1 - A)}{[B + (1 - A)\cos T^2]^2}\cos T\sin T dT.$$

Ferner erhalten wir, weil $A - B + C = 1$ und $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1$ ist,

$$\mathfrak{A} + Av = \frac{(\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A)\sin T^2 + (\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}A)\cos T^2}{B\sin T^2 + C\cos T^2},$$

$$\mathfrak{B} - Bv = \frac{\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B}{B\sin T^2 + C\cos T^2}\cos T^2,$$

$$\mathfrak{C} + Cv = \frac{\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B}{B\sin T^2 + C\cos T^2}\sin T^2$$

und

$$\tfrac{1}{2}dv = \frac{\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B}{[B\sin T^2 + C\cos T^2]^2}\cos T\sin T dT.$$

Da nun $\quad 2\varepsilon dt = \frac{Ddv}{\sqrt{(\mathfrak{A} + Av)(\mathfrak{B} - Bv)(\mathfrak{C} + Cv)}},$

so ergibt sich durch Substitution der aufgestellten Werthe

$$\varepsilon dt = \frac{DdT}{\sqrt{[B\sin T^2 + C\cos T^2][(\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A)\sin T^2 + (\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}A)\cos T^2]}}.$$

Die für $\Omega dt\sin\alpha$ und $\Omega dt\cos\alpha$ aufgeführten Werthe erhält man, indem man sie so schreibt: $\frac{\Omega}{\varepsilon}\varepsilon dt\sin\alpha$ und $\frac{\Omega}{\varepsilon}\varepsilon dt\cos\alpha$ und dann

$$\frac{\Omega}{\varepsilon}=\sqrt{\frac{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}{B+(1-A)\cos T^2}}=\sqrt{\frac{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2}{B\sin T^2+C\cos T^2}},$$

wie auch statt εdt, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die im Texte gefundenen Werthe setzt. Dabei wird, im Werthe des letztern, der Ausdruck

$$\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A+(\mathfrak{A}-A)\cos T^2=(\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\sin T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\cos T^2.$$

Zur Ergänzung zu §. 761. Aus $x=\Omega\cos\alpha$ folgt

$$dx=\cos\alpha d\Omega-\Omega\sin\alpha d\alpha.$$

Da aber nach §. 761.

$$\Omega=\varepsilon\sqrt{1+v} \text{ und } \cos\alpha=\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+Av}{1+v}},$$

so wird

$$d\Omega=\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{dv}{\sqrt{1+v}} \text{ und } -\sin\alpha d\alpha=\frac{(A-\mathfrak{A})dv}{2(1+v)\sqrt{(\mathfrak{A}+Av)(1+v)}};$$

mithin, wenn man diese Werthe substituirt und reducirt,

$$dx=\frac{\varepsilon Adv}{2\sqrt{\mathfrak{A}+Av}}.$$

Es ist aber

$$dv=\frac{2\varepsilon dt\sqrt{(\mathfrak{A}+Av)(\mathfrak{B}-Bv)(\mathfrak{C}+Cv)}}{\sqrt{ABC}},$$

also

$$dx=\frac{\varepsilon^2 dt\sqrt{A}.\sqrt{(\mathfrak{B}-Bv)(\mathfrak{C}+Cv)}}{\sqrt{BC}},$$

ferner ist

$$\cos\beta=\sqrt{\frac{\mathfrak{B}-Bv}{1+v}},\quad \cos\gamma=\sqrt{\frac{\mathfrak{C}+Cv}{1+v}} \text{ und } \sqrt{\frac{A}{BC}}=\frac{b^2-c^2}{a^2},$$

wo A, B, C noch die Bedeutung in §. 761. selbst haben; also

$$dx=\frac{\varepsilon^2 dt(1+v)\cos\beta\cos\gamma(b^2-c^2)}{a^2}$$

$$=\frac{b^2-c^2}{a^2}\Omega^2\cos\beta\cos\gamma dt=\frac{b^2-c^2}{a^2}yzdt.$$

Aehnlich erhält man die Werthe von dy und dz.

Sollen p, q, r constant, also $dp=0$, $dq=0$, $dr=0$ sein, so muss wegen

$$\frac{dx}{x}=\frac{Adp}{q-r-Ap},\quad \frac{dy}{y}=\frac{Bdq}{r-p-Bq},\quad \frac{dz}{z}=\frac{Cdr}{p-q-Cr},$$

auch $q-r-Ap=0$, $r-p-Bq=0$ und $p-q-Cr=0$ sein. Die Summe dieser drei Gleichungen ergibt

$$Ap+Bq+Cr=0$$

und wenn man diese zur letzten addirt

$$p(1+A)-q(1-B)=0 \text{ oder } p:q=1-B:1+A.$$

Ferner erhält man

$$p:r=1-B:1+AB,$$

also

$$p:q:r=1-B:1+A:1+AB$$

oder $p=n(1-B)$, $q=n(1+A)$ und $r=n(1+AB)$.

Substituirt man diese Werthe in die dritte Gleichung, so erhält man

$$A+B+C+ABC=0.$$

Aus der Gleichung

$$d\lambda.\sin l^2=-dt(y\cos m+z\cos n)$$

folgt mittelst der für $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, y und z gefundenen Werthe,

$$d\lambda[1-\frac{a^4}{n^2}(2Au+\mathfrak{A})]=-dt[\frac{b^2}{n}(2Bu+\mathfrak{B})+\frac{c^2}{n}(2Cu+\mathfrak{C})],$$

d. h. weil

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2=0,\ \text{also}\ 2Bb^2+2Cc^2=-2Aa^2,$$

und $n^2-\mathfrak{A}a^4=\mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4-\mathfrak{A}a^4=\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4$,

$$d\lambda=\frac{-ndt[\mathfrak{B}b^2+\mathfrak{C}c^2-2Aa^2u]}{\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4-2Aa^4u}.$$

Zu §. 778. Aus der Gleichung

$$dt=\frac{d\theta\cos\theta\sqrt{a^2+f^2\cos\theta^2}}{\sqrt{(\sin\delta-\sin\theta)[4fg\cos\theta^2-\varepsilon^2a^2(\sin\delta-\sin\theta)]}}$$

erhalten wir, für $\delta=90^\circ$

$$dt=\frac{d\theta.\cos\theta\sqrt{a^2+f^2\cos\theta^2}}{(1-\sin\theta)\sqrt{4fg(1+\sin\theta)-\varepsilon^2a^2}}.$$

Im Anfange ist aber $\theta=\delta$, mithin aus der ursprünglichen Gleichung $dt=\infty$,

also wird erst nach einer unendlich grossen Zeit $\sin\theta<\sin\delta=1$.

Für $\theta=\delta=90^\circ$ wird aber $\operatorname{tg}\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ und $\Omega=\frac{\varepsilon}{\cos\alpha}=\varepsilon$.

Zu §. 779. Würde nämlich $\theta>\delta$, also $\sin\theta>\sin\delta$, so wäre $\sin\delta-\sin\theta$ negativ, $4fg\cos\theta^2-\varepsilon^2a^2(\sin\delta-\sin\theta)$ positiv und daher dt imaginär.

Zu §. 781. Der grösste oder kleinste Werth von θ ergibt sich, wenn $d\theta=0$, also nach §. 777.
entweder $\sin\delta-\sin\theta=0$ oder $4fg\cos\theta^2-\varepsilon^2a^2(\sin\delta-\sin\theta)=0$ ist. Aus der ersten ergibt sich als grösster Werth

$$\theta=\delta,$$

aus der zweiten, zur Bestimmung des kleinsten Werthes von θ

$$\sin\theta=\frac{\varepsilon^2a^2-\sqrt{\varepsilon^4a^4-16\varepsilon^2a^2fg\sin\delta+64f^2g^2}}{8fg}.$$

Aus

$$d\theta = \frac{dt\sqrt{\sin\delta - \sin\theta}.\sqrt{4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta)}}{\cos\theta\sqrt{a^2 + f^2\cos\theta^2}}$$

folgt nämlich im ersten Falle

$$\frac{dd\theta}{d\theta} = -\tfrac{1}{2}\frac{\cos\theta\sqrt{4fg\cos\theta^2}}{\sqrt{\sin\delta - \sin\theta}} = -\infty,$$

im zweiten

$$\frac{dd\theta}{d\theta} = +\infty.$$

Zu §. 782. Aus der Gleichung

$$4fg\cos\theta^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin\theta) = 0$$

folgt für $\varepsilon = \infty$, $\sin\theta = \sin\delta$.

Ist hingegen ε nicht $= \infty$, sondern nur sehr gross, so wird

$$\sin\theta = \sin\delta - \frac{4fg\cos\theta^2}{\varepsilon^2 a^2},$$

und weil sehr nahe $\sin\theta = \sin\delta$, also auch $\cos\theta = \cos\delta$ ist,

$$\sin\theta = \sin\delta - \frac{4fg\cos\delta^2}{\varepsilon^2 a^2}.$$

Hieraus folgt

$$\sin\theta - \sin\delta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\theta + \delta)\sin\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) = -\frac{4fg\cos\delta^2}{\varepsilon^2 a^2},$$

und da sehr nahe

$$\cos\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) = \cos\delta,\ 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) = \theta - \delta,$$

$$\theta = \delta - \frac{4fg\cos\delta}{\varepsilon^2 a^2}.$$

Diese Werthe von $\sin\theta$ und θ weichen im zweiten Gliede von den im Texte befindlichen ab.

Zu §. 783. So lange

$$\varepsilon > \frac{2\cos i\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta - \sin i}}$$

ist, wird

$$4fg\cos i^2 - \varepsilon^2 a^2(\sin\delta - \sin i) < 0 \text{ und nicht } = 0,$$

also auch θ kein minimum (§. 781.).

Zu §. 790. Es ist

$\cos CO = \sin OA\cos OAC = \sin OA\sin BAO$, weil $AC = 90°$ und $BAO = 90° - OAC$,

$\cos BO = \sin AO\cos BAO$, weil $AB = 90°$,

$\cos CZ = \sin AZ\cos CAZ = \sin AZ\sin BAZ$, weil $AC = 90°$ und $BAZ = 90° - CAZ$,

$\cos BZ = \sin AZ\cos BAZ$, weil $AB = 90°$.

Wir haben daher

$$\sin BAO = \frac{\cos CO}{\sin AO}, \quad \cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin AO},$$
$$\sin BAZ = \frac{\cos CZ}{\sin AZ}, \quad \cos BAZ = \frac{\cos BZ}{\sin AZ}$$
und $$\sin OAZ = \sin(BAO - BAZ).$$

Zu §. 814. (Figur 109.) In Bezug auf Umdrehung um die Axe IA wirkt die Kraft Zr im Sinne BC am Hebelsarme y, die Kraft Zq im entgegengesetzten Sinne am Hebelsarme z und die Kraft Zp gar nicht. In Bezug auf die Axe IB die Kraft Zp im Sinne CA am Hebelsarme z, die Kraft Zr im entgegengesetzten Sinne am Hebelsarme x und die Kraft Zq gar nicht. In Bezug auf die Axe IC die Kraft Zq im Sinne AB am Hebelsarme x, die Kraft Zp im entgegengesetzten Sinne am Hebelsarme y und die Kraft Zr gar nicht. Hieraus ergeben sich die drei im Texte angegebenen Momente dieser Kräfte in Bezug auf die drei Axen.

Zu §. 817. Man kann die Kraft I. längs IA auch folgendermaassen ausdrücken:

$$\frac{Me^2 \cos\zeta}{s^2}\Big\{1 + \frac{3}{2s^2}[a^2(1-5\cos\zeta^2) + b^2(1-5\cos\eta^2) + c^2(1-5\cos\theta^2)]\Big\}$$
$$+ \frac{3Ma^2e^2\cos\zeta}{s^4} = \frac{Me^2\cos\zeta}{s^2}[1 + \frac{3}{2s^2}F] + \frac{3Ma^2e^2\cos\zeta}{s^4},$$

wo $$F = a^2(1-5\cos\zeta^2) + b^2(1-5\cos\eta^2) + c^2(1-5\cos\theta^2).$$

Analog wird die Kraft II.

$$\text{längs } IB = \frac{Me^2\cos\eta}{s^2}(1 + \frac{3}{2s^2}F) + \frac{3Mb^2e^2\cos\eta}{s^4}$$

und die Kraft III.

$$\text{längs } IC = \frac{Me^2\cos\theta}{s^2}(1 + \frac{3}{2s^2}F) + \frac{3Mc^2e^2\cos\theta}{s^4}.$$

Um das Quadrat der mittlern, längs IF wirkenden Kraft zu erhalten, muss man die Quadrate dieser drei Seitenkräfte addiren und wenn man zu diesem Ende von dem letzten Gliede in jeder Seitenkraft zunächst abstrahirt, so ergibt sich, weil $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1$ ist, die mittlere Kraft

$$= \frac{Me^2}{s^2}(1 + \frac{3}{2s^2}F) = \frac{Me^2}{s^2} + \frac{3Me^2}{2s^4}[a^2(1-5\cos\zeta^2) + b^2(1-5\cos\eta^2)$$
$$+ c^2(1-5\cos\theta^2)].$$

Sind die drei Hauptmomente der Trägheit einander gleich, ist also $$a^2 = b^2 = c^2,$$
so nehmen offenbar die drei Seitenkräfte folgende Werthe an:

I. $=\frac{Me^2\cos\zeta}{s^2}$, II. $=\frac{Me^2\cos\eta}{s^2}$ und III. $=\frac{Me^2\cos\theta}{s^2}$

und es wird in diesem Falle die mittlere, längs IF antreibende Kraft
$$=\frac{Me^2}{s^2}.$$

Zu §. 825. 1. Wäre C negativ und $> n$, so würde
$$\sqrt{C+n\cos 2\zeta}=\sqrt{-(C-n\cos 2\zeta)}$$
imaginär werden. Ferner wird auch, weil allgemein $\cos 2\zeta < 1$ ist,
$$\sqrt{n(-1+\cos 2\zeta)}=\sqrt{-n(1-\cos 2\zeta)}$$
imaginär, was nur dann nicht der Fall ist, wenn $\zeta=0$ und $\cos 2\zeta=1$.

Zu §. 825. 2. Wäre für $C=0$, $\zeta > \pm 45^\circ$, so würde $\cos 2\zeta$ negativ und daher $\sqrt{n\cos 2\zeta}$ imaginär.

Zu §. 825. 4. Dass ζ alle Werthe annehmen kann, ersieht man nach algebraischer Weise aus der Gleichung
$$t\sqrt{n}=\frac{\zeta}{m}-\frac{\sin 2\zeta}{4m^3},$$
weil dieselbe in Bezug auf ζ von einem unendlich hohen Grade ist.

Zu §. 827. Aus $t=0$ und zugleich $\zeta=0$, wie auch aus der gleichzeitigen Gleichung $\Omega=\delta$ folgt nach §. 824. und §. 825. 1,
$$C+N\cos 2\zeta=C+N=0,\text{ also } N=-C$$
und
$$\Omega=\delta-\sqrt{C+N\cos 2\zeta}=\delta-\sqrt{C(-1+\cos 2\zeta)},$$
mithin stets $\zeta=0$.

Zu §. 834. Setzt man $\zeta=m\sin At+m'\sin 2At$, so wird, vermöge der Gleichung
$$\frac{dd\zeta}{dt^2}+A^2\alpha\sin At+2n\zeta(1+\beta\cos At)=0$$
$$m=\frac{A^2\alpha}{A^2-2n}\text{ und } m'=\frac{nm\beta}{4A^2-2n}=\frac{n\alpha\beta}{(A^2-2n)\left(4-\frac{2n}{A^2}\right)};$$
also in so fern $\frac{2n}{A^2}$ gegen 4 vernachlässigt werden kann,
$$\zeta=\frac{A^2\alpha}{A^2-2n}\sin At+\frac{n\alpha\beta}{4(A^2-2n)}\sin 2At.$$

Zu §. 835. Aus $\zeta=m\sin(At+\mathfrak{A})+m'\sin(A't+\mathfrak{A}')$
$$XF=C+\delta t+\alpha\sin(At+\mathfrak{A})+\alpha'\sin(A't+\mathfrak{A}')$$
und
$$\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}[1+\beta\cos(At+\mathfrak{A})+\beta'\cos(A't+\mathfrak{A}')]$$
folgt
$$\lambda=C+\delta t+(\alpha-m)\sin(At+\mathfrak{A})+(\alpha'-m')\sin(A't+\mathfrak{A}')$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{dd\lambda}{dt^2}=-A^2(\alpha-m)\sin(At+\mathfrak{A})-A'^2(\alpha'-m')\sin(A't+\mathfrak{A}')$$
$$=n\sin 2\zeta[1+\beta\cos(At+\mathfrak{A})+\beta'\cos(A't+\mathfrak{A}')]$$
$$=2nm\sin(At+\mathfrak{A})+2nm'\sin(A't+\mathfrak{A}');$$

also

$$m=\frac{A^2\alpha}{A^2-2n},\ m'=\frac{A'^2\alpha'}{A'^2-2n},\ \text{etc.}$$

Zu §. 836. Aus $\zeta=\frac{A^2\alpha}{A^2-2n}\sin At$ folgt, wenn $n=0$ ist, $\zeta=\alpha\sin At=XF-\delta t$; wenn n positiv ist, $\zeta>\alpha\sin At$ und wenn n negativ, $\zeta<\alpha\sin At$.

Zu §. 839. (Figur 112.) Aus $\operatorname{tg}BAO=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$ folgt

$$\frac{d.BAO}{\cos BAO^2}=\frac{-d\gamma\cos\beta\sin\gamma+d\beta\cos\gamma\sin\beta}{\cos\beta^2},$$

also weil

$$\frac{\cos BAO^2}{\cos\beta^2}=\frac{1}{\cos\beta^2+\cos\gamma^2}=\frac{1}{1-\cos\alpha^2}=\frac{1}{\sin\alpha^2}$$

und $d.BAO=-OAo$

$$OAo=\frac{d\gamma\cos\beta\sin\gamma-d\beta\cos\gamma\sin\beta}{\sin\alpha^2}.$$

Es ist allgemein

$$\sin Oo\sin OoA=\sin OA\sin OAo$$

und $\sin Oo\cos OoA=\cos OA\sin Ao-\sin OA\cos Ao\cos OAo$, daher hier, wo $\sin Oo=Oo$, $OA=\alpha$, $\sin OAo=OAo$, $\cos OAo=1$ und $AO=\alpha+d\alpha$ ist,

$$Oo\sin OoA=\sin\alpha\sin OAo=\frac{d\gamma\cos\beta\sin\gamma-d\beta\cos\gamma\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$Oo\cos OoA=\sin(Ao-OA)=d\alpha$$

und so

$$\operatorname{tg}OoA=\frac{d\gamma\cos\beta\sin\gamma-d\beta\cos\gamma\sin\beta}{\sin\alpha d\alpha}.$$

Aus $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$ folgt aber

$$\sin\alpha d\alpha=\frac{-d\beta\sin\beta\cos\beta-d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\alpha},$$

mithin wird

$$\operatorname{tg}OoA=\frac{d\gamma\cos\beta\sin\gamma-d\beta\cos\gamma\sin\beta}{-d\beta\sin\beta\cos\beta-d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}\cos\alpha$$
$$=\frac{d\beta\cos\gamma-d\gamma\cos\beta}{d\beta\cos\beta+d\gamma\cos\gamma},$$

weil $\sin\beta=\sin\gamma=1$ und $\cos\alpha=1$.

Ferner wird unmittelbar

$$Oo^2 = \frac{\sin\alpha^2 d\alpha^2 + (d\gamma\cos\beta\sin\gamma - d\beta\cos\gamma\sin\beta)^2}{\sin\alpha^2}$$

oder nach einiger Reduction,

$$Oo^2 = \sin\beta\sin\gamma\frac{(d\beta^2 + d\gamma^2)\sin\beta\sin\gamma + 2d\beta d\gamma\sin\alpha}{\cos\alpha^2}$$

$$= d\beta^2 + d\gamma^2,$$

weil $\sin\alpha = 0$.

Zu §. 843. (Fig. 112.) Es ist $OD = 90^0 - \beta$ und $OE = 90^0 - \gamma$, beide sind aber unendlich klein, ferner $OAD = 90^0 - \varrho$, weil $BAC = 90^0$ und da nun $AO = \alpha$ ist; so wird

$\sin OD = \sin AO \sin OAD$ und $\sin OE = \sin AO \sin OAE$,

oder $90^0 - \beta = \alpha\cos\varrho$ und $90^0 - \gamma = \alpha\sin\varrho$.

Zu §. 844. Schreibt man die Gleichungen 4) und 5) kurz folgendermaassen:

4) $dx - \mu y d\varphi = \nu\sin 2\varphi d\varphi$

5) $dy + \mu x d\varphi = \pi d\varphi + \sigma\cos 2\varphi d\varphi$,

und eliminirt man, indem man die erstere differentiirt, dy, so ergibt sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{ddx}{d\varphi^2} + \mu^2 x + (2\nu - \mu\sigma)\cos 2\varphi - \mu\pi = 0,$$

welche sich nach bekannter Weise leicht integriren lässt.

Man sieht übrigens leicht ein, dass x den $\cos 2\varphi$ und y den $\sin 2\varphi$ enthalten muss, und wenn man wie im Texte

$$x = E + F\cos 2\varphi + u \text{ und } y = G\sin 2\varphi + v$$

annimmt, so erhält man, wenn man diese Werthe und ihre Differentiale in

4) $dx - \frac{\varepsilon y d\varphi}{\delta} = -\frac{N d\varphi}{\delta}\sin n \sin 2\varphi$

5) $dy + \frac{\varepsilon x d\varphi}{\delta} = -\frac{N d\varphi}{\delta}\sin n\cos n - \frac{N d\varphi}{\delta}\sin n\cos n\cos 2\varphi$

substituirt:

$$E = -\frac{N\sin n\cos n}{\varepsilon},\ 2F + \frac{\varepsilon G}{\delta} = \frac{N}{\delta}\sin n,\ 2G + \frac{\varepsilon F}{\delta} = -\frac{N\sin n\cos n}{\delta},$$

$$du - \frac{\varepsilon v d\varphi}{\delta} = 0 \text{ und } dv + \frac{\varepsilon u d\varphi}{\delta} = 0.$$

Die drei ersten Gleichungen ergeben die Werthe von E, F und G, welche im Texte stehen; die zwei letzten

$$udu = -vdv \text{ oder } u^2 + v^2 = \text{Constans}.$$

Setzt man demnach $u = h\sin m(\varphi + \zeta)$ und $v = h\cos m(\varphi + \zeta)$, wo h eine Constante bezeichnet, so ergibt sich, wenn man ζ als constant betrachtet,

$$mh\cos m(\varphi+\zeta)-\frac{\varepsilon}{\delta}h\cos m(\varphi+\zeta)=0 \text{ oder } m=\frac{\varepsilon}{\delta}$$

und so
$$u=h\sin\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi+\zeta) \text{ und } v=h\cos\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi+\zeta).$$

Hier bezeichnen h und ζ die, den integrirten zwei Gleichungen entsprechenden, zwei Constanten.

Zu §. 847. Da $\varphi=\lambda-\delta t=m-\delta t$ ist, so wird $\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi+\zeta)$ $=\frac{\varepsilon}{\delta}m-\varepsilon t+\frac{\varepsilon}{\delta}\zeta$, also, weil ε, δ, m und ζ constant sind

$$\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi+\zeta)=C-\varepsilon t.$$

Ferner ist $ZAB=q=C+\varepsilon t$, mithin

$$\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi+\zeta)=2C-q=-(q-C')=-(\psi+\zeta)$$

und so

$$\sin\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi+\zeta)=-\sin(\psi+\zeta) \text{ und } \cos\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi+\zeta)=\cos(\psi+\zeta).$$

Hier ist wieder ζ constant und $q=ZAB=\psi$ gesetzt.

Zu §. 856. (Figur 116.) Um die Momente der Kräfte auf kürzere Weise herzuleiten, seien IA, IB und IC die drei Axen, auf der Verlängerung der ersten im Abstande $IF=f$ von I wirke die Kraft $F\Pi=\Pi$ in vertikaler Richtung nach oben, so dass $F\Pi \# IZ$ (Fig. 115.) ist. Zieht man nun $FB' \# IB$ und $FC' \# IC$, so wird $\angle \Pi FA=l$, wie im Text, $\Pi FB'=ZIB$ (Figur 116.) $=ZB=m$ und $\Pi FC'=ZIC=ZC=n$. Nun zerlegen wir die Kraft $F\Pi=\Pi$ in drei, längs FA, FB' und FC' wirkende Seitenkräfte, und es wird die erste $=\Pi\cos l$, die zweite $=\Pi\cos m$ und die dritte $=\Pi\cos n$. Die erste bildet kein Moment in Bezug auf irgend eine der Axen, die zweite in Bezug auf die Axe IC das Moment $=\Pi f\cos m$ im Sinne BA und die dritte in Bezug auf die Axe IB das Moment $=\Pi f\cos n$ im Sinne CA, oder das Moment $=-\Pi f\cos n$ im entgegengesetzten Sinne AC.

Zu §. 863. Ich erhalte das letzte Resultat dieses §. von dem im Texte abweichend. Es ist nämlich nach §. 862.

$$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}=\frac{A(a^2-c^2)dt}{c^2}-\frac{2\Pi fgdt\left(B-\frac{Aa^2p}{c^2}\right)(c^2+f^2-f^2p^2)}{Mc^2\left[Cc^2-4fgp+f^2\left(B-\frac{Aa^2p}{c^2}\right)^2\right]},$$

also weil hier $A=\varepsilon$, $B=\frac{\varepsilon a^2 p}{c^2}$ und $C=\frac{4fgp}{c^2}$ ist,

$$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}=\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,dt}{c^2}-\frac{2\Pi}{M}\cdot\frac{\varepsilon a^2 fg\,dt(c^2+f^2-f^2p^2)}{4c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)}.$$

Da aber

$$\frac{\Pi}{M}=\frac{2c^4g+\varepsilon^2a^4f(\mathfrak{p}-p)}{2c^2g(c^2+f^2-f^2p^2)}-\frac{fp(\mathfrak{p}-p)[4c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)]}{2c^2g(c^2+f^2-f^2p^2)^2},$$

$$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}=\frac{\varepsilon(a^2-c^2)\,dt}{c^2}-\frac{\varepsilon a^2dt[2c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)]}{c^2[4c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2(\mathfrak{p}-p)]}$$
$$+\frac{\varepsilon a^2f^2p\,dt(\mathfrak{p}-p)}{c^2(c^2+f^2-f^2p^2)}.$$

Zu §. 864. Wird $ZA=l=90^0$, so hat man $p=\cos l=0$ und es geht die Gleichung zwischen t und p über in

$$dt=\frac{cdp\sqrt{c^2+f^2}}{\sqrt{\mathfrak{p}(4c^2fg-\varepsilon^2a^4\mathfrak{p})}},$$

welche nur dann reell ist, wenn $4c^2fg>\varepsilon^2a^4\mathfrak{p}$.

Zu §. 865. Es kann nie $p>\mathfrak{p}$ werden, weil sonst $\mathfrak{p}-p$ negativ und die Gleichung zwischen t und p imaginär werden würde. Der Grenzwerth von p ergibt sich nach jener Gleichung aus

$$4c^2fg(1-p^2)-\varepsilon^2a^4(\mathfrak{p}-p)=0,$$

wonach

$$p=\frac{\varepsilon^2a^4-\sqrt{\varepsilon^4a^8-16\varepsilon^2a^4c^2fg\mathfrak{p}+64c^4f^2g^2}}{8c^2fg}.$$

Setzt man nun

$$64c^4f^2g^2=64c^4f^2g^2[\mathfrak{p}^2+(1-\mathfrak{p}^2)],$$

so wird

$$p=\frac{\varepsilon^2a^4-\sqrt{(\varepsilon^2a^4-8c^2fg\mathfrak{p})^2+64c^4f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}}{8c^2fg}$$

$$=\frac{\varepsilon^2a^4-\varepsilon^2a^4+8c^2fg\mathfrak{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{64c^4f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2a^4-8c^2fg\mathfrak{p}}\text{ etc.}}{8c^2fg}.$$

Die im Zähler nicht angegebenen Glieder gehen nach steigenden Potenzen von $1-\mathfrak{p}^2$ fort und diese Differenz ist stets <1, weil $\mathfrak{p}=\cos\mathfrak{l}<1$ ist. Je kleiner $\mathfrak{l}$, je grösser also $\mathfrak{p}$ ist, desto kleiner wird $1-\mathfrak{p}^2$ und desto näher werden die hier dargestellten Glieder den Werth der Wurzel darstellen. Derselbe wird offenbar

$$p=\mathfrak{p}-\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2a^4-8c^2fg\mathfrak{p}}.$$

Zu §. 866. Es darf die Linie Fk (Fig. 114.) nicht in den Horizont fallen, weil sonst der Kreisel sich nicht mehr drehen könnte. Da nun der Sinus des Neigungswinkels der Axe FA gegen den Horizont allgemein durch p bezeichnet wird, aber $\sin AFk=k$

gesetzt ist, so muss $p > k$ sein. Wir haben daher nach §. 865.

$$k < \frac{\varepsilon^2 a^4 - \sqrt{\varepsilon^4 a^8 - 16\varepsilon^2 a^4 c^2 fg\mathfrak{p} + 64 c^4 f^2 g^2}}{8c^2 fg}$$

und hieraus

$$\varepsilon^2 > \frac{4c^2 fg(1-k^2)}{a^4(\mathfrak{p}-k)}.$$

Zu §. 869. Da u äusserst klein ist, so kann man $\mathfrak{p}p^2 = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}-u)^2 = \mathfrak{p}^3$ setzen, indem man die Glieder $2\mathfrak{p}^2 u$ und $\mathfrak{p}u^2$ vernachlässigt.

Für den Anfang ist $t=0$, $p=\mathfrak{p}$, also $u=0$ und daher $C=0$. Setzt man ferner arc. sin. vers. $\left(\frac{2nu}{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}\right)=v$, so wird $\frac{2nu}{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3} = \text{sin. vers.}\, v = 1-\cos v$ und

$$u = \frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{2n}(1-\cos v);$$

also offenbar u am grössten, wenn $v=\pi$ und $\cos v = -1$ ist und zwar wird dieser grösste Werth

$$= \frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}.$$

Es wird nach §. 863.

$$d\lambda = -\frac{\varepsilon a^2 dt(\mathfrak{p}-p)}{c^2(1-p^2)} = -\frac{2\sqrt{nfg}}{c(1-\mathfrak{p}^2)\sqrt{\mathfrak{p}}}\, udt$$

und

$$\lambda = -\frac{\sqrt{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2}}{c(1-\mathfrak{p}^2)}\int\frac{udu}{\sqrt{\frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}u-u^2}}.$$

Nach der allgemeinen Integralformel

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{\gamma} - \frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

erhalten wir nun

$$\lambda = -\frac{\sqrt{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2}}{c(1-\mathfrak{p}^2)}\left\{-\sqrt{\frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}u-u^2} + \frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{2n}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}{n}u-u^2}}\right\},$$

wo das letzte Integral = arc. sin. vers. $\left(\frac{2nu}{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^3}\right)$ ist.

Die mittlere Winkelbewegung der Axe A um den Scheitel Z ergibt sich aus dem Quotienten

$$\frac{\lambda}{t}.$$

Hat der Kreisel sich am stärksten gegen den Horizont geneigt, so ist

$$p=\mathfrak{p}-\frac{\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}^2)}{n}=\mathfrak{p}-\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4},$$

also in diesem Falle

$$u=\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4}=\mathfrak{p}-p.$$

Nach §. 863. wird daher jetzt

$$\Omega^2=\varepsilon^2+f.\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4}.\frac{4c^4g+4c^2f^2g(1-\mathfrak{p}^2)}{c^4(c^2+f^2-f^2p^2)}=\varepsilon^2+\frac{16f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4},$$

mithin

$$\Omega=\varepsilon+\frac{8f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^3 a^4}$$

und weil ε sehr gross ist,

$$\cos\alpha=1-\tfrac{1}{2}\alpha^2=\frac{\varepsilon}{\Omega}=1-\frac{8f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\Omega\varepsilon^3a^4}=1-\frac{8f^2g^2(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^4 a^4},$$

also

$$\alpha=\frac{4fg\sqrt{1-\mathfrak{p}^2}}{\varepsilon^2 a^2}.$$

Für $p=\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}-p=0$ wird ferner nach §. 863.

$$\frac{\Pi}{M}=\frac{2c^4g}{2c^2g(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}=\frac{c^2}{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2},$$

hingegen für

$$\mathfrak{p}-p=\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4}$$

$$\frac{\Pi}{M}=\frac{2c^4g+\varepsilon^2a^4f.\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2a^4}}{2c^2g(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}-\frac{fp.\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2a^4}.\left[4c^4fg+\varepsilon^2a^4f^2\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4}\right]}{2c^2g\,[c^2+f^2-f^2p^2]^2}$$

$$=\frac{c^2+2f^2(1-\mathfrak{p}^2)}{c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2}-\frac{8c^2f^3g\mathfrak{p}\,(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2a^4(c^2+f^2-f^2\mathfrak{p}^2)}.$$

Zu §. 870. Aus $p=\mathfrak{p}-\frac{4c^2fg(1-\mathfrak{p}^2)}{\varepsilon^2 a^4}$ oder

$\cos l=\cos\mathfrak{l}-\frac{4c^2fg\sin\mathfrak{l}^2}{\varepsilon^2a^4}$ folgt

$$\cos l-\cos\mathfrak{l}=2\sin\tfrac{1}{2}(l+\mathfrak{l})\sin\tfrac{1}{2}(l-\mathfrak{l})=\frac{4c^2fg\sin\mathfrak{l}^2}{\varepsilon^2a^4}.$$

Da aber $\mathfrak{l}$ wenig von l verschieden ist, kann $\sin\tfrac{1}{2}(l+\mathfrak{l})=\sin l$ und $\sin\tfrac{1}{2}(l-\mathfrak{l})=\tfrac{1}{2}(l-\mathfrak{l})$ gesetzt werden, und es folgt daher

$$l=\mathfrak{l}+\frac{4c^2fg\sin\mathfrak{l}}{\varepsilon^2a^4}.$$

Zu §. 875. Ein Niederfallen des Kreisels ist möglich, so lange

$$4c^2fg + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 > \varepsilon^2a^4\cos\alpha^2$$

ist. Damit es unmöglich werde, muss also

$$\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 > 4c^2fg + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2,$$

um so mehr

$$\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 > \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 \text{ oder } a^4\cos\alpha^2 > c^4\sin\alpha^2$$

sein. Diese letztere Bedingung ist nothwendig, indem aus der erstern

$$\varepsilon^2 > \frac{4c^2fg}{a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2}$$

folgt, was stets der Fall sein würde, wenn etwa $a^4\cos\alpha^2 < c^4\sin\alpha^2$ oder der Ausdruck auf der rechten Seite negativ wäre.

Zu §. 877. Damit dt nicht imaginär werde, muss $4fg(1-p^2) + 2\varepsilon^2c^2p\sin\alpha^2$ auch positiv bleiben, wenn p negativ wird, und wir finden daher den negativen Grenzwerth von p aus der Gleichung

$$4fg(1-p^2) + 2\varepsilon^2c^2p\sin\alpha^2 = 0,$$

wonach

$$p = \frac{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 - \sqrt{\varepsilon^4c^4\sin\alpha^4 + 16f^2g^2}}{4fg}.$$

Zu §. 878. Setzt man in der Gleichung des §. 876.

$$4c^2fgp^2 = \varepsilon^2p(a^4\cos\alpha^2 + c^4\sin\alpha^2) - \varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 + 4c^2fg$$

$p = 1-\omega$ und, weil ω sehr klein sein soll, $p^2 = 1-2\omega$, so ergibt sich

$$\omega = \frac{2\varepsilon^2c^4\sin\alpha^2}{\varepsilon^2a^4\cos\alpha^2 + \varepsilon^2c^4\sin\alpha^2 - 8c^2fg}.$$

Es muss also, damit ω sehr klein werde, α sehr klein, $\sin\alpha$ sehr nahe $=0$, $\cos\alpha$ sehr nahe $=1$, ferner $\varepsilon^2a^4 - 8c^2fg$ positiv und möglichst gross, mithin

$$\varepsilon^2 > \frac{8c^2fg}{a^4} \text{ oder } \varepsilon > \frac{2c\sqrt{2fg}}{a^2}$$

sein.

Zu §. 879. Aus $p=1-u$ folgt, weil u sehr klein ist, $1-p=u$, $1+p=2-u$, $1-p^2=2u$ und so

$$dt = \frac{cdu}{\sqrt{u[8fgu - 8nfgu + 2\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 - \varepsilon^2c^2u\sin\alpha^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 + 8fg(n-1)}} \cdot \frac{du}{\sqrt{\frac{2\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2}{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 + 8(n-1)fg}u - u^2}},$$

mithin

$$t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 + 8fg(n-1)}} \text{ arc.sin.vers. } \left\{\frac{u[\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2 + 8(n-1)fg]}{\varepsilon^2c^2\sin\alpha^2}\right\}.$$

Der grösste Werth von $u = \frac{2\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2}{\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 + 8(n-1)fg}$ folgt aus der Gleichung

$$8fgu - 8nfgu + 2\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 - \varepsilon^2 c^2 u \sin\alpha^2 = 0.$$

Für diesen Werth von u wird

$$t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 + 8fg(n-1)}} \text{ arc. sin. vers. } 2 = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 + 8(n-1)fg}}$$

$$= \frac{\pi c^2}{\sqrt{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 + \varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2 - 8c^2 fg}},$$

weil

$$8nfg = \frac{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2}{c^2}.$$

Es ist demnach um diese Zeit

$$u = 1 - p = 1 - \cos l = \text{sin. vers. } l = \frac{2\varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2}{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 + \varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2 - 8c^2 fg}$$

und

$$l = \text{arc. sin. vers. } \left\{\frac{2\varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2}{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 + \varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2 - 8c^2 fg}\right\}.$$

Aus $\cos l = 1 - \frac{1}{2} l^2 = 1 - u$ folgt

$$l = \sqrt{2u} = \frac{2\varepsilon c^2 \sin\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 + \varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2 - 8c^2 fg}}.$$

Aus $d\lambda = -\frac{\varepsilon a^2 dt \cos\alpha}{c^2(1+p)}$ folgt für $p = 1$,

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{\varepsilon a^2 t \cos\alpha}{2c^2}.$$

Für $t = 0$ ist $\lambda = 90^0 = \frac{\pi}{2}$, also für

$$t = \frac{\pi c^2}{\sqrt{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 + \varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2 - 8c^2 fg}}$$

$$\lambda = XZA = 90^0 - \frac{\pi \varepsilon a^2 \cos\alpha}{2\sqrt{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2 + \varepsilon^2 c^4 \sin\alpha^2 - 8c^2 fg}}.$$

Zu §. 881. Da im Anfange, d. h. für $t = 0$, $u = 0$ ist, so haben wir nach §. 879.

$$\frac{t\sqrt{\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 + 8fgn - 8fg}}{c} = \text{arc. sin. vers. } \left\{\frac{u[\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 + 8fgn - 8fg]}{\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2}\right\},$$

$$1 - \cos\left[\frac{t\sqrt{\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 + \frac{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2}{c^2} - 8fg}}{c}\right]$$

$$= \frac{u\left[\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2 + \frac{\varepsilon^2 a^4 \cos\alpha^2}{c^2} - 8fg\right]}{\varepsilon^2 c^2 \sin\alpha^2},$$

d. h. weil $\cos\alpha$ sehr nahe $=1$ und $\sin\alpha$ sehr nahe $=0$ ist,

$$1-\frac{u[\varepsilon^2a^4-8c^2fg]}{\varepsilon^2c^4\sin\alpha^2}=\cos\frac{t\sqrt{\varepsilon^2a^4-8c^2fg}}{c^2}$$

und

$$l=\sqrt{2u}=\sqrt{\frac{2\varepsilon^2c^4\sin\alpha^2}{\varepsilon^2a^4-8c^2fg}\left(1+\cos\frac{t\sqrt{\varepsilon^2a^4-8c^2fg}}{c^2}\right)}$$

$$=\frac{2\varepsilon c^2\sin\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2a^4-8c^2fg}}\sin\frac{t\sqrt{\varepsilon^2a^4-8c^2fg}}{2c^2}.$$

Zu §. 887. (Figur 120). Liegt der Mittelpunkt der Trägheit in I, ist also $f>0$ oder positiv, so wird die abwärts gerichtete Geschwindigkeit $\frac{f\sin\varrho d\varrho}{dt}$ positiv; liegt er dagegen in I', ist also $f<0$ oder negativ, so wird diese Geschwindigkeit negativ oder aufwärts gerichtet sein. Im erstern Falle wird die Linie FGI niederfallen, im zweiten wieder aufgerichtet.

Zu §. 890. (Figur 121. und 122.) Es sei A' der Punkt auf der Kugelfläche, welcher so liegt, dass $A'G=90^0$ und $\angle A'GZ=90^0$ ist, so wird $\sin AG\cos AGA'=\cos AA'$. Ferner ist $AGA'=A'GZ-AGZ=90^0-AGZ$, also

$$\cos AGA'=\sin AGZ$$

und

$$\cos AA'=\sin AG\sin AGZ.$$

Zerlegt man nun die Kraft $GV=\Pi\sin\varrho$ in drei Seitenkräfte, deren eine um den Winkel AIA' von GV abweicht, so ist dieselbe $=\Pi\sin\varrho\cos AA'$ und ihr Moment in Bezug auf die Axe IA

$$=\Pi f\sin\varrho\cos AA'=\Pi f\sin\varrho\sin AG\sin AGZ=\Pi f\sin\varrho\sin AG\sin AGV.$$

Zu §. 892. Zur Erläuterung dienen die Bemerkungen, dass

$$\sin DAB=\sin BAG=\cos GAC=-\cos DAC,$$

$$\sin ZDB=\sin(ZDA-BDA)=\sin\varphi\cos BDA-\cos\varphi\sin BDA,$$

$$\cos ADC=-\frac{\cos\zeta\cos\theta}{\sin\zeta\sin\theta},$$

$$\sin ADC=\frac{\sin CAD}{\sin\theta}=-\frac{\cos BAD}{\sin\theta}=-\frac{\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta},$$

$$\sin ZDC=\sin(ZDA+ADC)=-\frac{\sin\varphi\cos\zeta\cos\theta}{\sin\zeta\sin\theta}-\frac{\cos\varphi\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}$$

ist.

Zu §. 893. Es wird nämlich alsdann

$$\sin\varrho\sin ZAB=\sin ZH=\sin(ZC-90^0)=-\cos ZC$$

und

$$\sin\varrho\sin ZAC=\sin\varrho\sin(ZAB+90^0)=\sin\varrho\cos ZAB=\cos ZB.$$

Zu §. 899. Es muss $p > \mathfrak{p}$ sein, weil sonst $qz - ry$ und dt imaginär werden würden.

Weil $AB = 90^0$ ist, wird $\cos m = \sin l \cos ZAB$ oder

$$\cos ZAB = \frac{q}{\sqrt{1 - \cos l^2}} = \frac{q}{\sqrt{1 - p^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}}.$$

Zu §. 907. Aus den Gleichungen

$$\text{I.}\quad K = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} - \mathfrak{a}\cos\zeta^2 - \mathfrak{b}\cos\eta^2 - \mathfrak{c}\cos\theta^2$$
$$\text{II.}\quad L = \mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\zeta^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{c}\cos\eta^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos\theta^2$$
$$\text{III.}\quad 1 = \cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2$$

bilde man $\text{I.} \times \mathfrak{a} - \text{II.} - \text{III.} \times \mathfrak{a}^2$, wodurch man erhält

$$\mathfrak{a}K - L - \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}^2(1 - \cos\eta^2 - \cos\theta^2 - 2\cos\zeta^2) + \mathfrak{a}\mathfrak{b}(1 - \cos\eta^2 - \cos\theta^2)$$
$$+ \mathfrak{a}\mathfrak{c}(1 - \cos\eta^2 - \cos\theta^2) - \mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\zeta^2$$
$$= \cos\zeta^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}\mathfrak{c}),$$

also

$$\cos\zeta^2 = \frac{\mathfrak{a}K - L - \mathfrak{a}^2}{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})},$$

und analog $\cos\eta^2 = \dfrac{\mathfrak{b}K - L - \mathfrak{b}^2}{(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}$ und $\cos\theta^2 = \dfrac{\mathfrak{c}K - L - \mathfrak{c}^2}{(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})}$.

Aus $u^2 - Ku + L = 0$ folgt $uK = u^2 + L$, oder weil

$$K = \frac{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})\cos\zeta^2 + L + \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}}$$
$$u(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})\cos\zeta^2 + u(L + \mathfrak{a}^2) = \mathfrak{a}u^2 + \mathfrak{a}L$$

und

$$u\cos\zeta^2 = \frac{(\mathfrak{a} - u)(L - \mathfrak{a}u)}{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})}$$

und analog $u\cos\eta^2 = \dfrac{(\mathfrak{b} - u)(L - \mathfrak{b}u)}{(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}$ und $u\cos\theta^2 = \dfrac{(\mathfrak{c} - u)(L - \mathfrak{c}u)}{(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})}$.

Da nun

$$\frac{ua^2\cos\zeta^2}{(1 - a^2u)^2} = \frac{\frac{u}{a^2}\cos\zeta^2}{\left(\frac{1}{a^2} - u\right)^2} = \frac{\mathfrak{a}u\cos\zeta^2}{(\mathfrak{a} - u)^2},$$

und analog

$$\frac{ub^2\cos\eta^2}{(1 - b^2u)^2} = \frac{\mathfrak{b}u\cos\eta^2}{(\mathfrak{b} - u)^2}$$

und

$$\frac{uc^2\cos\theta^2}{(1 - c^2u)^2} = \frac{\mathfrak{c}u\cos\theta^2}{(\mathfrak{c} - u)^2};$$

so erhält man sogleich

$$\frac{\delta^2\mathfrak{r}^2}{G^2} = \frac{\mathfrak{a}(L - \mathfrak{a}u)}{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})(\mathfrak{a} - u)} + \frac{\mathfrak{b}(L - \mathfrak{b}u)}{(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\mathfrak{b} - u)}$$
$$+ \frac{\mathfrak{c}(L - \mathfrak{c}u)}{(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})(\mathfrak{c} - u)}.$$

Die folgende Umformung ist noch etwas weitläufig, aber nicht schwierig.

Zu §. 909. Setzt man in §. 904. $a^2 = b^2 = c^2$, so wird, weil

$\cos\zeta^2+\cos\eta^2+\cos\theta^2=1$, also $\sin\zeta^2+\sin\eta^2+\sin\theta^2=2$, die zur Bestimmung von u dienende Gleichung

$$u[a^4u^2-2a^2u+1]=0.$$

Der eine Werth ist $u=0$ und für denselben würde $\delta=0$, wie auch

$$G=A\cos\zeta+B\cos\eta+C\cos\theta=\frac{G}{1-a^2u}=G$$

werden; der zweite und dritte Werth hingegen ist $u=\frac{1}{a^2}$ und für diesen wird

$$\delta=\frac{\sqrt{2fg}}{a} \text{ und } G=0.$$

Zu §. 910. Setzt man die hier für $b^2=c^2$ aufgestellten Werthe von K und L in die allgemeine Gleichung

$$u=\tfrac{1}{2}K\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}K^2-L},$$

so ergibt sich

$$u=\frac{c^2\sin\zeta^2+a^2+a^2\cos\zeta^2}{2a^2c^2}\pm\frac{a^2-a^2\cos\zeta^2-c^2\sin\zeta^2}{2a^2c^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{c^2}\\[2mm] \dfrac{a^2\cos\zeta^2+c^2\sin\zeta^2}{a^2c^2}.\end{cases}$$

Der letztere Werth lässt sich, weil $\cos\zeta^2+\cos\eta^2+\cos\theta^2=1$ ist, auch schreiben

$$u=\frac{a^2\cos\zeta\ +c^2\cos\eta^2+c^2\cos\theta^2}{a^2c^2}$$

und ist daher in Bezug auf alle drei Axen symmetrisch, was der erstere, an und für sich einfacher erscheinende nicht ist; desshalb führt dieser auf sehr verwickelte Ausdrücke.

Es ist der Winkel $DZA=ZDA$, weil $DA=ZA$ und $\zeta=l$.

Zu §. 912. Für $\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}+\omega$, wo ω verschwindend klein ist, wird wie in §. 910.

$$K=\frac{c^2\sin\zeta^2+a^2+a^2\cos\zeta^2}{a^2c^2}+\omega\sin\eta^2$$

und

$$L=\frac{a^2\cos\zeta^2+c^2\sin\zeta^2}{a^2c^4}+\frac{\omega\cos\zeta^2}{c^2}+\frac{\omega\cos\theta^2}{a^2};$$

mithin

$$u=\tfrac{1}{2}K+\sqrt{\tfrac{1}{4}K^2-L}=\frac{1}{c^2}+\omega\,\frac{a^2\sin\eta^2-a^2\cos\zeta^2-c^2\cos\theta^2}{(a^2-c^2)\sin\zeta^2}$$

$$=\frac{1}{c^2}+\frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}$$

und

$$u' = {}^1\!/_2 K - \sqrt{{}^1\!/_4 K^2 - L} = \frac{c^2 \sin\zeta^2 + a^2 \cos\zeta^2}{a^2 c^2}$$
$$+ \omega \frac{a^2 \cos\zeta^2 \cos\eta^2 + c^2 \cos\theta^2 - c^2 \sin\zeta^2 \sin\eta^2}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2}$$
$$= \frac{\sin\zeta^2}{a^2} + \frac{\cos\zeta^2}{c^2} + \omega \frac{\cos\eta^2 \cos\zeta^2}{\sin\zeta^2},$$

wobei wir die mit ω behafteten, verschwindend kleinen Glieder vernachlässigen können.

In y und z verschwinden für $u = \frac{1}{c^2}$ und $b^2 = c^2$, die Nenner $1 - b^2 u$ und $1 - c^2 u$, und damit in diesem Falle die Werthe von y und z nicht unendlich gross werden, muss G so beschaffen sein, dass es in diesem Falle auch verschwinde. Setzen wir demnach $G = I\omega = 0$, so wird, indem wir obige Werthe von u und u' anbringen:

$$\frac{G\cos\zeta}{1 - a^2 u} = \frac{G\cos\zeta}{1 - \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2 \omega \cos\theta^2}{\sin\zeta^2}} = \frac{G c^2 \sin\zeta^2 \cos\zeta}{(c^2 - a^2)\sin\zeta^2 - a^2 c^2 \omega \cos\theta^2} = 0$$

$$\frac{H\cos\zeta}{1 - a^2 u'} = \frac{H\cos\zeta}{1 - \sin\zeta^2 - \frac{a^2\cos\zeta^2}{c^2} - \frac{a^2 \omega \cos\eta^2 \cos\zeta^2}{\sin\zeta^2}}$$
$$= -\frac{H c^2 \cos\zeta}{(a^2 - c^2)\cos\zeta^2} = -\frac{H c^2}{(a^2 - c^2)\cos\zeta}$$

$$\frac{G\cos\eta}{1 - b^2 u} = \frac{G\cos\eta \, \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2} - u} = \frac{G\cos\eta\left(\frac{1}{c^2} + \omega\right)}{\frac{1}{c^2} + \omega - \frac{1}{c^2} - \frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}}$$
$$= \frac{I\omega\cos\eta\sin\zeta^2(1 + c^2\omega)}{c^2\omega(\sin\zeta^2 - \cos\theta^2)} = \frac{I\sin\zeta^2}{c^2\cos\eta}$$

$$\frac{H\cos\eta}{1 - b^2 u'} = \frac{H\cos\eta}{1 - c^2 u'} = \frac{H\cos\eta}{1 - \frac{c^2\sin\zeta^2}{a^2} - \cos\zeta^2} = \frac{H a^2 \cos\eta}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2}$$

$$\frac{G\cos\theta}{1 - c^2 u} = \frac{I\omega\cos\theta}{1 - 1 - \frac{c^2\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}} = -\frac{I\sin\zeta^2}{c^2\cos\theta}$$

$$\frac{H\cos\theta}{1 - c^2 u'} = \frac{H\cos\theta}{1 - \frac{c^2\sin\zeta^2}{a^2} - \cos\zeta^2} = \frac{H a^2 \cos\theta}{(a^2 - c^2)\sin\zeta^2}$$

$$\frac{Gu(b^2-c^2)\cos\eta\cos\theta}{\delta(1-b^2u)(1-c^2u)}=\frac{I\omega\left(\frac{1}{c^2}+\frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\cos\eta\cos\theta}{\delta\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}-\frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)\left(-\frac{c^2\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)}$$

$$=\frac{I\omega\left(\frac{1}{c^2}+\frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)(-c^2\omega)\cos\eta\cos\theta\sin\zeta^4}{-\delta\,\omega(\sin\zeta^2-\cos\theta^2)\,c^2\,\omega\cos\theta^2}$$

$$=\frac{I\sin\zeta^4}{\delta c^2\cos\eta\cos\theta}$$

$$\frac{Hu'(b^2-c^2)\cos\eta\cos\theta\cos\delta t}{\delta'(1-b^2u')(1-c^2u')}=0$$

weil b^2-c^2 verschwindend klein ist,

$$\frac{Gu(c^2-a^2)\cos\zeta\cos\theta}{\delta(1-c^2u)(1-a^2u)}=\frac{I\omega\left(\frac{1}{c^2}+\frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)(c^2-a^2)\cos\zeta\cos\theta}{\delta\left(-\frac{c^2\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)\left(\frac{c^2-a^2}{c^2}-\frac{a^2\,\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)}$$

$$=-\frac{I\sin\zeta^2\cos\zeta}{\delta c^2\cos\theta}$$

$$\frac{Gu(a^2-b^2)\cos\zeta\cos\eta}{\delta(1-a^2u)(1-b^2u)}$$

$$=\frac{I\omega\left(\frac{1}{c^2}+\frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)\,c^2\left(\frac{a^2}{c^2}+b^2\omega-1\right)\cos\zeta\cos\eta}{\delta\left(\frac{c^2-a^2}{c^2}-\frac{a^2\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}\right)\omega\,\frac{\sin\zeta^2-\cos\theta^2}{\sin\zeta^2}}=-\frac{I\sin\zeta^2\cos\zeta}{\delta c^2\cos\eta}$$

endlich

$$\frac{a^2-c^2}{(1-a^2u')(1-c^2u')}=\frac{a^2-c^2}{-\frac{a^2-c^2}{c^2}\cos\zeta^2\frac{(a^2-c^2)}{a^2}\sin\zeta^2}$$

$$=-\frac{a^2c^2}{(a^2-c^2)\sin\zeta^2\cos\zeta^2}.$$

Zu §. 913. Man setze nämlich, wie im vorhergehenden §.

$$G=\mathfrak{G}(1-a^2u)(1-b^2u)(1-c^2u)$$

und

$$H=\mathfrak{H}(1-a^2u')(1-b^2u')(1-c^2u')$$

und füge den drei Werthen x, y und z respective die constanten Glieder $\mathfrak{C}\cos\zeta$, $\mathfrak{C}\cos\eta$ und $\mathfrak{C}\cos\theta$, den drei p, q und r aber die Glieder $\mathfrak{F}\cos\zeta$, $\mathfrak{F}\cos\eta$ und $\mathfrak{F}\cos\theta$ bei.

Zu §. 916. (Figur 121.) Es ist allgemein

$$\cos ZA=\cos ZD\cos AD+\sin ZD\sin AD\cos ZDA,$$

allein für den Anfang der Bewegung ist $ZD=\mathfrak{r}$ sehr klein, ferner $AD=\zeta$, $ZA=l$ und $ZDA=\mathfrak{l}$, mithin

$$\cos l = \cos \mathfrak{r} \cos \zeta + \sin \mathfrak{r} \sin \zeta \cos \mathfrak{l}$$
$$= \cos \zeta + \mathfrak{r} \sin \zeta \cos \mathfrak{l}$$

oder
$$p = \cos l - \cos \zeta = \mathfrak{r} \sin \zeta \cos \mathfrak{l}.$$

Ebenso ergeben sich die Werthe für q und r.

Zu §. 917. Hier dürften einige Erläuterungen angemessen sein. Setzen wir in den drei letzten Formeln des §. 913. $\delta t + \mathfrak{g}$ und $\delta' t + \mathfrak{h}$ statt δt und $\delta' t$, hierauf $t = 0$, und statt p, q und r ihre Werthe aus §. 916. für diesen Fall und führen wir endlich die Grössen X und Y ein; so erhalten wir folgende drei Gleichungen:

1) $\mathfrak{r} \sin \zeta \cos \mathfrak{l} = \mathfrak{S} \cos \zeta + (b^2 - c^2) \cos \eta \cos \theta (X + Y)$
$\qquad - a^2 (b^2 - c^2) \cos \eta \cos \theta (uX + u' Y)$

2) $\mathfrak{r} \sin \eta \cos \mathfrak{m} = \mathfrak{S} \cos \eta + (c^2 - a^2) \cos \zeta \cos \theta (X + Y)$
$\qquad - b^2 (c^2 - a^2) \cos \zeta \cos \theta (uX + u' Y)$

3) $\mathfrak{r} \sin \theta \cos \mathfrak{n} = \mathfrak{S} \cos \theta + (a^2 - b^2) \cos \zeta \cos \eta (X + Y)$
$\qquad - c^2 (a^2 - b^2) \cos \zeta \cos \eta (uX + u' Y)$.

Weil $\cos \zeta^2 + \cos \eta^2 + \cos \theta^2 = 1$ ist, erhält man, wenn man die erste Gleichung mit $\cos \zeta$, die zweite mit $\cos \eta$, die dritte mit $\cos \theta$ multiplicirt und die Produkte addirt, unmittelbar den im Texte angegebenen Werth von $\mathfrak{S}$. Um die andern Grössen zu bestimmen, wollen wir die drei Gleichungen respective durch $\cos \eta \cos \theta$, $\cos \zeta \cos \theta$ und $\cos \zeta \cos \eta$ dividiren und zur Abkürzung

$$\frac{\mathfrak{r} \sin \zeta \cos \mathfrak{l}}{\cos \eta \cos \theta} = p', \quad \frac{\mathfrak{r} \sin \eta \cos \mathfrak{m}}{\cos \zeta \cos \theta} = q', \quad \frac{\mathfrak{r} \sin \theta \cos \mathfrak{n}}{\cos \zeta \cos \eta} = \mathfrak{r}'$$

$$\frac{\mathfrak{S}}{\cos \zeta \cos \eta \cos \theta} = \mathfrak{S}', \quad X + Y = X' \text{ und } uX + u' Y = Y'$$

setzen, alsdann erhalten wir:

4) $p' = \mathfrak{S}' \cos \zeta^2 + (b^2 - c^2) X' - a^2 (b^2 - c^2) Y'$

5) $q' = \mathfrak{S}' \cos \eta^2 + (c^2 - a^2) X' - b^2 (c^2 - a^2) Y'$

6) $r' = \mathfrak{S}' \cos \theta^2 + (a^2 - b^2) X' - c^2 (a^2 - b^2) Y'$.

Eliminiren wir nun Y' einmal aus 4) und 5), hierauf aus 4) und 6) und führen bei der Reduction den Werth von $\mathfrak{B}$ ein, so erhalten wir

7) $p' b^2 (c^2 - a^2) - q' a^2 (b^2 - c^2) = \mathfrak{S}' (\mathfrak{B} - a^2 b^2)$
$\qquad - (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2) X'$

8) $p' c^2 (a^2 - b^2) - r' a^2 (b^2 - c^2) = - \mathfrak{S}' (\mathfrak{B} - a^2 c^2)$
$\qquad + (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2) X'$.

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen $\mathfrak{S}'$, so erhalten wir, weil

$$b^2(c^2 - a^2)(\mathfrak{B} - a^2 c^2) + c^2(a^2 - b^2)(\mathfrak{B} - a^2 b^2) = - a^2 (b^2 - c^2)(\mathfrak{B} - b^2 c^2)$$

und
$$(\mathfrak{B} - a^2 b^2) - (\mathfrak{B} - a^2 c^2) = - a^2 (b^2 - c^2) \text{ ist,}$$

$$-a^2(b^2-c^2)(\mathfrak{B}-b^2c^2)p'-a^2(b^2-c^2)(\mathfrak{B}-a^2c^2)q'$$
$$-a^2(b^2-c^2)(\mathfrak{B}-a^2b^2)r'=-a^2(b^2-c^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)X'$$

und hieraus den gesuchten Werth von $X'=X+Y$, indem man statt p', q' und r' wieder ihre Werthe einführt.

Eliminiren wir nun aus 4) und 5), dann aus 4) und 6) die Grösse X' und führen bei der Reduction den Werth von $\mathfrak{A}$ ein, so erhalten wir

9) $p'(c^2-a^2)-q'(b^2-c^2)=-\mathfrak{S}'(\mathfrak{A}-c^2)-(c^2-a^2)(b^2-c^2)(a^2-b^2)Y'$

10) $p'(a^2-b^2)-r'(b^2-c^2)=\mathfrak{S}'(\mathfrak{A}-b^2)+(c^2-a^2)(b^2-c^2)(a^2-b^2)Y'$.

Eliminirt man aus diesen beiden die Grösse $\mathfrak{S}'$, so wird, weil

$$(c^2-a^2)(\mathfrak{A}-b^2)+(a^2-b^2)(\mathfrak{A}-c^2)=-(b^2-c^2)(\mathfrak{A}-a^2)$$

und $\qquad -(\mathfrak{A}-b^2)+(\mathfrak{A}-c^2)=b^2-c^2$ ist,

$$-(b^2-c^2)(\mathfrak{A}-a^2)p'-(b^2-c^2)(\mathfrak{A}-b^2)q'-(b^2-c^2)(\mathfrak{A}-c^2)r'$$
$$=(b^2-c^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)Y'$$

und es folgt hieraus der gesuchte Werth von $Y'=uX+u'Y$.

Zu §. 918. Setzt man $\cos(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})\cos(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})\cos(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})=-Z^2$, so wird

$$\sin\zeta\cos\zeta\cos\mathfrak{l}+\sin\eta\cos\eta\cos\mathfrak{m}+\sin\theta\cos\theta\cos\mathfrak{n}$$
$$=\frac{Z\,[\cos\mathfrak{l}\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})+\cos\mathfrak{m}\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})+\cos\mathfrak{n}\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})]}{\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})},$$

wo der Factor in der Klammer verschwindet, wie man durch einfache Entwickelung sieht. Dividirt man daher die Gleichung durch $\cos\zeta\cos\eta\cos\theta$, so wird

$$\frac{\sin\zeta\cos\mathfrak{l}}{\cos\eta\cos\theta}+\frac{\sin\eta\cos\mathfrak{m}}{\cos\zeta\cos\theta}+\frac{\sin\theta\cos\mathfrak{n}}{\cos\zeta\cos\eta}=0$$

und es fallen demnach in den Ausdrücken für $X+Y$ und $uX+u'Y$ die Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus.

Zu §. 919. Für den Anfang der Bewegung, d. h. für $t=0$ sei $AZ=l'$ und $p=p'=\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}$, alsdann haben wir, weil allgemein $\cos l=\cos\zeta+p$, für $t=0$

$$1)\quad \cos l'=\cos\zeta+p'.$$

Im Dreieck AZD ist aber

$$\cos AD=\cos AZ\cos ZD+\sin AZ\sin ZD\cos AZD,$$

d. h. $\qquad \cos\zeta=\cos l'\cos\mathfrak{r}+\sin l'\sin\mathfrak{r}\cos AZD$

oder $\qquad 2)\quad \cos\zeta=\cos l'+\mathfrak{r}\sin l'\cos AZD,$

weil $\mathfrak{r}$ verschwindend klein ist. Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt mithin

$$\mathfrak{r}\sin l'\cos AZD=-p'=-\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}$$

und da sehr nahe $\sin\zeta=\sin l'$ ist,

$$\cos AZD=-\cos\mathfrak{l}\ \text{ oder }\ AZD=180^0-\mathfrak{l}=180^0-ADZ.$$

Allgemein ist für die Zeit $=t$

$$\cos AZD = \frac{\cos\zeta - \cos l \cos\varrho}{\sin l \sin\varrho} = \frac{\cos\zeta - \cos l}{\varrho \sin l}$$
$$= -\frac{p}{\varrho \sin l} = -\frac{\sin\zeta \cos ADZ}{\sin l},$$

also weil sehr nahe $\sin\zeta = \sin l$ ist,

$$AZD = 180^0 - ADZ.$$

Zu §. 922. Ist $\sin\mathfrak{l}=0$, also $\cos\mathfrak{l}=1$, so wird nach §. 919. $x=0$ und $y=0$ für $\varepsilon=0$, ausserdem aber $z=0$, wenn $\sin\delta t=0$, also $\delta t=0$ oder $=180^0$.

Ist $\cos\mathfrak{l}=0$ und $\sin\mathfrak{l}=1$, so wird $x=0$ und $y=0$, wenn $\sin\delta' t=0$, also

$$\delta' t = 0 \text{ oder } = 180^0,$$

und zugleich $z=0$.

Ist hingegen weder $\sin\mathfrak{l}=0$ noch $\sin\mathfrak{l}=1$, so würde aus $x=0$, $y=0$ und $z=0$ zugleich

$$\delta t=0 \text{ oder } =180^0 \text{ und } \delta' t=0 \text{ oder } =180^0$$

folgen.

Aus den Werthen von p, q und r im §. 919. folgt, dass, wenn nicht entweder $\sin\mathfrak{l}=0$ oder $\cos\mathfrak{l}=0$ ist, zugleich $\cos\delta t=0$ und $\cos\delta' t=0$ sein muss, damit $\varrho=0$ werde.

Zu §. 923. Aus $\cos l=\cos\zeta+p$ folgt $2\sin\frac{1}{2}(l+\zeta)\sin\frac{1}{2}(\zeta-l)$ $=p=\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}\cos\delta t$ (§. 919.) oder, weil p sehr klein, also ζ wenig von l verschieden ist, $\sin\frac{1}{2}(l+\zeta)=\sin\zeta$, $2\sin\frac{1}{2}(\zeta-l)$ $=\zeta-l$ und so

$$AZ = l = \zeta - \mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}\cos\delta t.$$

Zu §. 924. Es wird nach §. 919.

$$\sin AD = \sin\zeta,$$

$$\varrho = \mathfrak{r}\frac{\sqrt{\cos\mathfrak{l}^2\cos(\delta t+\mathfrak{g})^2\cos\mathfrak{h}^2+\sin\mathfrak{l}^2\cos(\delta' t+\mathfrak{h})^2\cos\mathfrak{g}^2}}{\cos\mathfrak{g}\cos\mathfrak{h}}$$

und

$$\sin DZA = \frac{\cos\mathfrak{g}\cos(\delta' t+\mathfrak{h})\sin\mathfrak{l}}{\sqrt{\cos\mathfrak{l}^2\cos\mathfrak{h}^2\cos(\delta t+\mathfrak{g})^2+\sin\mathfrak{l}^2\cos\mathfrak{g}^2\cos(\delta' t+\mathfrak{h})^2}},$$

woraus der Werth von ZAD folgt. Den Werth von AZ erhält man wie in der vorhergehenden Anmerkung.

Zu §. 935. (Fig. 127.) Es ist $\mathfrak{f}-\mathfrak{g}=ALB$, $\mathfrak{g}-\mathfrak{h}=-BLC$, $\mathfrak{h}-\mathfrak{f}=ALC$ und $AB=AC=BC=90^0$, demnach

$$\sin\zeta\sin(\mathfrak{f}-\mathfrak{g})=\sin ABL=\sin(CBL-90^0)=-\cos CBL=-\frac{\cos\theta}{\sin\eta}$$

$$-\sin\theta\sin(\mathfrak{g}-\mathfrak{h}) = \sin CBL = \sin(90^0 + ABL) = \cos ABL = \frac{\cos\zeta}{\sin\eta}$$

$$\sin\zeta\sin(\mathfrak{h}-\mathfrak{f}) = \sin ACL = -\cos BCL = -\frac{\cos\eta}{\sin\theta}.$$

Aus $\cos AB = \cos AL\cos BL + \sin AL\sin BL\cos ALB$ folgt unmittelbar

$$\cos(\mathfrak{f}-\mathfrak{g}) = -\frac{\cos\eta\cos\zeta}{\sin\eta\sin\zeta},$$

ähnlich ergeben sich $\cos(\mathfrak{g}-\mathfrak{h})$ und $\cos(\mathfrak{h}-\mathfrak{f})$.

Die Formeln I., II., IX., X. und XI. sind ganz symmetrisch, nach der Analogie ergeben sich IV. und V. aus III., wie auch VII. und VIII. aus VI.; alle erhält man ohne Schwierigkeit.

Zu §. 938. Wir erhalten unmittelbar

$$\begin{aligned} dl.\sin l\cos\zeta + dm.\sin m\cos\eta + dn.\sin n\cos\theta \\ = -dt[x(\cos n\cos\eta - \cos m\cos\theta) \\ + y(\cos l\cos\theta - \cos n\cos\zeta) \\ + z(\cos m\cos\zeta - \cos l\cos\eta)] \end{aligned}$$

oder mittelst der für $\cos l$, $\cos m$ und $\cos n$ im §. 936. gegebenen Werthe

$$\begin{aligned} d\varrho.\sin\varrho = -\sin\varrho dt[x(\cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\eta - \cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta) \\ + y(\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\theta - \cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\zeta) \\ + z(\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\zeta - \cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta)], \end{aligned}$$

d. h. nach §. 935., No. III. bis V.

$$d\varrho = -dt[x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\theta].$$

Zu §. 940. Es ist $ZM = 90^0$, weil Z im Scheitel und M im Horizont liegt, $LM = 90^0$, wie aus §. 930. hervorgeht, mithin M der Pol des Bogens ZL und es wird daher, wenn man ZL bis zum Durchschnitt mit MX verlängert, dieser Durchschnittspunkt von M um 90^0 abliegen, also $MZL = 90^0$. XM ist mithin dem Winkel XZM proportional.

Differentiiren wir die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = (x\cos l + y\cos m + z\cos n)^2 \\ + (x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\theta)^2, \end{aligned}$$

worin, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, ζ, η und θ constant sind, so erhalten wir, weil

$$xdl.\sin l + ydm.\sin m + zdn.\sin n = 0$$

ist,

$$\begin{aligned} xdx + ydy + zdz = \Omega\sin\omega[\cos l dx + \cos m dy + \cos n dz] \\ + \Omega\cos\omega[\sin\mathfrak{f}\sin\zeta dx + \sin\mathfrak{g}\sin\eta dy + \sin\mathfrak{h}\sin\theta dz], \end{aligned}$$

indem wir die Grössen $\Omega\sin\omega$ und $\Omega\cos\omega$ nach diesem §. wieder eingeführt haben. Es muss daher

$$x = \Omega\cos\alpha = \Omega(\sin\omega\cos l + \cos\omega\sin\mathfrak{f}\sin\zeta)$$

d

$$y = \Omega \cos\beta = \Omega (\sin\omega \cos m + \cos\omega \sin\mathfrak{g} \sin\eta)$$

und $$z = \Omega \cos\gamma = \Omega (\sin\omega \cos n + \cos\omega \sin\mathfrak{h} \sin\theta)$$

sein. Es ist aber (Figur 129.)

$$\cos OA = \cos OZ \cos AZ + \sin OZ \sin AZ \cos AZO,$$

d. h. weil $OZ = 90^0 - \omega$, $AZO = 90^0 - LAZ = 90^0 - (\lambda - \varphi)$,

$$\cos\alpha = \sin\omega \cos l + \cos\omega \sin l \sin(\lambda - \varphi) = \sin\omega \cos l + \cos\omega \sin\mathfrak{f} \sin\zeta$$

(§. 935.).

Eben so lassen sich die beiden andern Gleichungen darstellen.

Zu §. 944. Da nach §. 943 im Anfange $\varrho = 0$ ist, so wird

$$dt = d\varrho \sqrt{\frac{a^2 + f^2 \sin\varrho^2}{4fg(1 - \cos\varrho)}} = \infty.$$

Für $\eta = 0$ wird $\cos 2\eta = 1$, $\cos 2(\eta + \varrho) = \cos 2\varrho$, $\cos 2(\eta + \varrho) - \cos 2\eta = \cos 2\varrho - 1$, also nach §. 943.

$$dt^2 = \frac{d\varrho^2 (a^2 + f^2 \sin\varrho^2)[b^2 + c^2 + (b^2 - c^2)\cos 2\varrho]}{4fg[b^2 + c^2 + (b^2 - c^2)\cos 2\varrho](1 - \cos\varrho) - b^2\varepsilon^2(b^2 - c^2)(1 - \cos 2\varrho)},$$

und weil im Anfange $\varrho = 0$ ist, $dt^2 = \infty$.

Soll $\theta = 0$ sein, so muss, weil zugleich $ZL = ZC = \varrho$ anfangs $= 0$ ist, C mit B, θ mit η, z mit y und c mit b vertauscht werden und es gilt alsdann das vorhergehende Raisonnement.

Zu §. 946. Es wird die Differenz $C - 4fg \cos\varrho$ (§. 939.) hier $= C - 4fg + 2fg\varrho^2$, also das jetzige C gleich dem frühern $C - 4fg$. Man darf ϱ^2 als unendlich klein nicht vernachlässigen, weil die Glieder a^2x^2, b^2y^2 und c^2z^2 ebenfalls unendlich klein sind.

Unmittelbar erhalten wir nach §. 935., No. I. und II. aus den Gleichungen I., II. und III.

$$a^2 dx \cos\zeta + b^2 dy \cos\eta + c^2 dz \cos\theta = 0,$$

also weil a^2, b^2 und c^2, wie auch $\cos\zeta$, $\cos\eta$ und $\cos\theta$ constant sind, durch Integration

$$a^2 x \cos\zeta + b^2 y \cos\eta + c^2 z \cos\theta = \text{Const.} = A.$$

Aus den Gleichungen

1) $u = x \sin\mathfrak{f} \sin\zeta + y \sin\mathfrak{g} \sin\eta + z \sin\mathfrak{h} \sin\theta$
2) $v = x \cos\zeta + y \cos\eta + z \cos\theta$
3) $0 = x \cos\mathfrak{f} \sin\zeta + y \cos\mathfrak{g} \sin\eta + z \cos\mathfrak{h} \sin\theta$

erhält man, indem man $(1) \times \sin\mathfrak{f} \sin\zeta + (2) \times \cos\zeta + (3) \times \cos\mathfrak{f} \sin\zeta$ bildet,

$$\begin{aligned} u \sin\mathfrak{f} \sin\zeta + v \cos\zeta = x&[\sin\mathfrak{f}^2 \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2 + \cos\mathfrak{f}^2 \sin\zeta^2] \\ &+ y[\sin\eta \sin\zeta \cos(\mathfrak{f} - \mathfrak{g}) + \cos\eta \cos\zeta] \\ &+ z[\sin\zeta \sin\theta \cos(\mathfrak{h} - \mathfrak{f}) + \cos\zeta \cos\theta] \\ = x& \text{ (§. 935.)} \end{aligned}$$

und ganz ähnlich die Werthe von y und z.

Unmittelbar wird $A = \mathfrak{F}u + \mathfrak{D}v$ oder $v = \frac{A - \mathfrak{F}u}{\mathfrak{D}}$, mithin nun

$$x = u \sin\mathfrak{f} \sin\zeta + v\cos\zeta$$

$$= \frac{A\cos\zeta + [b^2\cos\eta(\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta - \sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\zeta) + c^2\cos\theta(\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\theta - \sin\mathfrak{h}\sin\theta\cos\zeta)]u}{\mathfrak{D}}$$

$$= \frac{A\cos\zeta + [b^2\cos\eta\cos\mathfrak{h}\sin\theta - c^2\cos\theta\cos\mathfrak{g}\sin\eta]u}{\mathfrak{D}} \quad \text{(§. 935. No. VII. und VIII.)}$$

$$= \frac{A\cos\zeta + \mathfrak{A}u}{\mathfrak{D}}.$$

Aehnlich ergeben sich die Werthe von y und z.

Es wird, weil $dx = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}}du$, $dy = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}du$ und $dz = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}du$ ist,

$$s = \frac{\mathfrak{A}a^2\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + \mathfrak{B}b^2\cos\mathfrak{g}\sin\eta + \mathfrak{C}c^2\cos\mathfrak{h}\sin\theta}{2g\mathfrak{D}} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$= -[a^2b^2\cos\mathfrak{h}\sin\theta(\cos\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta - \cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta) + a^2c^2\cos\mathfrak{g}\sin\eta(\cos\mathfrak{f}\cos\theta\sin\zeta - \cos\mathfrak{h}\cos\zeta\sin\theta)$$

$$+ b^2c^2\cos\mathfrak{f}\sin\zeta(\cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\eta - \cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta)]\frac{1}{2g\mathfrak{D}} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\mathfrak{H}^2} \cdot \sqrt{2fg}\cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}$$

oder nach §. 935., No. III., IV. und V.

$$s = -\frac{\sqrt{Bf}}{\mathfrak{D}\mathfrak{H}^2\sqrt{2g}}[a^2b^2\sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\theta^2 + a^2c^2\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2 + b^2c^2\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2]\cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}.$$

Noch ist zu bemerken, dass mittelst der eben benutzen Formeln aus §. 935.

$$\mathfrak{A}\cos\zeta + \mathfrak{B}\cos\eta + \mathfrak{C}\cos\theta = -[a^2\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + b^2\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + c^2\sin\mathfrak{h}\sin\theta\cos\theta] = -\mathfrak{F}$$

wird und sich so der Werth von Ω^2 ergibt.

Zu §. 952. Es wird

$$p\cos\zeta + q\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + r\sin\mathfrak{f}\sin\zeta = x[\cos\zeta^2 + \cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + \sin\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2]$$
$$+ y[\cos\eta\cos\zeta + \cos\mathfrak{g}\cos\mathfrak{f}\sin\eta\sin\zeta + \sin\mathfrak{g}\sin\mathfrak{f}\sin\eta\sin\zeta]$$
$$+ z[\cos\theta\cos\zeta + \cos\mathfrak{h}\cos\mathfrak{f}\sin\theta\sin\zeta + \sin\mathfrak{h}\sin\mathfrak{f}\sin\theta\sin\zeta].$$

Der Factor von x wird unmittelbar $=1$, der von $y = \cos\eta\cos\zeta + \sin\eta\sin\zeta\cos(\mathfrak{f}-\mathfrak{g})$ und der von $z = \cos\theta\cos\zeta + \sin\theta\sin\zeta\cos(\mathfrak{h}-\mathfrak{f})$, und beide letztern nach §. 935. $=0$. Ferner wird nach §. 936.

$$p\cos\zeta + q\cos\mathfrak{f}\sin\zeta = u\cos\varrho\cos\zeta + u\sin\varrho\sin\zeta\cos\mathfrak{f} = u\cos l;$$

mithin $x = r\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + u\cos l$ und ganz ähnlich erhält man die Werthe von y und z.

Zu §. 953. Zu dem für $\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2$ gegebenen Ausdruck gelangt man leicht unter Benutzung der Gleichungen III., IV. und V. des §. 935., und es muss derselbe nothwendig positiv sein. Da man nun aus

$$\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2 = 0$$

die beiden Factoren von der Form $\mathfrak{A}\cos\varrho + [\mathfrak{B} + \sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{C}}]\sin\varrho$ und $\mathfrak{A}\cos\varrho + [\mathfrak{B} - \sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{C}}]\sin\varrho$ erhält, so können dieselben nur reell sein, wenn $\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ positiv ist, was hier, wie oben bemerkt, nicht stattfindet.

Zu §. 954. Weil ϱ unendlich klein, also $\cos\varrho = 1$ und $\sin\varrho = 0$ ist, ergibt sich, indem man zugleich f negativ setzt, einfacher

$$r^2 = \frac{\text{Const.} + 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{A}\mathfrak{F} - \mathfrak{D}^2}.$$

Der für den Nenner angegebene Werth ergibt sich unter Benutzung von §. 935., No. VI., VII. und VIII. und wir haben jetzt

$$dt = -\frac{d\varrho}{r} = -\frac{d\varrho\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{F} - \mathfrak{D}^2}}{\sqrt{\text{Const.} + 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}}$$
$$= -\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{F} - \mathfrak{D}^2}{\mathfrak{A}}} \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{\text{Const.} - 2fg\varrho^2}},$$

indem man $\cos\varrho = 1 - \frac{1}{2}\varrho^2$ und $\frac{\text{Const.} + 4\mathfrak{A}fg}{\mathfrak{A}}$ einer neuen Constanten gleichgesetzt hat. Durch Vergleichung mit dem Ausdruck

$$dt = -\frac{\mathfrak{H}\,d\varrho}{\sqrt{B - 2fg\varrho^2}}$$

im §. 946. erhalten wir also

$$\frac{\mathfrak{H}^2}{f} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{F} - \mathfrak{D}^2}{f\mathfrak{A}}$$

und hieraus folgt der im Texte angegebene Werth der Länge des isochronen Pendels.

Zu §. 993. (Fig. 135.) Im Original stand $\sin AOB = -\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$. Es ist aber

$$\sin\alpha\sin AOB = \sin ABO = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta},$$

mithin

$$\sin AOB = +\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta},$$

wie es in unserm Texte angesetzt ist. Dieselbe Bemerkung gilt von $\sin BOC$ und $\sin COA$.

Zu §. 1011. Wir wollen hier die Wahrheit von zweien dieser Gleichungen darthun und setzen zu diesem Ende:

$$F = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi = \cos\alpha^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi$$

und

$$G' = \cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi = \cos\beta^2(1-\cos\varphi) + \cos\varphi.$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}F^2+G^2+H^2 &= (1-\cos\varphi)^2\cos\alpha^2 + 2\cos\alpha(1-\cos\varphi)\cos\alpha\cos\varphi + \cos\varphi^2 \\ &\qquad + \cos\gamma^2\sin\varphi^2 + \cos\beta^2\sin\varphi^2 \\ &= \cos\alpha^2 - 2\cos\alpha^2\cos\varphi + \cos\alpha^2\cos\varphi^2 + 2\cos\alpha^2\cos\varphi \\ &\qquad - 2\cos\alpha^2\cos\varphi^2 + \cos\varphi^2 + \cos\gamma^2\sin\varphi^2 + \cos\beta^2\sin\varphi^2 \\ &= \cos\alpha^2 + \cos\varphi^2\sin\alpha^2 + (\cos\gamma^2 + \cos\beta^2)\sin\varphi^2 \\ &= \cos\alpha^2 + \cos\varphi^2\sin\alpha^2 + \sin\alpha^2\sin\varphi^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}FF'+GG'+HH' &= [\cos\alpha^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi] \\ &\qquad [\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi] \\ &+ [\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi)+\cos\gamma\sin\varphi][\cos\beta^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi] \\ &+ [\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi] \\ &\qquad [\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi] \\ &= (1-\cos\varphi)^2[\cos\alpha^3\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta^3 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma^2] \\ &\quad + (1-\cos\varphi)[2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi] \\ &\quad - \cos\alpha\cos\beta\sin\varphi^2 \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta\cos\varphi^2 - \cos\alpha\cos\beta\sin\varphi^2 \\ &= \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi^2-\sin\varphi^2) = 0.\end{aligned}$$

Zu §. 1034. Ich erhalte die reducirte Gleichung für $\frac{\mathfrak{A}dt}{A}$ etwas verschieden. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}&2dp\sin\varphi(1-\cos\varphi)(p^2-1) + 2dq(1-\cos\varphi)(r+pq\sin\varphi) \\ &\quad -2dr(1-\cos\varphi)(q-pr\sin\varphi) = 2p\sin\varphi(1-\cos\varphi)[pdp+qdq+rdr] \\ &\qquad -2dp\sin\varphi(1-\cos\varphi) + 2(1-\cos\varphi)(rdq-qdr) \\ &\qquad = -2dp\sin\varphi(1-\cos\varphi) + 2(1-\cos\varphi)(rdq-qdr).\end{aligned}$$

Im Originaltexte steht $-2dp\sin\varphi$ statt $-2dp\sin\varphi(1-\cos\varphi)$.

Zu §. 1037. Es wird

$$\frac{2q\sin\varphi.2p\sin\varphi}{2pq(1-\cos\varphi)}=\frac{4pq(1-\cos\varphi^2)}{2pq(1-\cos\varphi)}=2(1+\cos\varphi),$$

während im Originaltext $4(1+\cos\varphi)$ steht.

Zu §. 1145. Die Kraft F kann nicht negativ werden, ihr kleinster Werth ist $=0$, wenn

$$\sin\zeta-\delta\cos\zeta=0 \text{ oder } \operatorname{tg}\zeta=\delta$$

wird. In diesem Falle werden die Gleichungen des §. 1142.

$$E\cos\zeta=\frac{M}{2(1+\delta^2)} \text{ und } E\sin\zeta=\frac{M\delta}{2(1+\delta^2)},$$

also

$$E=\frac{M(\cos\zeta+\delta\sin\zeta)}{2(1+\delta^2)}=\frac{M\left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}+\frac{\delta^2}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)}{2(1+\delta^2)}=\frac{M}{2\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Zu §. 1154. Ist GR abwärts gerichtet, so ist $\theta>90^0$, also $\cos\theta$ negativ und daher

$$\operatorname{tg}\zeta=\frac{\delta(M+Q+P\sin\theta)-P\cos\theta}{M+Q+P\sin\theta+\delta P\cos\theta}=\frac{\operatorname{tg}\lambda-\operatorname{tg}\xi}{1+\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\xi},$$

mithin $\zeta=\lambda-\xi$ und $\zeta<\lambda$.

Soll die Berührung im untersten Punkte geschehen, so muss $\operatorname{tg}\zeta=0$, also

$$\delta(M+Q+P\sin\theta)+P\cos\theta=0 \text{ und } P=-\frac{\delta(M+Q)}{\cos\theta+\delta\sin\theta}$$

sein.

Nach §§. 1148. und 1149. wird

$$E=\frac{M+Q+P\sin\theta-\delta P\cos\theta}{2(1+\delta^2)\cos\zeta}=\frac{(M+Q+P\sin\theta-\delta P\cos\theta)\cos\lambda^2}{2\cos(\lambda+\xi)}$$

$$=\frac{(M+Q)\cos\lambda\cos\theta}{2\cos(\zeta+\theta-\lambda)}=\frac{P\cos\lambda\cos\theta}{2\sin(\zeta-\lambda)}=\frac{P\cos\lambda\cos\theta}{2\sin\xi}.$$

Aus

$$\operatorname{tg}\xi=\frac{P\cos\theta}{M+Q+P\sin\theta}$$

folgt aber

$$\sin\xi=\frac{P\cos\theta}{\sqrt{(M+Q)^2+2P(M+Q)\sin\theta+P^2}},$$

mithin $E=\frac{1}{2}\cos\lambda\sqrt{(M+Q)^2+2P(M+Q)\sin\theta+P^2}$ und hiernach E als Function von θ am kleinsten, wenn $\sin\theta=-1$, also $\theta=-90^0$ ist.

Zu §. 1156. Ich erhalte die in diesem §. zur Bestimmung von F aufgestellte Gleichung etwas verschieden, wesshalb hier meine Herleitung ausführlich folgt. Es ist

$$4F = 2(E+F) - 2(E-F)$$
$$= 2(E+F) - \frac{Q}{\sin\zeta} - \frac{2\delta(E+F)\cos\zeta}{\sin\zeta} \text{ (§. 1155., Gl. 2.)}$$
$$= \frac{2(E+F)(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}{\sin\zeta} - \frac{Mh^2\sin\varphi\cos\varphi}{k^2\sin\zeta}$$
$$+ \frac{2\delta(E+F)fh\cos\varphi}{k^2\sin\zeta} - \frac{Mh\Omega^2\sin\varphi}{2g\sin\zeta} \text{ (§. 1155., Gl. 7.)};$$

mithin

$$4k^2F\sin\zeta = 2(E+F)[k^2\sin\zeta - \delta k^2\cos\zeta + \delta fh\cos\varphi]$$
$$- Mh^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{Mhk^2\Omega^2\sin\varphi}{2g}.$$

Benutzt man nun den Werth von $2(E+F)$ aus §. 1155., Gl. 10., und reducirt, so erhält man:

$$2Fk^4\left[(1+\delta^2)\sin 2\zeta - \frac{2\delta fh}{k^2}\sin\zeta\sin\varphi - \frac{2\delta^2 fh}{k^2}\sin\zeta\cos\varphi\right]$$
$$= Mk^4\left[\sin\zeta - \delta\cos\zeta + \frac{\delta fh}{k^2}\cos\varphi\right]$$
$$- Mh^2k^2\sin\varphi[\cos(\zeta-\varphi) + \delta\sin(\zeta-\varphi)]$$
$$+ \frac{Mhk^4\Omega^2}{2g}\left[\sin(\zeta-\varphi) - \delta\cos(\zeta-\varphi) + \frac{\delta fh}{k^2}\right].$$

Ist $\operatorname{tg}\zeta > \delta$ oder $\sin\zeta > \delta\cos\zeta$, so wird der Factor von Mk^4 positiv; ferner kommt, weil φ also auch $\sin\varphi$ sehr klein ist, das zweite Glied auf der rechten Seite gar nicht in Betracht. In Bezug auf das dritte Glied ist

$\sin(\zeta-\varphi) - \delta\cos(\zeta-\varphi) = \cos\varphi(\sin\zeta - \delta\cos\zeta) - \sin\varphi(\cos\zeta + \delta\sin\zeta)$, da nun $\cos\varphi(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)$ positiv, $\sin\varphi(\cos\zeta + \delta\sin\zeta)$ sehr klein ist, so wird der ganze Ausdruck auf der rechten Seite positiv sein. Was den Coëfficienten von $2Fk^4$ betrifft, so kommt das Glied $\frac{2\delta fh}{k^2}\sin\zeta\sin\varphi$ gar nicht in Betracht, ferner ist

$$(1+\delta^2)\sin 2\zeta - \frac{2\delta^2 fh}{k^2}\sin\zeta\cos\varphi = 2\sin\zeta\left[\cos\zeta + 2\delta^2\left(\cos\zeta - \frac{fh}{k^2}\cos\varphi\right)\right]$$

und da $k > h$, so wie in höherm Grade $k > f$, so wird $\frac{fh}{k^2}$ sehr klein und mithin, selbst wenn $\cos\varphi$ nahe $= 1$ ist, doch $\cos\zeta > \frac{fh}{k^2}\cos\varphi$ sein. Bei dem Ausdruck im Original, von dessen Richtigkeit ich mich aber nicht habe überzeugen können, ist diess Raisonnement weit einfacher.

Zu §. 1160. Es wird ohne Mühe

$$dt = \frac{-A d\varphi}{\sqrt{2g(\theta-\varphi)[Bh(\theta+\varphi)-2A\delta f]}}$$

$$= -\frac{A}{\sqrt{2Bgh}} \cdot \frac{\frac{Bh d\varphi}{Bh\theta - A\delta f}}{\sqrt{1-\left(\frac{Bh\varphi - A\delta f}{Bh\theta - A\delta f}\right)^2}}$$

also
$$t = \frac{A}{\sqrt{2Bhg}} \text{arc.cos}\left(\frac{Bh\varphi - A\delta f}{Bh\theta - A\delta f}\right).$$

Im §. 540. war die Zeit Einer Schwingung $= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$ und im §. 538. $l = \frac{k^2}{f}$, mithin dort

$$T = \frac{\pi k}{\sqrt{2fg}},$$

wo f das hiesige h bedeutet.

Zu §§. 1163. und 1164. Aus der Gleichung

$$A^2\Omega^2 = 2Bgh(\theta^2 - \varphi^2) - 4A\delta fg(\theta - \varphi) \quad (§. 1160.)$$

geht hervor, dass nur dann Ω^2 positiv, also Ω reell wird, wenn

$$Bh(\theta+\varphi) > 2A\delta f$$

ist. Da nun aber
$$\theta > \varphi$$
ist, so wird um so mehr $2Bh\theta > 2A\delta f$ oder $\theta > \frac{A\delta f}{Bh}$. Für die zweite Schwingung hat man nach §. 1162. statt θ zu setzen $\theta - \frac{2A\delta f}{Bh}$, es muss also

$$\theta - \frac{2A\delta f}{Bh} > \frac{A\delta f}{Bh} \quad \text{oder} \quad \theta > \frac{3A\delta f}{Bh}$$

sein. Für die dritte muss

$$\theta - \frac{4A\delta f}{Bh} > \frac{A\delta f}{Bh} \quad \text{oder} \quad \theta > \frac{5A\delta f}{Bh}$$

sein u. s. w.

Zu §. 1165. Ich erhalte zwar wie im Original $\theta > \frac{2n-1}{4698}$, finde aber hieraus

$$\theta > 43{,}905(2n-1) \text{ Secunden};$$

also für $n = 100$, $\theta > 8737''$ oder $> 2^0 25' 37''$.

Eben so finde ich für $\theta = 5^0$, nur $n = 205$.

Zu §. 1171. Man kann wie im §. 856., um die Bestimmung der Momente P, Q und R anschaulicher zu machen, beide Kräfte

Π und $\delta\Pi$ sogleich nach den IA, IB und IC parallelen Richtungen zerlegen und erhält so statt des dortigen

$$\Pi\cos l \text{ hier } \Pi\cos l - \delta\Pi\sin l\cos(\lambda+\omega)$$
$$\Pi\cos m \text{ „ } \Pi\cos m - \delta\Pi\sin m\cos(\mu+\omega)$$
$$\Pi\cos n \text{ „ } \Pi\cos n - \delta\Pi\sin n\cos(\nu+\omega),$$

worauf man hieraus ganz wie dort auf die Momente schliesst.

Zu §. 1175. Läge der Punkt T von O um 90^0 ab, so würde er sich auf dem Aequator, dessen Pol O und Radius $=f$ ist, bewegen; da er aber um den Bogen s entfernt ist, so ist der Radius des von ihm beschriebenen Parallelkreises $=f\sin s$, mithin seine lineare Geschwindigkeit $=f\Omega\sin s$.

ST stellt als Tangente die Richtung des Bogens TP dar, mithin muss nach vollzogener Drehung $ST\Theta = PTt$ werden.

Weil $IR \# TV$ und $IQ \# TF$ ist, wird $\angle RIQ = VTF$; allein da $TQ = TR = 90^0$ ist, offenbar $\angle RTQ = RIQ = VTF$.

Es ist $PTQ = 180^0 - RTQ = 180^0 - VTF$, mithin

$$\operatorname{tg} PTQ = -\operatorname{tg} VTF = \frac{f\Omega\sin s\cos\theta}{v - f\Omega\sin s\sin\theta}$$

und ganz ähnlich ergeben sich die Werthe von $\sin PTQ$ und $\cos PTQ$.

Zu §. 1176. Soll $u = \sqrt{v^2 - 2f\Omega v\sin s\sin\theta + f^2\Omega^2\sin s^2} = 0$ werden, so muss

$$v = f\Omega\sin s\sin\theta + f\Omega\sin s\cos\theta\sqrt{-1}$$

sein; es wird also nur dann $v = f\Omega\sin s\sin\theta$ reell, wenn

$$f\Omega\sin s\cos\theta = 0$$

ist. Für $v = 0$ wird $u = 0$, wenn

$$f\Omega\sin s = 0, \text{ also } s = 0$$

ist, mithin wenn O in T fällt.

Zu §. 1181. Wie die ersten Werthe der Momente P, Q und R erhalten werden, ersieht man sehr leicht aus der Figur 160., worin die Seitenkräfte mit ihren Werthen durch Pfeile bezeichnet, die Hebelsarme $Ia = Ta' = f\cos AT$, $Ib = Tb' = f\cos BT$ und $Ic = Tc' = f\cos CT$ sind.

Allgemein ist (Figur 159.)

$$\cos AQ = \cos ZQ\cos ZA + \sin ZQ\sin ZA\cos AZQ,$$

mithin, weil $ZQ = 90^0$, $ZA = l$ und $AZQ = 180^0 - \xi - \varphi - \lambda$,

$$\cos AQ = -\sin l\cos(\xi + \varphi + \lambda)$$

und eben so erhält man die Werthe von $\cos BQ$ und $\cos CQ$.

Hiernach wird

$$\cos m \cos CQ - \cos n \cos BQ$$
$$= \cos(\xi+\varphi)[\cos n \sin m \cos\mu - \cos m \sin n \cos\nu]$$
$$- \sin(\xi+\varphi)[\cos n \sin m \sin\mu - \cos m \sin n \sin\nu]$$

und wenn man für $\sin m \cos\mu$, $\sin n \cos\nu$, $\sin m \sin\mu$ und $\sin n \sin\nu$ ihre Werthe aus §. 1172. einführt und reducirt, wobei $\cos m^2 + \cos n^2 = 1 - \cos l^2 = \sin l^2$ ist,

$$\cos m \cos CQ - \cos n \cos BQ = \sin l \sin(\lambda+\xi+\varphi).$$

Zu §. 1183. Multiplicirt man die ersten drei Gleichungen dieses §. respective mit a^2x, b^2y und c^2z, und addirt man die Produkte, so erhält man unmittelbar

$$a^2xdx + b^2ydy + c^2zdz$$
$$+2\delta fg[x\sin l\sin(\lambda+\varphi+\xi)+y\sin m\sin(\mu+\varphi+\xi)+z\sin n\sin(\nu+\varphi+\xi)=0.$$

Substituirt man in den Factor von $2\delta fg$, welchen wir kurz mit F bezeichnen wollen, die Werthe von x, y und z, so wird

$$F = p[\sin l \cos l \sin(\lambda+\varphi+\xi) + \sin m \cos m \sin(\mu+\varphi+\xi)$$
$$+ \sin n \cos n \sin(\nu+\varphi+\xi)]$$
$$-q[\sin l^2 \sin(\lambda+\varphi+\xi)\cos(\lambda+\theta+\varphi)+\sin m^2\sin(\mu+\varphi+\xi)\cos(\mu+\theta+\varphi)$$
$$+ \sin n^2 \sin(\nu+\varphi+\xi)\cos(\nu+\theta+\varphi)].$$

Der Factor von p wird nach dem allgemeinen Theorem dieses §. für $A = \varphi+\xi$, $=0$, um den Factor von q umzuformen, setzen wir

$$\lambda+\varphi+\xi = \lambda+\theta+\varphi+\xi-\theta,\quad \mu+\varphi+\xi = \mu+\theta+\varphi+\xi-\theta$$

und $\qquad \nu+\varphi+\xi = \nu+\theta+\varphi+\xi-\theta$

und erhalten

$$F = -q\cos(\xi-\theta)[\sin l^2 \sin(\lambda+\theta+\varphi)\cos(\lambda+\theta+\varphi)$$
$$+\sin m^2\sin(\mu+\theta+\varphi)\cos(\mu+\theta+\varphi)+\sin n^2\sin(\nu+\theta+\varphi)\cos(\nu+\theta+\varphi)]$$
$$-q\sin(\xi-\theta)[\sin l^2\cos(\lambda+\theta+\varphi)^2 + \sin m^2\cos(\mu+\theta+\varphi)^2$$
$$+\sin n^2\cos(\nu+\theta+\varphi)^2].$$

Führen wir nun die Werthe von $\cos(\mu+\theta+\varphi)$, $\sin(\mu+\theta+\varphi)$, $\cos(\nu+\theta+\varphi)$ und $\sin(\nu+\theta+\varphi)$ aus dem folgenden §. ein, so wird der Factor von $-q\cos(\xi-\theta)=0$ und der von $-q\sin(\xi-\theta)=1$ und so $\qquad a^2xdx+b^2ydy+c^2zdz = 2\delta fgq\sin(\xi-\theta)dt.$

Zu §. 1184. Es wird nämlich

$$\sin(\mu+B)\cos(\nu+C) - \sin(\nu+B)\cos(\mu+C)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin(\mu+\nu+B+C) + \tfrac{1}{2}\sin(\mu-\nu+B-C)$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin(\mu+\nu+B+C) - \tfrac{1}{2}\sin(\nu-\mu+B-C)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin(\mu-\nu)\cos(B-C) + \tfrac{1}{2}\cos(\mu-\nu)\sin(B-C)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sin(\mu-\nu)\cos(B-C) - \tfrac{1}{2}\cos(\mu-\nu)\sin(B-C)$$
$$= \sin(\mu-\nu\cos(B-C).$$

Auf ähnliche Weise erhält man die zwei übrigen entsprechenden Gleichungen.

Zu §. 1185. Allgemein folgt aus $v\sin\xi - fq\cos(\xi-\theta)=0$

$$q=\frac{v\sin\xi}{f\cos(\xi-\theta)}=\frac{v\sin(\zeta-\varphi)}{f\cos(\xi-\theta)}.$$

Aus $v\cos\varphi = e+2\delta gt\cos\zeta$ und $v\sin\varphi=2\delta gt\sin\zeta$ folgt aber

$$v\sin(\zeta-\varphi)=e\sin\zeta,$$

mithin wird

$$q=\frac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi-\theta)}.$$

Zu §. 1189. (Fig. 161.) Vermöge der ihr inwohnenden Bewegung würde die Kugel, ohne die Reibung, auf der die Curve IG in I berührenden Tangente IR gleichförmig fortgehen, wenn *wir also* IR *als Abscissenaxe* ansehen, wird $x=Ct$ sein. Weil aber $DIQ=\xi+\varphi$ constant ist, so wird sie beständig in der Richtung IS durch die constante Kraft $=\delta M$ von IR abgezogen und setzen wir daher die IS parallelen Ordinaten $=y$, so haben wir

$$\frac{ddy}{2gdt^2}=\delta M \text{ und } y=g\delta Mt^2,$$

mithin $\frac{x^2}{y}=$ Const., welches die Gleichung einer Parabel ist.

Zu §. 1190. Nach §. 1181. ist $-f\Omega\sin s\cos\theta=u\sin\xi$ und $f\Omega\sin s\sin\theta - v = u\cos\xi$, wo u die streifende Geschwindigkeit bezeichnet. Verschwindet diese, so verschwindet auch die Reibung und wir haben

$$\Omega f\sin s\cos\theta=0 \text{ und } v-\Omega f\sin s\sin\theta=0;$$

geschieht diess aber im Anfange, wo $t=0$, $\Omega=\varepsilon$, $v=e$, $s=\mathfrak{f}$ und $\theta=\mathfrak{h}$ ist, so haben wir

$$\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}=0 \text{ und } e=\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}.$$

Zu §. 1191. Nach §. 1183. ist

$$\frac{dl}{dt}=q\sin(\lambda+\theta+\varphi)=q\sin[\lambda+\zeta-(\xi-\theta)]$$

$$=\frac{e\sin\zeta}{f}\sin(\lambda+\zeta)-\frac{e\sin\zeta}{f}\cos(\lambda+\zeta)\operatorname{tg}(\xi-\theta) \quad (\S.1185.)$$

$$=\frac{e\sin\zeta}{f}\sin(\lambda+\zeta)-\frac{e\sin\zeta}{f}\cos(\lambda+\zeta)\left[\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h})+\frac{2\delta f^2gt}{ea^2\sin\zeta}\right]$$

und weil nach §. 1185. $\frac{\sin\zeta}{\cos(\zeta-\mathfrak{h})}=\frac{\varepsilon f\sin\mathfrak{f}}{e}$

$$\frac{dl}{dt}=\varepsilon\sin\mathfrak{f}\sin(\lambda+\mathfrak{h})-\frac{2\delta fgt}{a^2}\cos(\zeta+\lambda).$$

Nach §. 1183. ist ferner

$$\begin{aligned}\frac{\sin l\,d\lambda}{dt} &= p\sin l + q\cos l\cos(\lambda+\theta+\varphi)\\ &= \varepsilon\cos\mathfrak{f}\sin l + \frac{e\sin\zeta\cos l}{f\cos(\xi-\theta)}[\cos(\lambda+\zeta)\cos(\xi-\theta)+\sin(\lambda+\zeta)\sin(\xi-\theta)]\\ &= \varepsilon\cos\mathfrak{f}\sin l + \frac{e\sin\zeta\cos l\cos(\lambda+\zeta)}{f}\\ &\qquad + \frac{e\sin\zeta\cos l\sin(\lambda+\zeta)}{f}\left[\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h}) + \frac{2\delta f^2 gt}{ea^2\sin\zeta}\right]\\ &= \varepsilon\cos\mathfrak{f}\sin l + \frac{e\sin\zeta\cos l}{f}\cdot\frac{\cos(\lambda+\mathfrak{h})}{\cos(\zeta-\mathfrak{h})} + \frac{2\delta fgt\cos l}{a^2}\sin(\lambda+\zeta)\\ &= \varepsilon\cos\mathfrak{f}\sin l + \cos l\left[\varepsilon\sin\mathfrak{f}\cos(\lambda+\mathfrak{h}) + \frac{2\delta fgt}{a^2}\sin(\zeta+\lambda)\right].\end{aligned}$$

Zu §. 1192. Für $2\delta gt = \frac{a^2k}{a^2+f^2}$ wird

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta gt} = \frac{e(a^2+f^2)\sin\zeta}{e(a^2+f^2)\cos\zeta + a^2k},$$

während im Originale stand

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{e(a^2+f^2)\operatorname{tg}\zeta}{e(a^2+f^2)+a^2k}.$$

Setzt man, um den Gleichungen

$$\Omega\sin s\cos\theta = 0 \quad \text{und} \quad v = f\Omega\sin s\sin\theta$$

Genüge zu leisten, $\cos\theta = 0$, also $\sin\theta = 1$, so wird aus der zweiten

$$\Omega\sin s = \frac{v}{f},$$

welcher Werth auch später gefunden worden ist.

Unmittelbar wird

$$\Omega^2 = \frac{v^2}{f^2} + \varepsilon^2\cos\mathfrak{f}^2 = \frac{e^2}{f^2} + \frac{2a^2ek\cos\zeta}{f^2(a^2+f^2)} + \frac{a^4k^2}{f^2(a^2+f^2)^2} + \varepsilon^2\cos\mathfrak{f}^2,$$

setzt man aber nach §. 1191.

$k\cos\zeta = \varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} - e$ und $k^2 = e^2 - 2\varepsilon ef\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2\sin\mathfrak{f}^2$, so ergibt sich nach kurzer Umformung der im Text für Ω^2 aufgeführte Werth.

Zu §. 1194. Der Mittelpunkt der Kugel gelangt zur Ruhe, wenn

$$v = 0, \text{ also } e^2 + \frac{2a^2ke\cos\zeta}{a^2+f^2} + \frac{a^4k^2}{(a^2+f^2)^2} = 0$$

oder

$$e = -\frac{a^2k\cos\zeta}{a^2+f^2} + \frac{a^2k\sin\zeta}{a^2+f^2}\sqrt{-1}$$

ist. Es wird demnach e reell, wenn $\sin\zeta = 0$, und positiv, wenn $\cos\zeta = -1$ ist und so in diesem Falle

$$e = \frac{a^2k}{a^2+f^2}.$$

Nach der in der Anmerkung zu §. 1192. gefundenen Gleichung erhalten wir daher
$k = e - \varepsilon f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h}$ und $k^2 = e^2 - 2\varepsilon e f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin\mathfrak{f}^2 \sin\mathfrak{h}^2$
und da allgemein

$$k^2 = e^2 - 2\varepsilon e f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + \varepsilon^2 f^2 \sin\mathfrak{f}^2$$

ist, so muss

$$\sin\mathfrak{h} = 1,\ \mathfrak{h} = 90^0,\ k = e - \varepsilon f \sin\mathfrak{f} \ \text{ oder } \ \varepsilon \sin\mathfrak{f} = \frac{e-k}{f} = -\frac{ef}{a^2}$$

sein.

Zu §. 1195. Aus $v = \sqrt{e^2 + 4\delta e g t \cos\zeta + 4\delta^2 g^2 t^2}$ (§. 1191.) folgt für $\zeta = 180^0$

$$v = e - 2\delta g t,$$

ferner

$$k = e\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right) \text{ und } w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)t = \left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)(e - 2\delta g t).$$

Weil für $t = 0$, $\operatorname{tg}(\xi - \theta) = \operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h})$, also $\xi - \theta = \zeta - \mathfrak{h}$, so wird

$$\xi - 90^0 = 90^0 \text{ und } \xi = 180^0;$$

ferner

$$\Omega \cos s = \varepsilon \cos\mathfrak{f} = -\frac{ef}{a^2 \sin\mathfrak{f}} \cos\mathfrak{f}$$

und aus der allgemeinen Gleichung

$$w = \sqrt{v^2 - 2vf\Omega \sin s + f^2 \Omega^2 \sin s^2}$$

und

$$f\Omega \sin s = v - w = -\frac{ef^2}{a^2}\left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right).$$

Die übrigen Ausdrücke ergeben sich ohne Weiteres.

Zu §. 1196. Nach §. 1191. ist $\operatorname{tg}(\xi - \theta) = \operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f^2 g t}{e a^2 \sin\zeta}$, hieraus und weil nach §. 1192. $\frac{1}{\cos(\zeta - \mathfrak{h})^2} = \frac{k^2}{e^2 \cos\mathfrak{h}^2}$ und nach §. 1191. $\operatorname{tg}(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e \sin\mathfrak{h}}{e \cos\mathfrak{h}}$ ist, wird

$$\frac{\sin\zeta^2}{\cos(\xi - \theta)^2} = \frac{k^2 \sin\zeta^2}{e^2 \cos\mathfrak{h}^2} + \frac{4\delta f^2 g t(\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e \sin\mathfrak{h}) \sin\zeta}{e^2 a^2 \cos\mathfrak{h}} + \frac{4\delta^2 f^4 g^2 t^2}{e^2 a^4}.$$

Da aber nach §. 1185. $\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}{k}$ ist, so erhalten wir

$$\Omega \sin s = \frac{e \sin\zeta}{f \cos(\xi - \theta)}$$

$$= \sqrt{\varepsilon^2 \sin\mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t(\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e \sin\mathfrak{h}) \sin\mathfrak{f}}{a^2 k} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^4}}.$$

Zu §. 1197. Da $v^2 = e^2 + 4\delta e g t \cos\zeta + 4\delta^2 g^2 t^2$ und

$$a^2\Omega^2 = a^2\varepsilon^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin\mathfrak{f}(\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e \sin\mathfrak{h})}{k} + \frac{4\delta^2 f^2 g^2 t^2}{a^2},$$

so wird

$$v^2+a^2\Omega^2=e^2+a^2\varepsilon^2+\frac{4\delta g t}{k}(ek\cos\zeta-\varepsilon^2 f^2\sin \mathfrak{f}^2+\varepsilon e f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}) + 4\delta^2 g^2 t^2\left(1+\frac{f^2}{a^2}\right).$$

Aus $k\cos\zeta=-e+\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}$ (§. 1185.)
folgt aber

$$ek\cos\zeta-\varepsilon^2 f^2\sin\mathfrak{f}^2+\varepsilon e f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}=-e^2+2\varepsilon e f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}-\varepsilon^2 f^2\sin\mathfrak{f}^2=-k^2,$$

mithin wird

$$M(v^2+a^2\Omega^2)=M\left[e^2+\varepsilon^2a^2-4\delta g k t+4\delta^2 g^2 t^2\left(1+\frac{f^2}{a^2}\right)\right].$$

Nach Verlauf der Zeit $t=\frac{a^2k}{2\delta g(a^2+f^2)}$ wird

$$v^2+a^2\Omega^2=v^2+\frac{a^2v^2}{f^2}+a^2\varepsilon^2\cos\mathfrak{f}^2 \quad (§. 1192.)$$

$$=\frac{f^2+a^2}{f^2}\left[e^2+\frac{2a^2ek\cos\zeta}{a^2+f^2}+\frac{a^4k^2}{(a^2+f^2)^2}\right]+a^2\varepsilon^2\cos\mathfrak{f}^2.$$

Da nun $k\cos\zeta$ und k^2 die oben erwähnten Werthe haben, so erhalten wir nach deren Substitution

$$M(v^2+a^2\Omega^2)=\frac{M[e^2f^2+2\varepsilon e a^2 f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}+\varepsilon^2a^2(a^2+f^2\cos\mathfrak{f}^2)]}{a^2+f^2}=M'$$

für $t=0$, $\quad M(e^2+a^2\varepsilon^2)=M''$

mithin

$$M''-M'=\frac{Ma^2k^2}{a^2+f^2}$$

und

$$M'=M''-\frac{Ma^2k^2}{a^2+f^2}=M\left[e^2+\varepsilon^2a^2-\frac{a^2k^2}{a^2+f^2}\right].$$

Zu §. 1202. Für $\mathfrak{f}=90^0$ wird $\cos\mathfrak{f}=0$ und $\sin\mathfrak{f}=1$

$$\operatorname{tg}s=\operatorname{tg}\mathfrak{f}-\frac{2\delta f g t}{\varepsilon a^2\cos\mathfrak{f}}=\frac{1-\frac{2\delta f g t}{\varepsilon a^2}}{\cos\mathfrak{f}}=\infty,$$

also stets $\quad ZO=s=90^0.$

Für $\mathfrak{f}>90^0$ wird $\operatorname{tg}\mathfrak{f}$ und $\cos\mathfrak{f}$ negativ, also

$$\operatorname{tg}s=-\left(\operatorname{tg}\mathfrak{f}-\frac{2\delta f g t}{\varepsilon a^2\cos\mathfrak{f}}\right).$$

Wird aber im zweiten Quadranten die Tangente absolut genommen kleiner, so wird der zugehörige Winkel grösser.

Zu §. 1203. Aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(\xi-\theta)=\operatorname{tg}(\zeta-\mathfrak{h})+\frac{2\delta f^2 g t}{e a^2\sin\zeta}$$

folgt für $\zeta=180^0$ und $\mathfrak{h}=90^0$

$$\operatorname{tg}(\xi-\theta)=\infty,$$

mithin wird $\quad \xi-\theta=180^0-\theta=90^0$ und $\theta=90^0$.

Es wird, weil $\varphi=0$ ist, aus §. 1182.

$$X=\int v dt=\int(e-2\delta gt)\,dt=t(e-\delta gt).$$

Die Bewegung wird gleichförmig, sobald die streifende Geschwindigkeit

$$w=e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f}-2\delta g\left(1+\frac{f^2}{a^2}\right)t=0$$

also

$$t=\frac{a^2(e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f})}{2\delta g(a^2+f^2)}$$

ist. In diesem Falle wird

$$X=\frac{a^2(e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f})}{2\delta g(a^2+f^2)}\left[e-\frac{a^2(e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f})}{2(a^2+f^2)}\right]$$
$$=\frac{a^2(e-\varepsilon f\sin\mathfrak{f})\,[e(a^2+2f^2)+\varepsilon a^2 f\sin\mathfrak{f}]}{4\delta g(a^2+f^2)^2}.$$

Im Original steht im Nenner $2\delta g$ statt $4\delta g$ und dasselbe findet bei dem Werthe von X im Fall II. statt.

Zu §. 1204. Für $e=\varepsilon f\sin\mathfrak{f}$ wird nämlich in beiden Fällen $k=0$ und daher auch $t=0$.

Zu §. 1207. Aus dem Werthe von Ω im §. 1203., Fall I. folgt für $\mathfrak{f}=90^0$

$$\Omega=\pm\frac{ef+\varepsilon a^2}{a^2+f^2},$$

und weil hier ε negativ ist,

$$\Omega=\frac{ef-\varepsilon a^2}{a^2+f^2}\text{ oder }\Omega=-\frac{\varepsilon a^2-ef}{a^2+f^2}.$$

Da aber im Eingange dieses §. bereits gesagt ist, dass im Anfange der Bewegung ε die rückwärts gerichtete Winkelgeschwindigkeit bezeichnen soll, so wird sein

$$\Omega=\frac{\varepsilon a^2-ef}{a^2+f^2}.$$

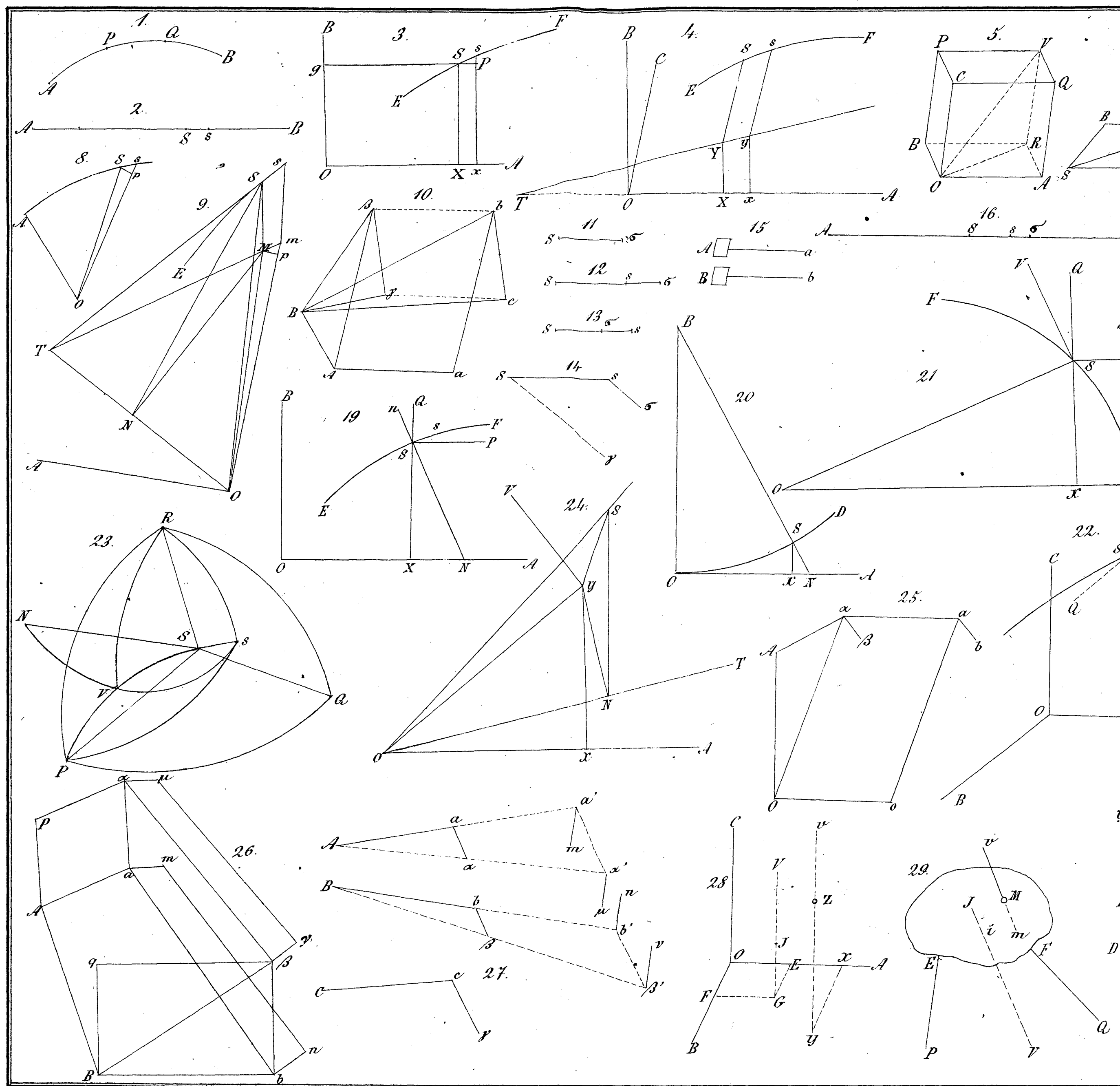
Zu §. 1225. Aus

$$t\sqrt{2gc}=\frac{2c^2}{3k}\cos\omega^3-k\log\operatorname{tg}{}^1\!/_2\,\omega$$
$$=\frac{2c^2}{3k}\cos\omega^3+k\log\operatorname{cotg}{}^1\!/_2\,\omega$$

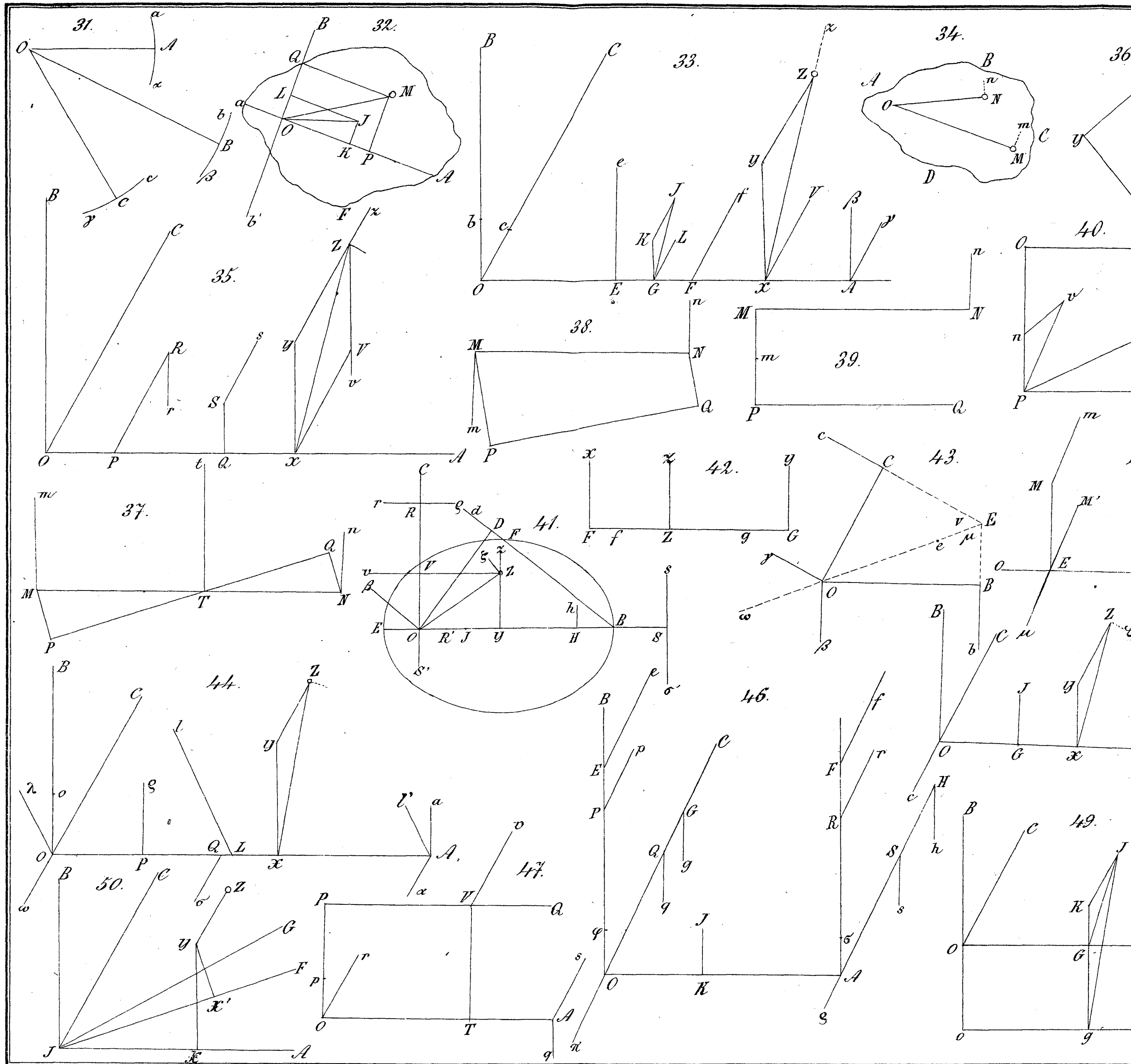
ergibt sich für $\omega=0$,

$$t\sqrt{2gc}=\frac{2c^2}{3k}+k\log\infty=\infty.$$

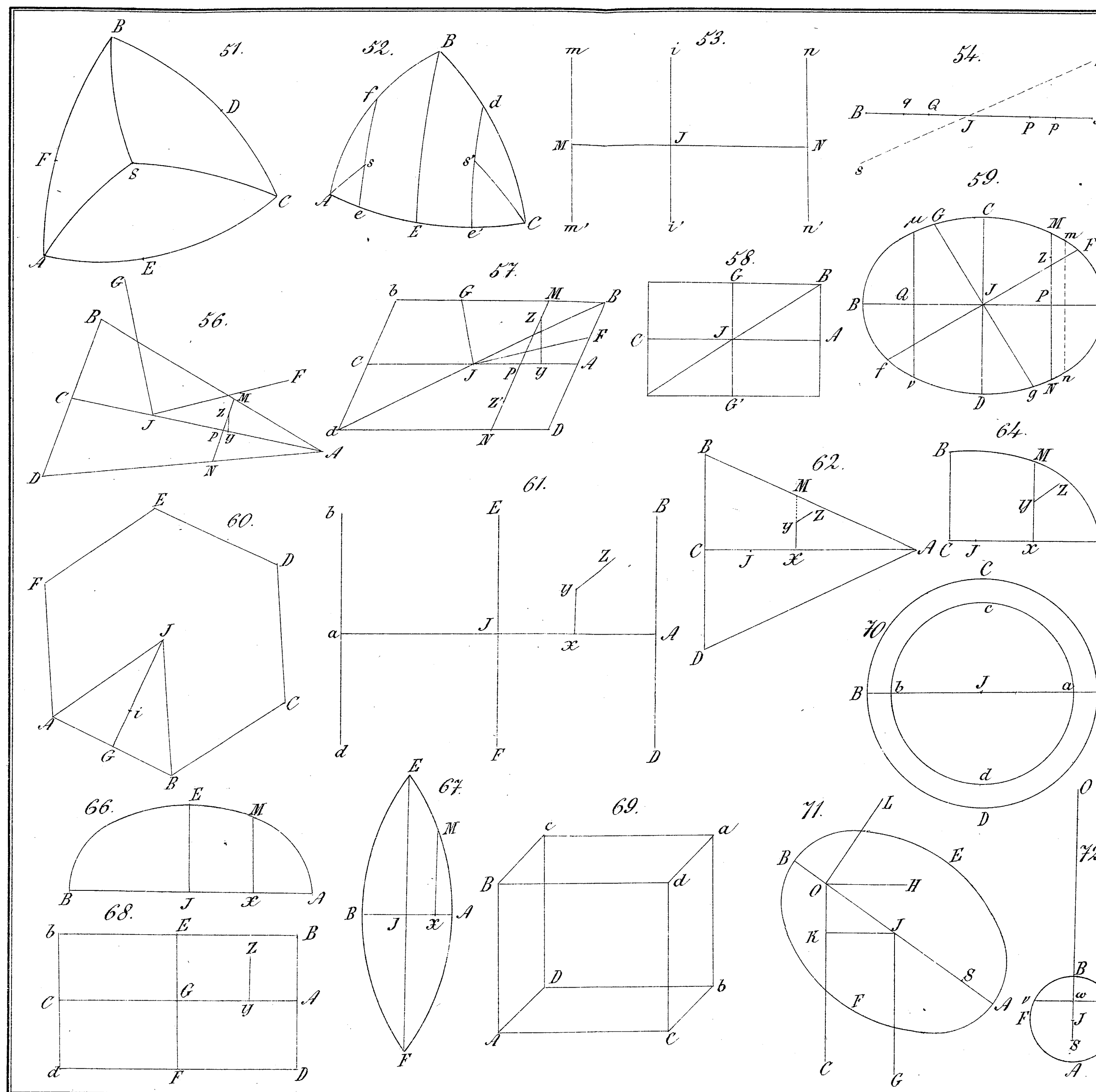
Druck der Königl. Universitäts-Druckerei in Greifswald.



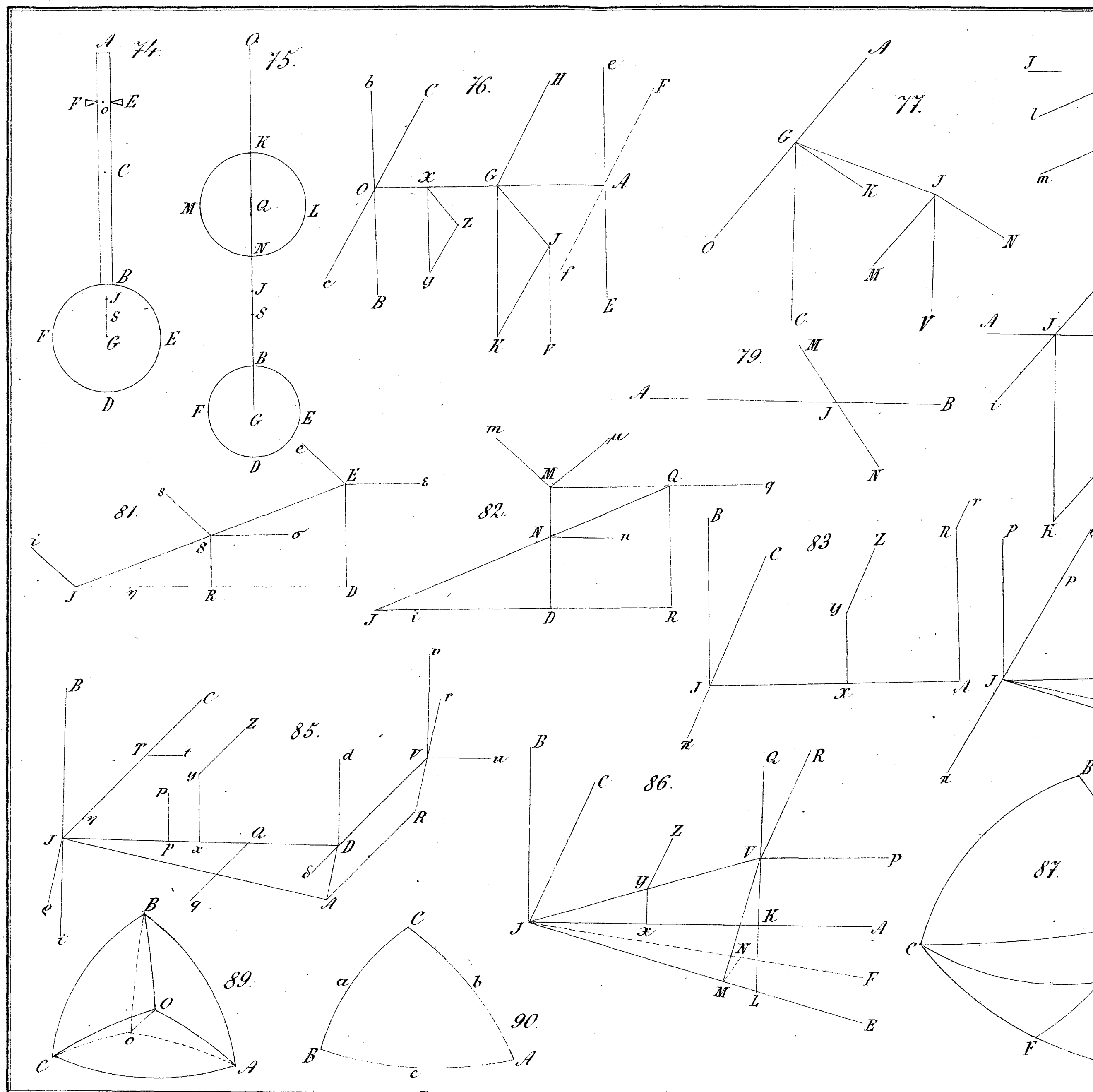
Eulers Theorie der Bewegung fest. od. starr. Körper.



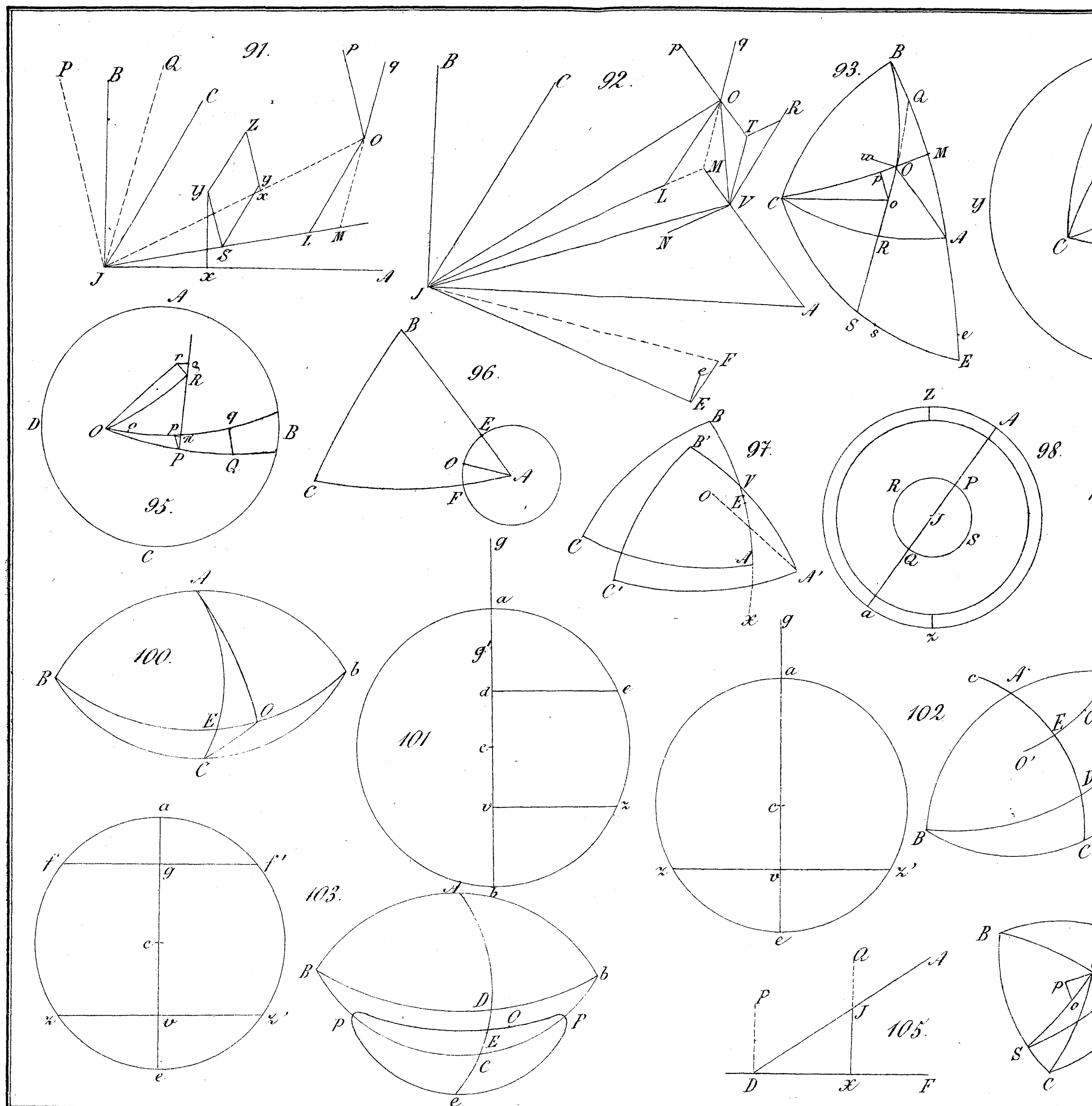
Eulers Theorie der Bewegung fest: od. starr. Körper.



Eulers Theorie der Bewegung fest. od. starr. Körper.

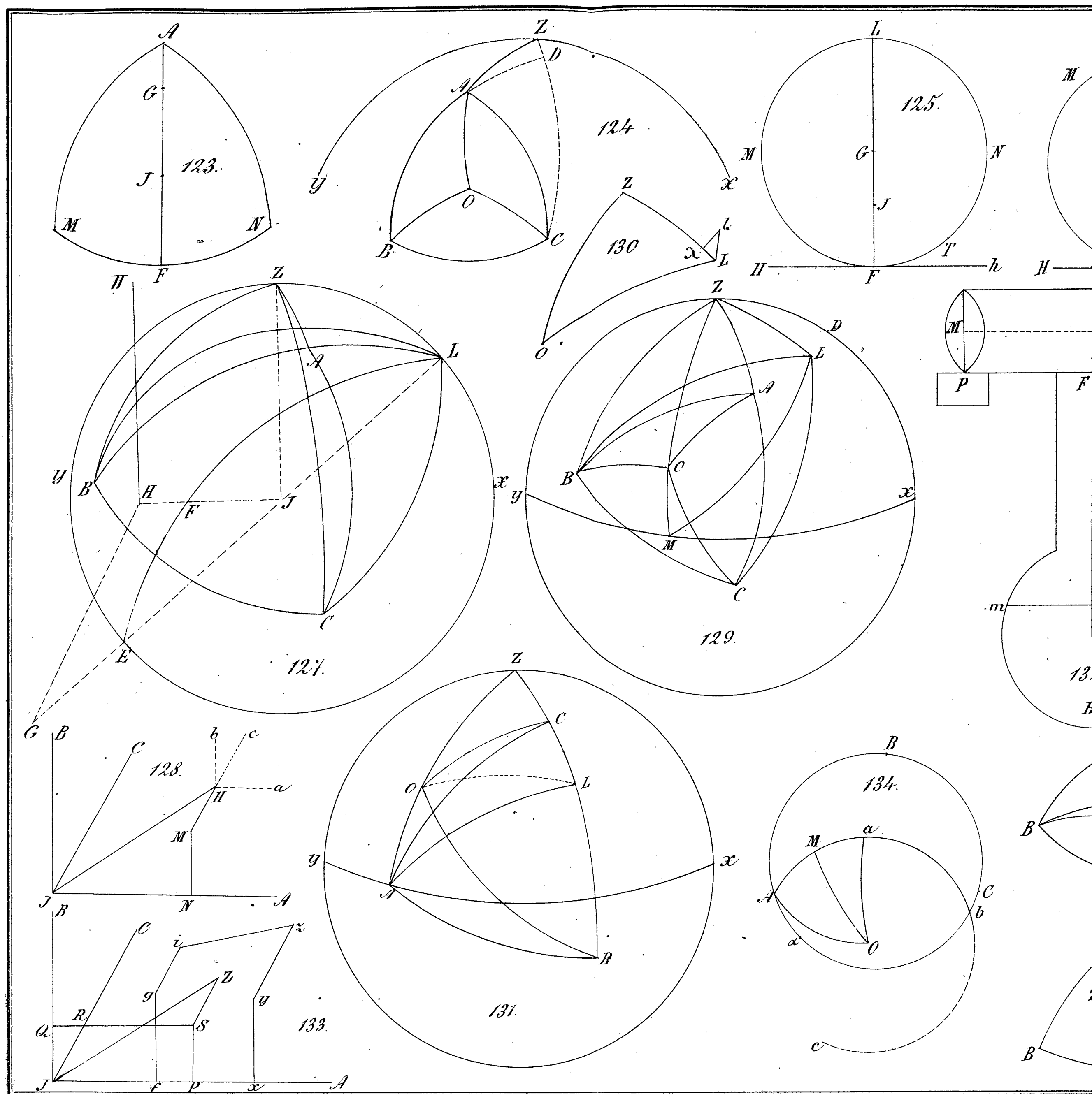


Eulers Theorie der Bewegung fest. od. starr. Körper.

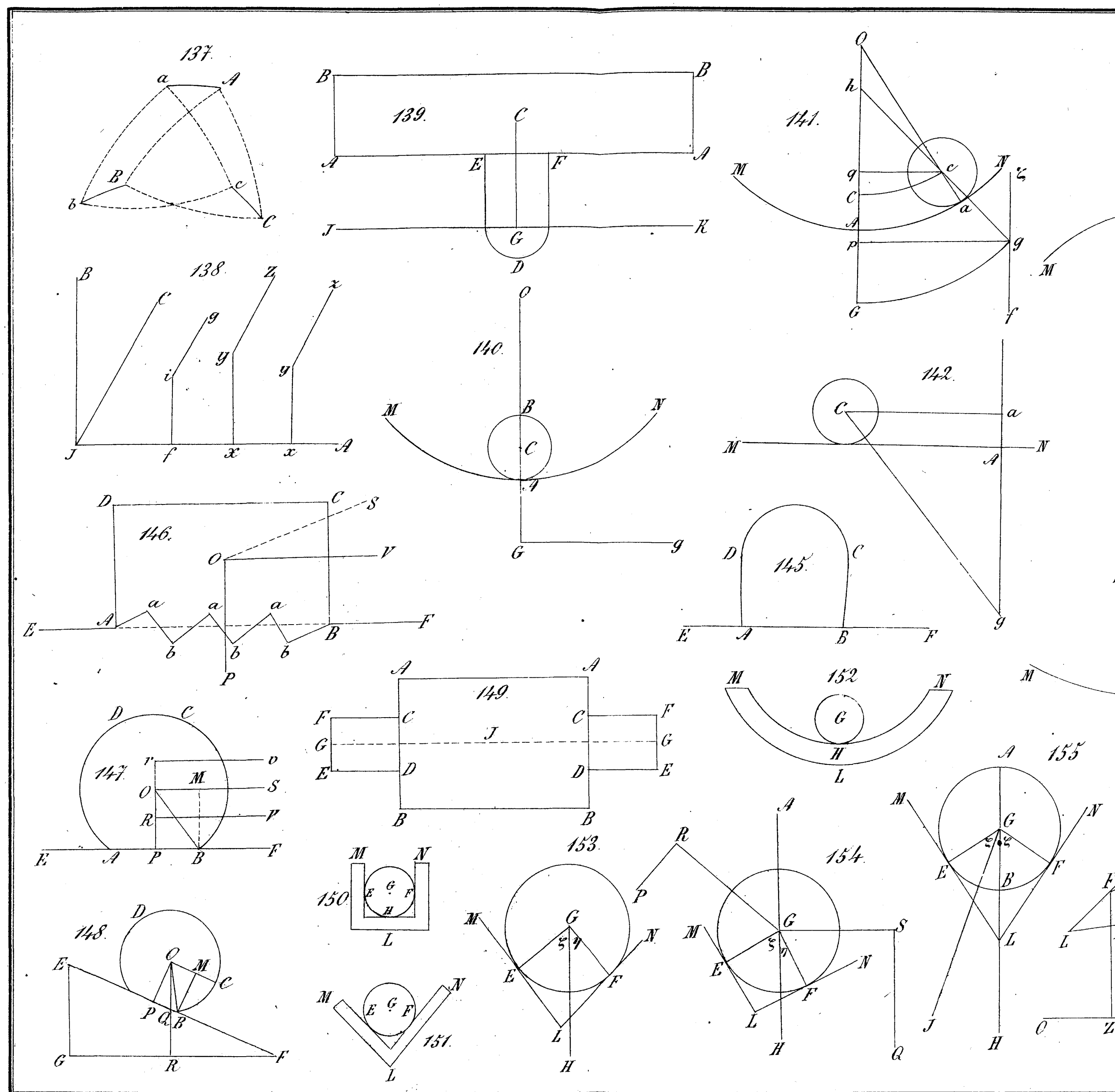


Eulers Theorie der Bewegung fest. od. starr. Körper.

Eulers Theorie der Bewegung fest. od. starr. Körper.



Eulers Theorie der Bewegung fest. od. starr. Körper.



Eulers Theorie der Bewegung fest. od. starr. Körper.